فصل ۳

درونیابی

در این فصل پس از بیان مسئله درون‌یابی کلی به بیان حالت‌های خاص از آن مانند درون‌یابی چندجمله‌ای می‌پردازیم. روش‌های لاگرانژ، نویل و نیوتن را در حل مسئله درون‌یابی چندجمله‌ای مرور کرده و پس از آن خطای این نوع درون‌یابی را بررسی می‌کنیم. در ادامه روش‌های لاگرانژ تعمیم‌یافته و تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن را برای درون‌یابی هرمیت بیان کرده و پس از آن درون‌یابی به کمک اسپلاین‌ها را بررسی کرده و با B-اسپلاین‌ها آشنا می‌شویم. در پایان پس از درون‌یابی گویا، درون‌یابی مثلثاتی را مرور کرده و با درون‌یابی وارون این فصل را به پایان می‌رسانیم.

۱.۳ مقدمات

تعریف ۱.۳ *تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ را یک نرم[۱] روی فضای خطی (برداری) حقیقی X نامند هرگاه*

- $\forall x \in X \ : \ \|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0$،
- $\forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،
- $\forall x, y \in X \ : \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت X یک فضای خطی نرمدار[۲] (NLS) نامیده می‌شود. اگر تمام ویژگی‌ها برقرار باشند و از $\|x\| = 0$ نتوان نتیجه گرفت $x = 0$، $\|\cdot\|$ را نیم‌نرم[۳] نامیده و به جای آن، از نماد $|\cdot|$ استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۳ *فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرمدار باشند. عملگر(نگاشت) $L : X \to Y$ روی مجموعه $S \subset X$ کراندار[۴] نامیده می‌شود، هرگاه ثابت $c < \infty$ چنان موجود باشد که*

$$\|Lx_1 - Lx_2\| \leq c \, \|x_1 - x_2\| \,, \qquad \forall x_1, x_2 \in S.$$

مقدار $\mu(L) = \inf c$ به کران عملگر L روی S معروف است.

---

[۱] Norm
[۲] Normed linear space
[۳] Seminorm
[۴] Bounded

قضیه ۱.۳ *اگر عملگر L خطی باشد، آنگاه*

$$\mu(L) = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|.$$

برهان. به صفحه 18 مرجع [۱۵] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۳.۳ *مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y خود یک فضای خطی است و با $\mathcal{L}[X,Y]$ نمایش داده می‌شود و به ویژه $\mathcal{L}[X] := \mathcal{L}[X,X]$.*

تعریف ۴.۳ نرم عملگر $L \in \mathcal{L}[X,Y]$ *که با $\|L\|$ نمایش داده می‌شود عبارت است از $\|L\| = \mu(L)$. این نرم به نرم القائی از نرم X معروف است و بنابر تعریف داریم*

$$\|Lx\| \leq \|L\| \, \|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

مثال ۱.۳ *برای* $x \in X = \mathbb{C}^n$ *داریم* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. *به وضوح ماتریس دلخواه* $A = [a_{ij}]$ در $\mathbb{C}^{m\times n}$ *یک عملگر در فضای* $\mathcal{L}[\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m]$ *است و داریم*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

برای اثبات این رابطه، فرض کنید λ بیان‌گر سمت راست این رابطه باشد. ابتدا نشان می‌دهیم برای بردار دلخواه x که $\|x\|_1 = 1$ داریم $\|Ax\|_1 \leq \lambda$ که دلالت بر این دارد که $\|A\|_1 \leq \lambda$. سپس بردار خاص x را چنان می‌یابیم که $\|x\|_1 = 1$ و $\|Ax\|_1 \geq \lambda$ و این نشان می‌دهد که $\|A\|_1 \geq \lambda$ و از این دو نابرابری نتیجه می‌شود $\|A\|_1 = \lambda$.
با این فرض که $A = [a^{(1)} \ \cdots \ a^{(n)}]$ خواهیم داشت $\lambda = \max_{1\leq j\leq n} \left\|a^{(j)}\right\|_1$ و برای بردار دلخواه x که $\|x\|_1 = 1$ داریم

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \left\|x_1 a^{(1)} + \cdots + x_n a^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq |x_1| \left\|a^{(1)}\right\|_1 + \cdots + |x_n| \left\|a^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max_{1\leq j\leq n} \left\|a^{(j)}\right\|_1 = \|x\|_1 \lambda = \lambda.
\end{aligned}$$

به علاوه اگر $\lambda = \left\|a^{(k)}\right\|_1$ آن‌گاه با انتخاب $x = e^{(k)}$ داریم $\left\|e^{(k)}\right\|_1 = 1$ و $\|Ae_k\|_1 = \left\|a^{(k)}\right\|_1 = \lambda$. چرا در اینجا sup *به* max *تغییر یافته است؟* $\triangle$

تمرین ۱.۳ *برای ماتریس دلخواه* $A = [a_{ij}]$ در $\mathbb{C}^{m\times n}$ *نشان دهید* $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$.

تمرین ۲.۳ *عملگر* $Lx(t) := \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$ *که در آن K تابعی پیوسته (معروف به هسته انتگرال) روی $[0,1]^2$ است، به فضای $\mathcal{L}[C[0,1]]$ تعلق دارد. اگر $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ نشان دهید*

$$\|L\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t)| \, ds.$$

تعریف ۵.۳ *دنباله $\{x_n\}$ در فضای خطی نرمدار X نسبت به نرم فضا همگرا به x نامیده می‌شود، هرگاه*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

تعریف ۶.۳ *عملگر L از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y، در نقطه x پیوسته نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x داشته باشیم*

$$\lim_{n\to\infty} \|Lx_n - Lx\| = 0.$$

قضیه ۲.۳ *عملگر خطی L تعریف‌شده روی فضای خطی نرمدار X، در $x \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر در صفر پیوسته باشد اگر و فقط اگر در هر نقطه از X پیوسته باشد اگر و فقط اگر کراندار است.*

برهان. به مراجع آنالیز تابعی مراجعه شود. □

تعریف ۷.۳ *یک عملگر (نگاشت) از فضای خطی X به توی $\mathbb{R}$ تابعی(تابعک)[۵] نامیده می‌شود. مجموعه تمام تابعی‌های خطی کراندار تعریف‌شده روی X، یک فضای خطی است که با X^* نمایش داده می‌شود و به فضای دوگان[۶] X معروف است.*

مثال ۲.۳ *تابعی $Lx(t) = x(T)$ که در آن T یک نقطه خاص است، به تابعی ارزیاب نقطه‌ای[۷] معروف است و کاربردهای فراوانی دارد.* △

۲.۳ مسئله درونیابی کلی

تعریف ۸.۳ *فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار با بعد n و $L_1, \dots, L_n$ تابعی‌های معلومی در X^* باشند. مسئله یافتن $x \in X$ به گونه‌ای که*

$$L_i x = w_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

به مسئله درونیابی کلی (تعمیم‌یافته)[۸] معروف است. این مسئله از نوع وارون است و در آن $w_1, \dots, w_n$ مقادیری معلوم هستند.

تعریف ۹.۳ *تابعی‌های $L_1, \dots, L_n$ مستقل خطی نامیده می‌شوند هرگاه از $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n = 0$ نتیجه بگیریم $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ و در غیر این صورت تابعی‌های $L_1, \dots, L_n$ وابسته خطی نامیده می‌شوند.*

---

[۵] Functional
[۶] Dual space
[۷] Point evaluation functional
[۸] General interpolation problem

مثال ۳.۳ *برای* $c \in [a,b]$*، تابعی‌های*

$$L_1 x = x(c), \qquad L_2 x = x'(c), \qquad L_3 x = \int_a^b x(t)dt,$$

تعریف‌شده روی $X = C^1[a,b]$ *مستقل خطی هستند.*

هرگاه $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0$ *آنگاه به ازای هر* x *داریم* $(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3)x = 0$*. با انتخاب* $x(t) = (t-c)^2$ *داریم* $\alpha_3 \int_a^b (x-c)^2 dt = 0$ *که نتیجه می‌دهد* $\alpha_3 = 0$*. از* $x(t) = t - c$ *خواهیم داشت* $\alpha_2 = 0$ *و در آخر از* $x(t) = 1$ *نتیجه می‌گیریم* $\alpha_1 = 0$*. باید توجه داشت[9] که اگر* $X = \mathbb{P}_1$*، تابعی‌های* L_1, L_2, L_3 *روی* X *وابسته خطی هستند (بررسی کنید).* △

قضیه ۳.۳ *اگر* $\dim(X) = n$ *آنگاه* $\dim(X^*) = n$.

برهان. به صفحه 18 مرجع [۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۳ *فرض کنید* $X = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ *(یعنی* $x_1, \ldots, x_n$ *یک پایه برای* X *باشد).* $L_1, \ldots, L_n \in X^*$ *مستقل خطی هستند (یعنی* $L_1, \ldots, L_n$ *یک پایه برای* X^* *است) اگر و فقط اگر دترمینان تعمیم‌یافته گرام[10] مخالف صفر باشد، یعنی*

$$\det(L_i x_j) = \begin{vmatrix} L_1 x_1 & \cdots & L_1 x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_n x_1 & \cdots & L_n x_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

برهان. به صفحه 32 مرجع [۱۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۵.۳ *مسئله درونیابی کلی جواب یکتا دارد اگر و فقط اگر* $L_1, \ldots, L_n$ *مستقل خطی باشند.*

برهان. به کمک قضیه قبل. □

یک راه ساده برای حل مسئله درونیابی کلی، روش ضرایب نامعین است. در این روش کافی است فرض کنیم $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. سپس ضرایب مجهول از حل دستگاه زیر به دست می‌آیند

$$(L_i x_1)a_1 + \cdots + (L_i x_n)a_n = w_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

مثال ۴.۳ *فرض کنید* $X = \mathbb{P}_{n-1}$ *و تعریف کنید* $L_i x = x(t_i)$ *که در آن* $t_1, \ldots, t_n$ *نقاطی معلوم و متمایز در* $\mathbb{R}$ *هستند. می‌خواهیم* $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ *را چنان بیابیم که داشته باشیم* $p_{n-1}(t_i) = w_i$ *که در آن* $w_1, \ldots, w_n$ *مقادیری معلوم هستند. این مسئله همان مسئله درونیابی چندجمله‌ای است. با انتخاب پایه متعارف* $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ *برای* X*،*

[9] فضای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر k را با $\mathbb{P}_k$ نمایش می‌دهیم.
[10] Gram generalized determinant

دترمینان تعمیم‌یافته گرام یعنی

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (t_j - t_i),$$

مخالف صفر است زیرا نقاط $t_1,\dots,t_n$ متمایز فرض شده‌اند. ماتریس پر به دست‌آمده به ماتریس واندرموند معروف است و هرچه n بزرگتر باشد بدحالت‌تر خواهد بود. بنابراین روش ضرایب نامعین در عمل توصیه نمی‌شود. $\triangle$

مثال ۵.۳ *برای نقاط متمایز $t_0,\dots,t_n$، $N+1$ تابعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم*

$$x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(m_0)}(t_0), \dots, x(t_n), x'(t_n), \dots, x^{(m_n)}(t_n),$$

که در آن $N = m_0 + \cdots + m_n + n$. در اینجا $X = \mathbb{P}_N$ و این مسئله به درونیابی هرمیت کلی[11] معروف بوده و در صفحه 24 مرجع [8] ثابت شده است، دترمینان تعمیم‌یافته گرام نظیر مخالف صفر بوده و در نتیجه این مسئله درونیابی جواب یکتا دارد. $\triangle$

مثال ۶.۳ *برای نقاط متمایز $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} < 2\pi$، $2n+1$ تابعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم*

$$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{2n}),$$

و فرض می‌کنیم

$$X = \operatorname{Span}\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt\}.$$

به وضوح $\dim(X) = 2n+1$. این مسئله به درونیابی مثلثاتی[12] معروف بوده و در صفحه 30 مرجع [8] ثابت شده است، دترمینان تعمیم‌یافته گرام نظیر مخالف صفر بوده و در نتیجه این مسئله درونیابی جواب یکتا دارد. $\triangle$

مثال ۷.۳ *مسئله گشتاور در مکانیک جامدات، یک مسئله درونیابی است که در آن می‌خواهیم تابع $x \in X$ را به گونه‌ای بیابیم که مقادیر*

$$\int_0^1 x(t)dt = m_0, \qquad \int_0^1 tx(t)dt = m_1, \qquad \dots, \qquad \int_0^1 t^n x(t)dt = m_n,$$

معلوم باشند. با تعریف تابعی‌های $L_i x = \int_0^1 t^i x(t)dt$ برای $i = 0,\dots,n$، برای $X = C[0,1]$ این مسئله جواب یکتا ندارد ولی برای $X = \mathbb{P}_n$ این مسئله جواب یکتا دارد زیرا با انتخاب پایه متعارف $\mathbb{P}_n$ یعنی $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$، دترمینان

[11] General Hermite interpolation
[12] Trigonometric interpolation

تعمیم‌یافته گرام عبارت است از

$$\begin{vmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \cdots & \frac{۱}{n+۱} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \cdots & \frac{۱}{n+۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{۱}{n+۱} & \frac{۱}{n+۲} & \frac{۱}{n+۳} & \cdots & \frac{۱}{۲n+۱} \end{vmatrix},$$

که ثابت می‌شود مخالف صفر است ولی با ماتریس بدحالت هیلبرت مواجه شده‌ایم. △

مثال ۸.۳ *می‌خواهیم یک چندجمله‌ای حداکثر درجه دو بیابیم که مقدار آن در نقاط ۱ ,۱− و مقدار مشتق آن در صفر معلوم باشد. با تعریف*

$$X = \mathbb{P}_۲ = \mathrm{Span}\{۱, t, t^۲\}, \qquad L_۱x = x(-۱), \qquad L_۲x = x(۱), \qquad L_۳x = x'(۰),$$

داریم

$$\det(L_ix_j) = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۰.$$

پس این مسئله درونیابی جواب یکتا ندارد (بسته به مقادیر w_iها یا جواب ندارد یا جواب‌های بیشماری دارد). △

تعریف ۱۰.۳ *فرض کنید توابع $x_۱(t), \ldots, x_n(t)$ روی $S \subset \mathbb{R}^m$ تعریف شده باشند. اگر برای هر انتخابی از نقاط متمایز $t_۱, \ldots, t_n$ در S داشته باشیم*

$$\det(x_i(t_j)) \neq ۰, \tag{۱.۳}$$

این توابع روی S یکتاحل‌کننده [۱۳] نامیده می‌شوند. این به آن معنی است که مسئله درونیابی

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i(t_j)a_i = w_j, \qquad j = ۱, \ldots, n,$$

همواره جواب یکتا دارد. (۱.۳) به شرط هار [۱۴] معروف است و یک مجموعه از توابع یکتاحل‌کننده پیوسته، دستگاه چبیشف [۱۵] نامیده می‌شود.

مثال ۹.۳ *فرض کنید $x_i(t)$ برای $i = ۱, \ldots, n$، یک چندجمله‌ای درجه $i - ۱$ باشد. توابع $x_۱(t), \ldots, x_n(t)$ روی هر بازه متناهی از $\mathbb{R}$ یکتاحل‌کننده هستند و در واقع یک دستگاه چبیشف تشکیل می‌دهند (بررسی کنید).* △

---

[۱۳] Unisolvent
[۱۴] Haar
[۱۵] Chebyshev

مثال ۱۰.۳ *توابع* $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ *روی هر بازه به طول* 2π *که یک سر آن باز و یک سر آن بسته (مانند* $[0, 2\pi)$*) باشد، یکتاحل‌کننده هستند و در واقع یک دستگاه چبیشف تشکیل می‌دهند (بررسی کنید).* △

تمرین‌های صفحه 37-36 مرجع [۱۵] را بررسی کنید.

۳.۳ درونیابی چندجمله‌ای

در جمهوری اسلامی ایران هر ده سال یک بار سرشماری جمعیت انجام می‌شد و قرار شده است از این به بعد هر پنج سال یک بار انجام پذیرد. جدول ۱.۳ جمعیت کشور را در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵ نشان می‌دهد. در ارتباط با این جدول سوال‌های زیر مطرح می‌شوند

- در سال ۱۳۵۹ (آغاز جنگ تحمیلی ایران با عراق) جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در سال ۱۴۰۰ جمعیت ایران چقدر خواهد بود؟
- در سال ۱۳۳۰ جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در چه سالی جمعیت ایران حدود ۴۰ میلیون نفر بوده است؟

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰	۱۳۹۵
میلیون نفر	۱۸٫۹۵	۲۵٫۷۹	۳۳٫۷۱	۴۹٫۴۵	۶۰٫۰۶	۷۰٫۴۷	۷۵٫۱۵	۷۹٫۹۳

جدول ۱.۳: جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵

تعریف ۱۱.۳ *فرض کنید تابع* $x(t)$ *در دسترس نباشد (یا ضابطه‌ای پیچیده داشته باشد) ولی مقدار آن در* $n+1$ *نقطه* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *معلوم باشد. مسئله یافتن مقدار تابع* x *در نقطه* t *متعلق به بازه* $[t_0, t_n]$ *به مسئله درونیابی (سوال اول)، مسئله یافتن مقدار تابع* x *در نقطه* t *که به بازه* $[t_0, t_n]$ *تعلق ندارد به مسئله برونیابی (سوال دوم و سوم) و مسئله تعیین* t *زمانی که* $x(t)$ *معلوم باشد به مسئله درونیابی وارون (سوال چهارم) معروف است.*

قضیه ۶.۳ **(تقریب وایرشتراس)** *فرض کنید* $x \in C[a,b]$*. به ازای هر* $\epsilon > 0$ *چندجمله‌ای* p *چنان وجود دارد که*

$$|x(t) - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

با توجه به این قضیه و با توجه به همواری چندجمله‌ای‌ها (مشتق و انتگرال یک چندجمله‌ای، چندجمله‌ای است)، چنین به نظر می‌رسد که ساده‌ترین روش برای حل مسئله درونیابی، ساختن چندجمله‌ای درونیاب تابع x است.

تعریف ۱۲.۳ *فرض کنید مقدار تابع* x *در* $n+1$ *نقطه* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *معلوم باشد. چندجمله‌ای* p *را چندجمله‌ای درونیاب تابع* x *نامند اگر*

$$p(t_i) = x(t_i) = x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

این رابطه به ویژگی چندجمله‌ای درونیاب معروف است.

قضیه ۷.۳ *اگر مقدار تابع x در $n+1$ نقطه متمایز $t_0, t_1, \dots, t_n$ معلوم باشد، آن‌گاه یک و فقط یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه n با ویژگی درونیابی وجود دارد.*

برهان. فرض کنید $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ چندجمله‌ای درونیاب (با ضرایب نامعین) تابع x در نقاط $t_0, t_1, \dots, t_n$ باشد. بنابر ویژگی درونیابی داریم

$$\begin{aligned} p(t_0) &= a_0 + a_1 t_0 + \cdots + a_n t_0^n = x_0, \\ p(t_1) &= a_0 + a_1 t_1 + \cdots + a_n t_1^n = x_1, \\ &\vdots \\ p(t_n) &= a_0 + a_1 t_n + \cdots + a_n t_n^n = x_n. \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان به شکل فشرده $A\alpha = b$ نوشت که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

ماتریس A به ماتریس واندرموند معروف است و ثابت می‌شود $\det(A) = \prod_{0 \le i < j \le n} (t_j - t_i)$ (به عنوان تمرین). چون نقاط $t_0, t_1, \dots, t_n$ متمایز انتخاب شده‌اند واضح است که $\det(A) \neq 0$ و بنابراین دستگاه $A\alpha = b$ جواب یکتا دارد. □

تذکر ۱.۳ *اثبات این قضیه دلالت دارد بر روش ضرایب نامعین برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب که به تولید یک دستگاه پُر و بدحالت منجر می‌شود و برای nهای بزرگ کارایی ندارد. در ادامه روش‌های کاراتر بررسی می‌شوند.*

۱.۳.۳ روش لاگرانژ

فرض کنید L_j به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد و قرار دهید

$$p(t) = x_0 L_0(t) + x_1 L_1(t) + \cdots + x_n L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j L_j(t).$$

برای آن که p در ویژگی درونیابی صدق کند باید داشته باشیم

$$L_j(t_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

یعنی L_j باید در n نقطه $t_0, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n$ صفر شود. بنابراین

$$L_j(t) = c(t - t_0) \cdots (t - t_{j-1})(t - t_{j+1}) \cdots (t - t_n),$$

و چون $L_j(t_j)=۱$ پس

$$c=\frac{۱}{(t_j-t_۰)\cdots(t_j-t_{j-۱})(t_j-t_{j+۱})\cdots(t_j-t_n)},$$

و در نتیجه

$$L_j(t)=\frac{(t-t_۰)\cdots(t-t_{j-۱})(t-t_{j+۱})\cdots(t-t_n)}{(t_j-t_۰)\cdots(t_j-t_{j-۱})(t_j-t_{j+۱})\cdots(t_j-t_n)}=\prod_{j\neq k=۰}^{n}\frac{t-t_k}{t_j-t_k}.$$

تذکر ۲.۳ *چندجمله‌ای‌های L_j به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروف هستند و با معرفی چندجمله‌ای*

$$\psi_n(t)=(t-t_۰)\cdots(t-t_n)=\prod_{i=۱}^{n}(t-t_i),$$

می‌توان نوشت (بررسی کنید)

$$p(t)=\psi_n(t)\sum_{j=۰}^{n}\frac{x_j}{(t-t_j)\psi_n'(t_j)}.$$

تمرین ۳.۳ *نشان دهید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، چندجمله‌ای‌های درجه n مستقل خطی بوده و یک افراز واحد*[۱۶] *تشکیل می‌دهند، یعنی $\sum_{j=۰}^{n}L_j(t)=۱$ و در خاصیت بازتولید*[۱۷] *صدق می‌کنند، یعنی*

$$\sum_{j=۰}^{n}t_j^kL_j(t)=t^k,\qquad k=۰,۱,\ldots,n.$$

الگوریتم روش لاگرانژ

- **ورودی.** نقاط $(t_۰,x_۰),(t_۱,x_۱),\ldots,(t_n,x_n)$
- **خروجی.** چندجمله‌ای درون‌یاب x

۱) برای $j=۰,۱,\ldots,n$ قرار دهید $L_j(t)=\prod_{j\neq k=۰}^{n}\frac{t-t_k}{t_j-t_k}$

۲) قرار دهید $p(t)=\sum_{j=۰}^{n}x_jL_j(t)$

مثال ۱۱.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را با روش لاگرانژ تعیین کنید.*

t_j	-۱	۰	۲
x_j	۱	۱	۷

به وضوح $n=۲$ و داریم

$$L_۰(t)=\frac{(t-t_۱)(t-t_۲)}{(t_۰-t_۱)(t_۰-t_۲)}=\frac{(t-۰)(t-۲)}{(-۱-۰)(-۱-۲)}=\frac{t^۲-۲t}{۳},$$

$$L_۱(t)=\frac{(t-(-۱))(t-۲)}{(۰-(-۱))(۰-۲)}=\frac{-t^۲+t+۲}{۲},\qquad L_۲(t)=\frac{(t-(-۱))(t-۰)}{(۲-(-۱))(۲-۰)}=\frac{t^۲+t}{۶}$$

[۱۶] Partition of unity

[۱۷] Reproducing property

و بنابراین

$$p(t) = x_0 L_0(t) + x_1 L_1(t) + x_2 L_2(t) = 1 \times (\frac{t^2 - t}{2}) + 1 \times \frac{-t^2 + t + 2}{2} + 7 \times (\frac{t^2 + t}{6}) = t^2 + t + 1$$

پس می‌توان به عنوان مثال $p(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{4}$ *را به عنوان تقریبی از* $x(\frac{1}{2})$ *پذیرفت.* △

مثال ۱۲.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را با روش لاگرانژ تعیین کنید.*

t_j	-1	0	1	2
x_j	1	1	3	7

به وضوح $n = 3$ *و داریم*

$$L_0(t) = \frac{(t-0)(t-1)(t-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{-6},$$

$$L_1(t) = \frac{t^3 - 2t^2 - t + 2}{2}, \quad L_2(t) = \frac{t^3 - t^2 - 2t}{-2}, \qquad L_3(t) = \frac{t^3 - t}{6}$$

و بنابراین

$$p(t) = 1 \times L_0(t) + 1 \times L_1(t) + 3 \times L_2(t) + 7 \times L_3(t) = t^2 + t + 1$$

با آن که L_j*ها درجه ۳ هستند ولی* p *درجه ۲ است.* △

نکات مهم در روش لاگرانژ

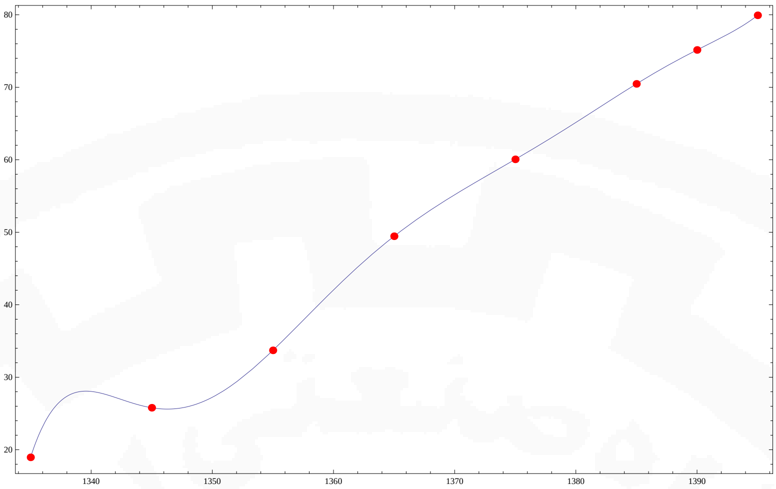
- چون داریم $\mathbb{P}_n = \mathrm{Span}\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$، بنابراین در روش لاگرانژ ساختن یک پایه برای فضای $\mathbb{P}_n$ مد نظر بوده و ماتریس درونیاب همانی است و در نتیجه نیازی به حل دستگاه نیست؛
- حجم محاسبات (حتی زمانی که n کوچک باشد) قابل توجیه نیست و برای nهای بزرگ روش کارایی چندانی ندارد. بنابراین روش لاگرانژ به این صورت که بیان شد کمتر در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد و بیشتر جنبه نظری دارد. ولی گونه‌ای از پیاده‌سازی این روش وجود دارد[18] که حجم محاسبات آن معقول است؛
- با اضافه شدن حتی یک نقطه به داده‌های قبلی، باید تمام عملیات را از سر گرفت و از محاسبات قبلی استفاده نمی‌شود ولی اگر برخی یا تمام x_jها تغییر کنند لازم نیست پایه دوباره ساخته شود و فقط کافی است آخرین مرحله دوباره تکرار شود و این مزیت بارز روش لاگرانژ نسبت به برخی روش‌ها است؛
- قبل از اتمام عملیات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب معلوم نیست و در اصل درجه چندجمله‌ای درونیاب در پایان محاسبات معلوم می‌شود.

مثال ۱۳.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب داده‌های جمعیت ایران را ساخته و نمودار آن را در شکل ۱.۳ رسم کرده‌ایم. نتایج*

$$p(1330) = -44/95,\ p(1340) = 28/04,\ p(1359) = 40/39,\ p(1368) = 51/92,\ p(1400) = 93/29$$

[18] Barycenteric Lagrange interpolation به مراجع [۵] و [۱۱] مراجعه کنید.

به دست می‌آیند که باید به دقت تفسیر شوند. $\triangle$



شکل ۱.۳: نمودار جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۹۵–۱۳۳۵

۲.۳.۳ الگوریتم نویل

اگر هدف از درونیابی تعیین مقدار چندجمله‌ای درونیاب در یک نقطه مشخص باشد و به ساختن چندجمله‌ای درونیاب نیازی نباشد، حجم محاسبات الگوریتم نویل[19] قابل توجیه است. در ادامه منظور از $p_{i_0 i_1 \cdots i_k}(t)$ یک چندجمله‌ای درجه k است که ویژگی درونیابی در نقاط $t_{i_0}, t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}$ را دارا باشد و به وضوح برای هر i داریم $p_i(t) = x_i$.

قضیه ۸.۳ *رابطه بازگشتی زیر برقرار است*

$$p_{i_0 i_1 \cdots i_k}(t) = \frac{p_{i_1 \cdots i_k}(t)(t - t_{i_0}) - p_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(t)(t - t_{i_k})}{t_{i_k} - t_{i_0}}. \qquad (۲.۳)$$

برهان. به سادگی می‌توان نشان داد عبارت سمت راست ویژگی درونیابی در نقاط $t_{i_0}, \ldots, t_{i_k}$ را دارا بوده و بنابر یکتایی چندجمله‌ای درونیاب، با سمت چپ برابر است. $\square$

در عمل به کمک رابطه بازگشتی (۲.۳) یک جدول معروف به جدول نویل به صورت زیر ساخته می‌شود

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
t_0	$x_0 = p_0(t)$			
		$p_{01}(t)$		
t_1	$x_1 = p_1(t)$		$p_{012}(t)$	
		$p_{12}(t)$		$p_{0123}(t)$
t_2	$x_2 = p_2(t)$		$p_{123}(t)$	
		$p_{23}(t)$		
t_3	$x_3 = p_3(t)$			

[19] Neville's algorithm

با معرفی $T_{i+k,k} = p_{i,i+1,\dots,i+k}(t)$ برای $1 \le k \le i$ و $0 \ge i$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T_{i,0} &= x_i, \\ T_{i,k} &= \frac{(t-t_{i-k})T_{i,k-1} - (t-t_i)T_{i-1,k-1}}{t_i - t_{i-k}}, \\ &= T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{t-t_{i-k}}{t-t_i} - 1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

در نتیجه جدول نویل به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{array}{c|llll} t_0 & x_0 = T_{00} & & & \\ & & T_{11} & & \\ t_1 & x_1 = T_{10} & & T_{22} & \\ & & T_{21} & & T_{33} \\ t_2 & x_2 = T_{20} & & T_{32} & \\ & & T_{31} & & \\ t_3 & x_3 = T_{30} & & & \end{array}$$

به نظر می‌رسد برای برنامه‌نویسی به یک آرایه دوبعدی نیاز باشد ولی در شبه‌کد زیر، الگوریتم نویل به کمک یک آرایه یک بعدی (بردار) نوشته شده است.

```
for i=0:n
  z(i)=x(i)
  for j=i-1:-1:0
    z(j)=z(j+1)+(z(j+1)-z(j))*(t-t(i))/(t(i)-t(j))
  end
end
```

پس از پایان این شبه‌کد $z(0)$ همان $T_{nn} = p_{0,1,\dots,n}(t)$ است. در صفحه 43-42 مرجع [۲۲] نسخه دیگری از الگوریتم نویل ارائه شده است.

مثال ۱۴.۳ *مقدار چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را در نقطه $t = 2$ به دست آورید.*

t_j	۰	۱	۳
x_j	۱	۳	۲

به کمک جدول نویل داریم

$$
\begin{array}{c|llll}
t_۰ = ۰ & x_۰ = ۱ & & \\
 & & \frac{۲\times ۳ - ۱\times ۱}{۱-۰} = ۵ & \\
t_۱ = ۱ & x_۱ = ۳ & & \frac{۲\times \frac{۵}{۲} - (-۱)\times ۵}{۳-۰} = \frac{۱۰}{۳} \\
 & & \frac{۱\times ۲ - (-۱)\times ۳}{۳-۱} = \frac{۵}{۲} & \\
t_۲ = ۳ & x_۲ = ۲ & &
\end{array}
$$

بنابراین $x(۲) \simeq \frac{۱۰}{۳}$. △

۳.۳.۳ روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

اگر بخواهیم چندجمله‌ای درونیاب را به طور صریح بسازیم و یا اگر بخواهیم درونیابی را در چندین نقطه انجام دهیم، از روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن استفاده می‌کنیم. در این روش ابتدا یک پایه برای $\mathbb{P}_n$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\mathbb{P}_n = \mathrm{Span}\{۱, (t-t_۰), (t-t_۰)(t-t_۱), \ldots, (t-t_۰)\cdots(t-t_{n-۱})\}.$$

بنابراین می‌توان هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر n به ویژه چندجمله‌ای درون‌یاب p را به صورت زیر نوشت

$$p(t) = a_۰ + a_۱(t-t_۰) + a_۲(t-t_۰)(t-t_۱) + \cdots + a_n(t-t_۰)\cdots(t-t_{n-۱}).$$

حال برای تعیین ضرایب مجهول $a_۰, a_۱, \ldots, a_n$، به کمک ویژگی درون‌یابی p داریم

$$
\begin{aligned}
&p(t_۰) = a_۰ = x_۰ \longrightarrow a_۰ = x_۰,\\
&p(t_۱) = a_۰ + a_۱(t_۱ - t_۰) = x_۱ \longrightarrow a_۱ = \tfrac{x_۱ - x_۰}{t_۱ - t_۰},\\
&p(t_۲) = a_۰ + a_۱(t_۲ - t_۰) + a_۲(t_۲ - t_۰)(t_۲ - t_۱) = x_۲ \longrightarrow a_۲ = \tfrac{x_۲ - x_۰ - a_۱(t_۲ - t_۰)}{(t_۲ - t_۰)(t_۲ - t_۱)}, \ldots.
\end{aligned}
$$

این روش به n تقسیم و $n(n-۱)$ ضرب نیاز دارد. راه دیگری که در ادامه بررسی می‌شود، به $\frac{n(n+۱)}{۲}$ عمل تقسیم نیاز دارد. با توجه به تعریف $p_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}(t)$ و $p_{i_۰ i_۱ \cdots i_{k-۱}}(t)$ و ویژگی پایه نیوتنی داریم

$$p_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}(t) = p_{i_۰ i_۱ \cdots i_{k-۱}}(t) + x_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}(t - t_{i_۰})\cdots(t - t_{i_{k-۱}}),$$

که در آن $x_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}$ ضریب مجهولی است که باید تعیین شود. با به کار بردن مکرر این رابطه بازگشتی خواهیم داشت

$$p_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}(t) = x_{i_۰} + x_{i_۰ i_۱}(t - t_{i_۰}) + \cdots + x_{i_۰ i_۱ \cdots i_k}(t - t_{i_۰})\cdots(t - t_{i_{k-۱}}).$$

با جای‌گذاری این رابطه در (۲.۳) و متحد قرار دادن ضریب t^k در دو طرف، رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$x_{i_0 i_1 \cdots i_k} = \frac{x_{i_1 \cdots i_k} - x_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}}{t_{i_k} - t_{i_0}}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

$x_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ به تفاضل تقسیم‌شده[20] مرتبه k تابع x در نقاط $t_{i_0}, \ldots, t_{i_k}$ معروف است.

گزاره ۱.۳ *تفاضل تقسیم‌شده $x_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ نسبت به جایگشت اندیس‌ها تغییر نمی‌کند.*

برهان. فرض کنید $\{i_0, \ldots, i_k\}$ و $\{j_0, \ldots, j_k\}$ دو مجموع اندیس باشند به طوری که $\{i_0, \ldots, i_k\} = \{j_0, \ldots, j_k\}$. کافی است چندجمله‌ای درونیاب را روی دو مجموعه نقاط بنویسیم. با توجه به یکتایی چندجمله‌ای درونیاب و متحد قرار دادن ضریب t^k حکم ثابت می‌شود. $\square$

تذکر ۳.۳ *اگرچه ترتیب نقاط در محاسبه یک تفاضل تقسیم‌شده از دیدگاه نظری بی‌اهمیت است ولی از دیدگاه عددی ممکن است تاثیرگذار باشد. صفحه 47-46 مرجع [۲۲] یک ترتیب نقاط که از نظر عددی قابل اعتمادتر باشد، توضیح داده شده است. شایان توجه است که ترتیب بیان‌شده، در ارزیابی چندجمله‌ای درونیاب به کمک قاعده هورنر رشد خطای کمتری به دنبال دارد.*

گزاره ۲.۳ *اگر x یک چندجمله‌ای درجه n باشد آن‌گاه برای $k > n$ داریم $x_{01\ldots k} = 0$.*

برهان. با توجه به یکتایی چندجمله‌ای درونیاب برای $k > n$ داریم $p_{01\ldots k} = x$ و در نتیجه باید ضرایب t^k برای $k > n$ صفر باشند. $\square$

در عمل کافی است یک جدول مشابه جدول نویل، معروف به جدول تفاضلات تقسیم‌شده به صورت زیر ساخته شود

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
t_0	x_0			
		x_{01}		
t_1	x_1		x_{012}	
		x_{12}		x_{0123}
t_2	x_2		x_{123}	
		x_{23}		
t_3	x_3			

سپس می‌توان با استخراج ضرایب مورد نیاز از جدول، چندجمله‌ای درونیاب را ساخت.

مثال ۱۵.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را به دست آورید.*

t_j	۰	۱	۳
x_j	۱	۳	۲

---
[20] Devided difference

به کمک جدول تفاضلات تقسیم‌شده داریم

$$
\begin{array}{c|ccc}
t_0 = 0 & x_0 = 1 & & \\
 & & \frac{3-1}{1-0} = 2 & \\
t_1 = 1 & x_1 = 3 & & \frac{\frac{-1}{2}-2}{3-0} = \frac{-5}{6} \\
 & & \frac{2-3}{3-1} = \frac{-1}{2} & \\
t_2 = 3 & x_2 = 2 & &
\end{array}
$$

بنابراین $p(t) = p_{012}(t) = 1 + 2(t-0) - \frac{5}{6}(t-0)(t-1) = 1 + \frac{17}{6}t - \frac{5}{6}t^2$. △

الگوریتم روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- **ورودی.** نقاط $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$
- **خروجی.** اعداد $x_{0,0}, x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$ به طوری که $p(t) = \sum_{i=0}^{n} x_{i,i} \prod_{k=0}^{i-1}(t - t_k)$

۱) برای $i = 0, 1, \ldots, n$ قرار بده $x_{i,0} = x_i$

۲) برای $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, i$ قرار بده $x_{i,j} = \frac{x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1}}{t_i - t_{i-j}}$

مثال ۱۶.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به جدول مثال ۱۱.۳ را با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن تعیین کنید.*
برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب، ابتدا جدول تفاضلات تقسیم‌شده را می‌سازیم

$$
\begin{array}{c|ccc}
-1 & 1 & & \\
 & & \frac{1-1}{0-(-1)} = 0 & \\
0 & 1 & & \frac{3-0}{2-(-1)} = 1 \\
 & & \frac{7-1}{2-0} = 3 & \\
2 & 7 & &
\end{array}
$$

و به کمک آن داریم

$$p(t) = 1 + (0)(t-(-1)) + (1)(t-(-1))(t-(0)) = t^2 + t + 1.$$

△

مثال ۱۷.۳ *اگر داده* $(1, 3)$ *به جدول اضافه شود، مثال قبل را دوباره حل کنید.*

به راحتی می‌توان جدول مثال قبل را به صورت زیر اصلاح کرد.

$$
\begin{array}{r|llll}
-1 & 1 & & & \\
 & & 0 & & \\
 & & & 1 & \\
0 & 1 & & & \\
 & & 3 & & \frac{1-1}{1-(-1)} = 0 \\
2 & 7 & & & \\
 & & & \frac{4-3}{1-0} = 1 & \\
 & & \frac{3-7}{1-2} = 4 & & \\
1 & 3 & & &
\end{array}
$$

و سپس

$$q(t) = p(t) + 0(t+1)t(t-2) = p(t) = t^2 + t + 1.$$

$\triangle$

نکاتی مهم در روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- حجم عملیات قابل قبول است؛
- با اضافه شدن یک نقطه (نقاطی) به جدول، از محاسبات قبلی استفاده می‌شود؛
- ماتریس درونیاب پایین مثلثی است؛
- چندجمله‌ای درون‌یاب به تدریج ساخته می‌شود و درجه آن، پس از ساختن جدول مشخص می‌شود.

۴.۳.۳ روش‌های پیشرو/پسرو نیوتن

روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن برای نقاط هم‌فاصله/غیرهم‌فاصله $t_0, \dots, t_n$ به کار برده می‌شود، اما اگر نقاط هم‌فاصله باشند چندجمله‌ای درون‌یاب به شکل ساده‌تری قابل بیان است که در ادامه با نحوه نمایش آن آشنا می‌شویم. فرض کنید

$$t_{i+1} - t_i = h, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

و یا $t_i = t_0 + ih$ برای $i = 0, 1, \dots, n$.

تعریف ۱۳.۳ *عملگر انتقال که با E نمایش داده می‌شود به صورت $Ex_i = x_{i+1} = x(t_{i+1})$ تعریف می‌شود و برای هر k طبیعی داریم $E^k x_i = x_{i+k}$. با این فرض که به ازای هر α حقیقی داشته باشیم $t_{i+\alpha} = t_i + \alpha h$ و $x_{i+\alpha} = x(t_{i+\alpha})$ می‌توان تعریف کرد $E^\alpha x_i = x_{i+\alpha}$، به ویژه $E^{-1} x_i = x_{i-1}$.*

تعریف ۱۴.۳ *عملگر تفاضل پیشرو که با Δ نمایش داده می‌شود به صورت $\Delta = E - 1$ بیان می‌شود. بنابراین $\Delta x_i = (E-1)x_i = x_{i+1} - x_i$ و برای هر k طبیعی داریم*

$$\Delta^{k+1}x_i = \Delta(\Delta^k x_i) = \Delta^k(\Delta x_i) = \Delta^k(x_{i+1} - x_i) = \Delta^k x_{i+1} - \Delta^k x_i.$$

به عنوان مثال داریم $\Delta^2 x_i = \Delta(\Delta x_i) = \Delta(x_{i+1} - x_i) = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$. به طور مشابه عملگر تفاضل پسرو که با ∇ نمایش داده می‌شود، به صورت $\nabla = 1 - E^{-1}$ بیان شده و در نتیجه $\nabla x_i = (1 - E^{-1})x_i = x_i - x_{i-1}$ و برای هر k طبیعی داریم

$$\nabla^{k+1}x_i = \nabla(\nabla^k x_i) = \nabla^k(\nabla x_i) = \nabla^k x_i - \nabla^k x_{i-1}.$$

به عنوان مثال $\nabla^2 x_i = \nabla(\nabla x_i) = \nabla(x_i - x_{i-1}) = x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}$.

تمرین ۴.۳ نشان دهید

$$1)E\Delta = \Delta E \qquad 2)E\nabla = \nabla E \qquad 3)\Delta\nabla = \nabla\Delta$$

$$4)\Delta x_i = \nabla x_{i+1} \quad 5)\nabla x_i = \Delta x_{i-1} \quad 6)\Delta^k x_i = \nabla^k x_{i+k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

و با فرض $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ با استقرا نشان دهید

$$7)\begin{cases} \Delta^n p(t_i) = n!h^n a_n, \\ \Delta^m p(t_i) = 0, \qquad m > n. \end{cases}$$

لم ۱.۳ *اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی i داریم*

$$x_{i,i+1,\ldots,i+k} = \frac{\Delta^k x_i}{k!h^k} = \frac{\nabla^k x_{i+k}}{k!h^k}.$$

برهان. با استقرا روی k. برای $k = 1$ داریم

$$x_{i,i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta x_i}{h}.$$

فرض کنید حکم برای $k = m$ برقرار باشد. برای $k = m + 1$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} x_{i,i+1,\ldots,i+m+1} &= \frac{x_{i+1,\ldots,i+m+1} - x_{i,i+1,\ldots,i+m}}{t_{i+m+1} - t_i} \\ &= \frac{\frac{\Delta^m x_{i+1}}{m!h^m} - \frac{\Delta^m x_i}{m!h^m}}{(m+1)h} = \frac{\Delta^{m+1} x_i}{(m+1)!h^{m+1}}. \end{aligned}$$

پس حکم برای هر k طبیعی برقرار است. □

قضیه ۹.۳ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن)** *چندجمله‌ای درون‌یاب x در نقاط هم‌فاصله $t_0, t_1, \ldots, t_n$ به صورت زیر است*

$$p(t) = x_0 + \theta \Delta x_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 x_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n x_0 = x_0 + \sum_{l=1}^{n}\binom{\theta}{l}\Delta^l x_0,$$

که در آن $\theta = \frac{t-t_0}{h}$ و برای هر l در $\mathbb{N}$ و هر θ در $\mathbb{R}$ داریم

$$\binom{\theta}{l} = \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-l+1)}{l!}.$$

برهان. چون $t - t_0 = \theta h$ آن‌گاه $t - t_k = t - (t_0 + kh) = (\theta - k)h$. چندجمله‌ای درون‌یاب با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به صورت زیر بیان می‌شود

$$p(t) = x_0 + x_{01}(t-t_0) + x_{012}(t-t_0)(t-t_1) + \cdots + x_{01\ldots n}(t-t_0)\cdots(t-t_{n-1}),$$

و به کمک لم ۱.۳ می‌توان نوشت

$$p(t) = x_0 + \theta h \frac{\Delta x_0}{h} + \theta(\theta-1)h^2 \frac{\Delta^2 x_0}{2! h^2} + \cdots + \theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)h^n \frac{\Delta^n x_0}{n! h^n},$$

و یا

$$p(t) = x_0 + \theta \Delta x_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 x_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n x_0.$$

□

نتیجه ۱.۹.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم‌فاصله $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$ به صورت زیر بیان می‌شود*

$$p(t) = x_i + \theta \Delta x_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 x_i + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k x_i,$$

که در آن $\theta = \frac{t-t_i}{h}$.

قضیه ۱۰.۳ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن)** *چندجمله‌ای درون‌یاب x در نقاط هم‌فاصله $t_0, t_1, \ldots, t_n$ به صورت زیر است*

$$p(t) = x_n + \theta \nabla x_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 x_n + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n x_n = x_n + \sum_{l=1}^{n}\binom{\theta+l-1}{l}\nabla^l x_n,$$

که در آن $\theta = \frac{t-t_n}{h}$.

برهان. چندجمله‌ای درون‌یاب که با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به دست آمد، به صورت پیشرو بیان شده است. می‌توان نشان داد که شکل پسرو آن به صورت زیر است!؟

$$p(t) = x_n + x_{n,n-1}(t-t_n) + x_{n,n-1,n-2}(t-t_n)(t-t_{n-1}) + \cdots$$
$$+ x_{n,n-1,\ldots,1,0}(t-t_n)\cdots(t-t_1).$$

با استفاده از لم ۱.۳، مشابه اثبات قضیه قبل به نتیجه می‌رسیم. □

نتیجه ۱.۱۰.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم‌فاصله $t_{i-k}, t_{i-k+1}, \ldots, t_i$ به صورت زیر قابل بیان است*

$$p(t) = x_i + \theta\nabla x_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 x_i + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+k-1)}{k!}\nabla^k x_i, \qquad \theta = \frac{t-t_i}{h}.$$

تذکر ۴.۳ *در عمل هنگام استفاده از نتایج ۱.۹.۳ و ۱.۱۰.۳، این سوال مطرح می‌شود که کدام انتخاب (پیشرو یا پسرو، انتخاب t_i و درجه چندجمله‌ای (k)) مناسب‌تر است؟ در پاسخ باید توجه داشت که t_i را چنان انتخاب می‌کنیم که $\theta = \frac{t-t_i}{h}$ (که در آن t نقطه‌ای است که می‌خواهیم درون‌یابی کنیم) کوچک باشد. اگر t به ابتدای جدول نزدیک باشد به صورت پیشرو و اگر t به انتهای جدول نزدیک باشد به صورت پسرو عمل می‌کنیم. برای پرهیز از افزایش حجم محاسبات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب را بی‌جهت افزایش نمی‌دهیم؛ البته این مطلب بستگی به h دارد (برای h کوچک درون‌یابی خطی (درجه یک) نیز تقریب‌های خوبی به دست می‌دهد).*

مثال ۱۸.۳ *با توجه به جدول داده‌شده مطلوب است مقدار* $\sin(5^\circ)$، $\sin(25^\circ)$ و $\sin(45^\circ)$.

t_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
$\sin(t_i)$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

ابتدا جدولی به صورت زیر می‌سازیم

t_i	x_i	Δx_i	$\Delta^2 x_i$	$\Delta^3 x_i$	$\Delta^4 x_i$	$\Delta^5 x_i$
۰	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰	۰/۱۷۳۶		−۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		−۰/۰۰۵۲		
۲۰	۰/۳۴۲۰		−۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		−۰/۰۰۴۸		۰
۳۰	۰/۵		−۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		−۰/۰۰۴۴		
۴۰	۰/۶۴۲۸		−۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰	۰/۷۶۶۰					
t_i	x_i	∇x_i	$\nabla^2 x_i$	$\nabla^3 x_i$	$\nabla^4 x_i$	$\nabla^5 x_i$

برای درون‌یابی در $t = ۵^\circ$، *با انتخاب* $t_\circ = \circ^\circ$ *داریم* $\theta = \frac{t - t_\circ}{h} = \frac{۵^\circ - \circ^\circ}{۱\circ^\circ} = \frac{۱}{۲}$. *به کمک نتیجه*۳.۹.۱ *داریم*

$$\sin(۵^\circ) \simeq x_\circ + \theta\Delta x_\circ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ x_\circ + \cdots + \frac{\theta(\theta-۱)\cdots(\theta-۵+۱)}{۵!}\Delta^۵ x_\circ,$$

که پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۵^\circ)$ *به صورت زیر به دست می‌آیند*

مقدار تقریبی	k*(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)*
$\circ$	$\circ$
$\circ + \circ/\circ۸۶۸ = \circ/\circ۸۶۸$	۱
$\circ + \circ/\circ۸۶۸ + \circ/\circ\circ\circ۶ = \circ/\circ۸۷۴$	۲
$\circ + \circ/\circ۸۶۸ + \circ/\circ\circ\circ۶ - \circ/\circ\circ\circ۳ = \circ/\circ۸۷۱$	۳
$\circ + \circ/\circ۸۶۸ + \circ/\circ\circ\circ۶ - \circ/\circ\circ\circ۳ + \circ/\circ\circ\circ\circ = \circ/\circ۸۷۱$	۴
$\circ + \circ/\circ۸۶۸ + \circ/\circ\circ\circ۶ - \circ/\circ\circ\circ۳ + \circ/\circ\circ\circ\circ - \circ = \circ/\circ۸۷۱$	۵

برای درون‌یابی در $t = ۴۵^\circ$، *با انتخاب* $t_۴ = ۴\circ^\circ$ *داریم* $\theta = \frac{t - t_۴}{h} = \frac{۴۵^\circ - ۴\circ^\circ}{۱\circ^\circ} = \frac{۱}{۲}$. *به کمک لم*۳.۱۰.۱ *داریم*

$$\sin(۴۵^\circ) \simeq x_۴ + \theta\nabla x_۴ + \frac{\theta(\theta+۱)}{۲!}\nabla^۲ x_۴ + \cdots + \frac{\theta(\theta+۱)\cdots(\theta+۴-۱)}{۴!}\nabla^۴ x_۴,$$

که پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۴۵^\circ)$ *به صورت زیر به دست می‌آیند*

مقدار تقریبی	k*(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)*
$\circ/۶۴۲۸$	$\circ$
$\circ/۶۴۲۸ + \circ/\circ۷۱۴ = \circ/۷۱۴۲$	۱
$\circ/۶۴۲۸ + \circ/\circ۷۱۴ - \circ/\circ\circ۵۷ = \circ/۷\circ۸۵$	۲
$\circ/۶۴۲۸ + \circ/\circ۷۱۴ - \circ/\circ\circ۵۷ - \circ/\circ\circ۱۵ = \circ/۷\circ۷\circ$	۳
$\circ/۶۴۲۸ + \circ/\circ۷۱۴ - \circ/\circ\circ۵۷ - \circ/\circ\circ۱۵ + \circ/\circ\circ\circ۱ = \circ/۷\circ۷۱$	۴

برای درون‌یابی در $t = ۲۵^\circ$ *اگر از* $t_۲ = ۲\circ^\circ$ *به صورت پیشرو استفاده کنیم آن‌گاه* $\theta = \frac{t - t_۲}{h} = \frac{۲۵^\circ - ۲\circ^\circ}{۱\circ^\circ} = \frac{۱}{۲}$. *به کمک نتیجه*۳.۹.۱ *داریم* $\sin(۲۵^\circ) \simeq x_۲ + \theta\Delta x_۲ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ x_۲ + \frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳ x_۲$ *که پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی* $\sin(۲۵^\circ)$ *به صورت زیر به دست می‌آیند*

مقدار تقریبی	k*(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)*
$\circ/۳۴۲\circ$	$\circ$
$\circ/۳۴۲\circ + \circ/\circ۷۹\circ = \circ/۴۲۱\circ$	۱
$\circ/۳۴۲\circ + \circ/\circ۷۹\circ + \circ/\circ\circ۱۹ = \circ/۴۲۲۹$	۲
$\circ/۳۴۲\circ + \circ/\circ۷۹\circ + \circ/\circ\circ۱۹ - \circ/\circ\circ\circ۳ = \circ/۴۲۲۶$	۳

و اگر برای درون‌یابی در $t = ۲۵^\circ$ *از* $t_۳ = ۳\circ^\circ$ *به صورت پسرو استفاده کنیم آن‌گاه* $\theta = \frac{t - t_۳}{h} = \frac{۲۵^\circ - ۳\circ^\circ}{۱\circ^\circ} = -\frac{۱}{۲}$. *به*

کمک نتیجه۳.۱۰.۱ داریم

$$\sin(۲۵^\circ) \simeq x_۳ + \theta\nabla x_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)}{۲!}\nabla^۲ x_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)(\theta+۲)}{۳!}\nabla^۳ x_۳,$$

که پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۲۵^\circ)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی
۰	۰/۵۰۰۰
۱	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ = ۰/۴۲۱۰
۲	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ = ۰/۴۲۲۳
۳	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ + ۰/۰۰۰۳ = ۰/۴۲۲۶

△

تذکر ۵.۳ *ممکن است چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو (پسرو) نیوتن برای درون‌یابی x زمانی که t در اواسط جدول قرار دارد مناسب نباشد، زیرا از تمام اطلاعات جدول استفاده نمی‌شود. در این صورت بهتر است چندجمله‌ای تفاضل مرکزی مورد استفاده قرار گیرد.*

تعریف ۱۵.۳ *عملگر تفاضل مرکزی که با δ نمایش داده می‌شود به صورت $\delta = E^{\frac{۱}{۲}} - E^{-\frac{۱}{۲}}$ بیان می‌شود. بنابراین $\delta x_i = x_{i+\frac{۱}{۲}} - x_{i-\frac{۱}{۲}}$ و برای هر k طبیعی تعریف می‌کنیم $\delta^{k+۱}x_i = \delta^k x_{i+\frac{۱}{۲}} - \delta^k x_{i-\frac{۱}{۲}}$؛ به عنوان مثال داریم*

$$\delta^۲ x_i = \delta x_{i+\frac{۱}{۲}} - \delta x_{i-\frac{۱}{۲}} = (x_{i+۱} - x_i) - (x_i - x_{i-۱}) = x_{i+۱} - ۲x_i + x_{i-۱}.$$

همچنین عملگر مقدار میانگین که با μ نمایش داده می‌شود به صورت $\mu = \frac{۱}{۲}(E^{\frac{۱}{۲}} + E^{-\frac{۱}{۲}})$ بیان می‌شود. بنابراین $\mu x_i = \frac{۱}{۲}(x_{i+\frac{۱}{۲}} + x_{i-\frac{۱}{۲}})$.

تمرین ۵.۳ *نشان دهید اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی i داریم*

$$x_{i,i+۱,\ldots,i+k} = \frac{\delta^k x_{i+\frac{k}{۲}}}{k!h^k}.$$

برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب مرکزی، فرض کنید نقاطی هم‌فاصله در اختیار داریم. $t_۰$ را نقطه‌ای نزدیک به t (در اواسط جدول) انتخاب کرده و نقاط واقع در بالای $t_۰$ را با $t_{-۱}, t_{-۲}, \ldots$ و نقاط واقع در پایین آن را با $t_۱, t_۲, \ldots$ اندیس‌گذاری می‌کنیم (به جدول ۲.۳ نگاه کنید). اگر نقاط را به صورت $t_۰, t_۱, t_{-۱}, t_۲, t_{-۲}, \ldots$ در نظر گرفته و چندجمله‌ای درون‌یاب را به کمک روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن بنویسیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p(t) = {} & x_۰ + (t-t_۰)x_{۰,۱} + (t-t_۰)(t-t_۱)x_{۰,۱,-۱} + \\ & (t-t_۰)(t-t_۱)(t-t_{-۱})x_{۰,۱,-۱,۲} + \\ & (t-t_۰)(t-t_۱)(t-t_{-۱})(t-t_۲)x_{۰,۱,-۱,۲,-۲} + \cdots . \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

t_i	x_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم
t_{-2}	x_{-2}				
		$\delta x_{-\frac{3}{2}}$			
t_{-1}	x_{-1}		$\delta^2 x_{-1}$		
		$\delta x_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 x_{-\frac{1}{2}}$	
t_0	x_0		$\delta^2 x_0$		$\delta^4 x_0$
		$\delta x_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 x_{\frac{1}{2}}$	
t_1	x_1		$\delta^2 x_1$		
		$\delta x_{\frac{3}{2}}$			
t_2	x_2				

جدول ۲.۳: جدول تفاضلات مرکزی

تفاضلات با مرتبه زوج را می‌توان به صورت $x_{-p,\dots,0,\dots,p}$ در نظر گرفت و با فرض $i=-p$ و $i+k=p$ و به کمک تمرین قبل داریم

$$x_{-p,\dots,0,\dots,p} = \frac{\delta^{2p} x_0}{(2p)!h^{2p}},$$

و به طور مشابه برای تفاضلات با مرتبه فرد خواهیم داشت

$$x_{-p,\dots,0,\dots,p,p+1} = \frac{\delta^{2p+1} x_{\frac{1}{2}}}{(2p+1)!h^{2p+1}},$$

و

$$x_{-p-1,-p,\dots,0,\dots,p} = \frac{\delta^{2p+1} x_{\frac{-1}{2}}}{(2p+1)!h^{2p+1}}.$$

پس از جای‌گذاری در (۴.۳) و با فرض $\theta = \frac{t-t_0}{h}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p(t) = x_0 + \tfrac{\theta}{1!}\delta x_{\frac{1}{2}} + \tfrac{\theta(\theta-1)}{2!}\delta^2 x_0 + \tfrac{\theta(\theta-1)(\theta+1)}{3!}\delta^3 x_{\frac{1}{2}} + \\ \tfrac{\theta(\theta-1)(\theta+1)(\theta-2)}{4!}\delta^4 x_0 + \cdots. \end{aligned} \tag{5.3}$$

این رابطه بیان‌گر روش درون‌یابی پیشرو گاوس است. به طور مشابه، اگر نقاط را به صورت $t_0, t_{-1}, t_1, t_{-2}, t_2, \dots$ در نظر گرفته و چندجمله‌ای درون‌یاب را به کمک روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن بنویسیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p(t) = x_0 + \tfrac{\theta}{1!}\delta x_{-\frac{1}{2}} + \tfrac{\theta(\theta+1)}{2!}\delta^2 x_0 + \tfrac{\theta(\theta+1)(\theta-1)}{3!}\delta^3 x_{-\frac{1}{2}} + \\ \tfrac{\theta(\theta+1)(\theta-1)(\theta+2)}{4!}\delta^4 x_0 + \cdots \end{aligned} \tag{6.3}$$

که به درون‌یاب پسرو گاوس معروف است. با میانگین گرفتن از روابط (۵.۳) و (۶.۳) رابطه زیر به دست می‌آید

$$p(t) = x_0 + \frac{\theta}{1!}\left(\frac{\delta x_{-\frac{1}{2}} + \delta x_{\frac{1}{2}}}{2}\right) + \frac{\theta^2}{2!}\delta^2 x_0 + \frac{\theta(\theta^2-1)}{3!}\left(\frac{\delta^3 x_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 x_{\frac{1}{2}}}{2}\right) + \frac{\theta^2(\theta^2-1)}{4!}\delta^4 x_0 + \cdots,$$

که به درون‌یاب استرلینگ معروف است و می‌توان آن را به صورت زیر نیز بازنویسی کرد

$$p(t) = x_\circ + \theta\mu\delta x_\circ + \frac{\theta^۲}{۲!}\delta^۲ x_\circ + \frac{\theta(\theta^۲-۱)}{۳!}\mu\delta^۳ x_\circ + \frac{\theta^۲(\theta^۲-۱)}{۴!}\delta^۴ x_\circ + \cdots.$$

مثال ۱۹.۳ *تابع x مقادیر ۰٫۴۷۹۴۳، ۰٫۶۴۴۲۲، ۰٫۷۸۳۳۳، ۰٫۸۹۱۲۱، ۰٫۹۶۳۶۵ و ۰٫۹۹۷۴۹ را به ترتیب در نقاط ۰٫۵، ۰٫۷، ۰٫۹، ۱٫۱، ۱٫۳ و ۱٫۵ به خود می‌گیرد. مطلوب است تقریبی برای مقدار $x(۱٫۰۸)$.*
ابتدا جدول تفاضلات ۳.۳ را می‌سازیم. سپس با انتخاب $t_\circ = ۱٫۱$ داریم $\theta = \frac{t-t_\circ}{h} = \frac{۱٫۰۸-۱٫۱}{۰٫۲} = -۰٫۱$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$x(۱٫۰۸) \simeq ۰٫۸۹۱۲۱ + \frac{-۰٫۱}{۱!}\left(\frac{۰٫۱۰۷۸۸+۰٫۰۷۲۳۵}{۲}\right) + \frac{(-۰٫۱)^۲}{۲!}(-۰٫۰۳۵۵۳) + \frac{-۰٫۱((-۰٫۱)^۲-۱)}{۳!}\left(\frac{-۰٫۰۰۴۳۰-۰٫۰۰۲۸۹}{۲}\right) + \frac{(-۰٫۱)^۲((-۰٫۱)^۲-۱)}{۴!}(۰٫۰۰۱۴۱),$$

و بنابراین

$$x(۱٫۰۸) \simeq ۰٫۸۹۱۲۱ - ۰٫۰۰۹۰۱ - ۰٫۰۰۰۱۸ - ۰٫۰۰۰۰۶ - ۰٫۰۰۰۰۰۰۶ = ۰٫۸۸۱۹۵۹۴.$$

پس با دقت $۴S$ خواهیم داشت $x(۱٫۰۸) \simeq ۰٫۸۸۲۰$. △

t_i	x_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم	مرتبه پنجم
۰٫۵	۰٫۴۷۹۴۳					
		۰٫۱۶۴۷۹				
۰٫۷	۰٫۶۴۴۲۲		−۰٫۰۲۵۶۸			
		۰٫۱۳۹۱۱		−۰٫۰۰۵۵۵		
۰٫۹	۰٫۷۸۳۳۳		−۰٫۰۳۱۲۳		۰٫۰۰۱۲۵	
		۰٫۱۰۷۸۸		−۰٫۰۰۴۳۰		۰٫۰۰۰۱۶
۱٫۱	۰٫۸۹۱۲۱		−۰٫۰۳۵۵۳		۰٫۰۰۱۴۱	
		۰٫۰۷۲۳۵		−۰٫۰۰۲۸۹		
۱٫۳	۰٫۹۶۳۵۶		−۰٫۰۳۸۴۲			
		۰٫۰۳۳۹۳				
۱٫۵	۰٫۹۹۷۴۹					

جدول ۳.۳: جدول تفاضلات متناهی

تذکر ۶.۳ *اگر در داده‌های اولیه یعنی $x(t_\circ),\dots,x(t_n)$ خطایی به اندازه ε وجود داشته باشد، ممکن است در ستون بعدی جدول تفاضلات خطایی به انداره ۲ε، در ستون بعدی خطایی به اندازه ۴ε و به همین صورت رشد خطا خواهیم داشت. بنابراین هنگام استفاده از جدول‌های تفاضلی، بهتر است تا آنجا که امکان دارد داده‌ها را با دقت بیشتری وارد کنیم.*

۵.۳.۳ خطای چندجمله‌ای درون‌یاب

در این زیربخش خطای چندجمله‌ای درون‌یاب بررسی می‌شود و به کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف[۲۱] کرانی کمینه برای آن به دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۳ *فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع x در نقاط متمایز $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ باشد. اگر $x \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه به ازای هر t در $[a,b]$ عدد $\xi(t)$ در (a,b) چنان وجود دارد که*

$$x(t) = p(t) + \frac{x^{n+1}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-t_0)\cdots(t-t_n).$$

برهان. اگر به ازای مقداری از i داشته باشیم $t = t_i$، چون $p(t_i) = x(t_i)$ آن‌گاه رابطه داده‌شده به ازای هر $\xi(t_i)$ در (a,b) برقرار است. حال فرض کنید برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $t \neq t_i$. برای هر s در $[a,b]$ تابع $g(s)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(s) = x(s) - p(s) - [x(t) - p(t)]\frac{(s-t_0)\cdots(s-t_n)}{(t-t_0)\cdots(t-t_n)} = x(s) - p(s) - [x(t)-p(t)]\prod_{k=0}^{n}\frac{s-t_k}{t-t_k}.$$

واضح است که $g \in C^{n+1}[a,b]$ زیرا $p \in C^{\infty}[a,b]$ و $x \in C^{n+1}[a,b]$ و به ازای $i = 0, 1, \ldots n$ داریم

$$g(t_i) = x(t_i) - p(t_i) - [x(t)-p(t)]\prod_{k=0}^{n}\frac{t_i-t_k}{t-t_k} = 0 - [x(t)-p(t)] \times 0 = 0.$$

همین‌طور

$$g(t) = x(t) - p(t) - [x(t)-p(t)]\prod_{k=0}^{n}\frac{t-t_k}{t-t_k} = x(t) - p(t) - [x(t)-p(t)] = 0.$$

یعنی g در $n+2$ نقطه $t, t_0, t_1, \ldots, t_n$ صفر می‌شود و بنابر تعمیم قضیه رل، $\xi(t)$ در $[a,b]$ چنان یافت می‌شود که $g^{(n+1)}(\xi(t)) = 0$، پس

$$0 = g^{(n+1)}(\xi(t)) = x^{(n+1)}(\xi(t)) - p^{(n+1)}(\xi(t)) - [x(t)-p(t)] \times \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\Big(\prod_{k=0}^{n}\frac{s-t_k}{t-t_k}\Big)\Big|_{s=\xi(t)}.$$

اما p یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است و بنابراین مشتق مرتبه $n+1$ آن صفر است و از طرف دیگر

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{s-t_k}{t-t_k} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)}t^{n+1} + (\text{جملاتی با درجه کمتر یا برابر } n \text{ نسبت به } s).$$

بنابراین

$$\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\Big(\prod_{k=0}^{n}\frac{s-t_k}{t-t_k}\Big)\Big|_{s=\xi(t)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)}.$$

---
[۲۱] Chebyshev

در نتیجه

$$۰ = x^{(n+۱)}(\xi(t)) - ۰ - [x(t) - p(t)] \times \frac{(n+۱)!}{\prod_{k=۰}^{n}(t-t_k)},$$

و یا

$$x(t) = p(t) + \frac{x^{(n+۱)}(\xi(t))}{(n+۱)!}\prod_{k=۰}^{n}(t-t_k).$$

□

تذکر ۷.۳ *بنابر شرایط قضیه ۱۱.۳، به ازای هر t در $[a,b]$ داریم*

$$|x(t) - p(t)| \leq \frac{M_۱ M_۲}{(n+۱)!},$$

که در آن

$$M_۱ = \max_{a\leq t\leq b}|x^{(n+۱)}(t)|, \qquad M_۲ = \max_{a\leq t\leq b}|(t-t_۰)(t-t_۱)\cdots(t-t_n)|.$$

واضح است که برای nهای بزرگ، یافتن $M_۲$ مقدور نیست و در چنین حالتی از کران بدبینانه $M_۲ \leq (b-a)^{n+۱}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰.۳ *چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{۸})$ را در نقاط $t_۰ = ۰, t_۱ = ۲, t_۲ = ۳$ به دست آورده و سپس کران بالای خطای درون‌یابی را تعیین نموده و آن را با خطای واقعی در نقطه $t = ۱$ مقایسه کنید (محاسبات را با سه رقم اعشار دنبال کنید).*

t_i	x_i	$x_{i,i+۱}$	$x_{۰۱۲}$
۰	۱		
		$\frac{۰/۷۰۷-۱}{۲-۰} = -۰/۱۴۷$	
۲	۰/۷۰۷		$\frac{-۰/۳۲۴+۰/۱۴۷}{۳-۰} = -۰/۰۵۹$
		$\frac{۰/۳۸۳-۰/۷۰۷}{۳-۲} = -۰/۳۲۴$	
۳	۰/۳۸۳		

با توجه به جدول تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن، چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است

$$p(t) = ۱ - ۰/۱۴۷t - ۰/۰۵۹t(t-۲) = ۱ - ۰/۰۲۹t - ۰/۰۵۹t^۲.$$

چون $n = ۲$ و $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{۸})$ داریم

$$x'(t) = -\frac{\pi}{۸}\sin(\frac{\pi t}{۸}), \qquad x''(t) = -\frac{\pi^۲}{۶۴}\cos(\frac{\pi t}{۸}), \qquad x'''(t) = \frac{\pi^۳}{۵۱۲}\sin(\frac{\pi t}{۸}).$$

بنابراین

$$M_۱ = \max_{۰\leq t\leq ۳}|x'''(t)| = \frac{\pi^۳}{۵۱۲}|\sin(\frac{\pi t}{۸})| \leq \frac{\pi^۳}{۵۱۲} \simeq ۰/۰۶۱,$$

و

$$M_۲ = \max_{۰\le t\le ۳} |t(t-۲)(t-۳)| \le ۳^۳ = ۲۷.$$

در نتیجه

$$|x(t)-p(t)| \le \frac{M_۱ M_۲}{۶} \le \frac{۰/۰۶۱ \times ۲۷}{۶} = ۰/۲۷۳.$$

اما این کران بالای خطا بدبینانه است و در ادامه کران بالای واقع‌بینانه‌تری به دست می‌آوریم. چون تابع $\sin(\frac{\pi t}{۸})$ *در بازه* $[۰,۳]$ *صعودی است!؟ پس داریم*

$$M_۱ = \max_{۰\le t\le ۳} |x'''(t)| = \frac{\pi^۳}{۵۱۲} \max_{۰\le t\le ۳} |\sin(\frac{\pi t}{۸})| \le \frac{\pi^۳}{۵۱۲} |\sin(\frac{۳\pi}{۸})| \simeq ۰/۰۵۶.$$

هم‌چنین با فرض $g(t) = t(t-۲)(t-۳)$ *داریم* $g'(t) = ۳t^۲ - ۱۰t + ۶$ *و بنابراین از* $g'(t) = ۰$ *نتیجه می‌شود* $t_۱ = \frac{۵+\sqrt{۷}}{۳}$ *و* $t_۲ = \frac{۵-\sqrt{۷}}{۳}$*. حال چون* $t_۱$ *و* $t_۲$ *به بازه* $[۰,۳]$ *تعلق دارند، خواهیم داشت*

$$M_۲ = \max\{|g(۰)|, |g(t_۱)|, |g(t_۲)|, |g(۳)|\} = \{۰, ۲/۱۱۳, ۰/۶۳۱, ۰\} = ۲/۱۱۳.$$

پس

$$|x(t)-p(t)| \le \frac{M_۱ M_۲}{۶} \le \frac{۰/۰۵۶ \times ۲/۱۱۳}{۶} = ۰/۰۲۰.$$

از طرفی داریم

$$|x(۱)-p(۱)| = |۰/۹۲۴ - ۰/۹۱۲| = ۰/۰۱۲ < ۰/۰۲۰ < ۰/۲۷۳.$$

△

تذکر ۸.۳ *اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب x در نقاط $t_۰, t_۱, \ldots, t_n$ با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن باشد، چندجمله‌ای درون‌یاب x در نقاط $t_۰, \ldots, t_n, t_{n+۱}$ که در آن $t_{n+۱} = t$، با همان روش به صورت زیر به دست می‌آید*

$$q(t) = p(t) + x_{۰۱\cdots n,n+۱}(t-t_۰)\cdots(t-t_n),$$

و چون $x(t) = q(t)$ *بنابراین*

$$x(t) = p(t) + x_{۰۱\cdots n,n+۱}(t-t_۰)\cdots(t-t_n),$$

که با مقایسه با قضیه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب خواهیم داشت

$$x_{۰\cdots n,n+۱} = \frac{x^{(n+۱)}(\xi_t)}{(n+۱)!},$$

و می‌توان نوشت

$$x_{۰\cdots n} = \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!},$$

و در حالت خاص برای $t_۰ = t_۱ = t$ *داریم* $x_{۰۱} = x'(t)$.

تمرین ۶.۳ *نشان دهید تحت شرایط قضیه ۱۱.۳ اگر نقاط هم‌فاصله باشند (با اندازه گام h) آن‌گاه به ازای هر t در $[a,b]$ داریم*

$$|x(t)-p(t)| \le \frac{M_{۱}h^{n+۱}}{۴(n+۱)}.$$

فرض کنید $x \in C[a,b]$ و $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ و A یک ماتریس پایین‌مثلثی باشد که درایه‌های ناصفر سطر k آن، k نقطه(گره) درون‌یابی در بازه $[a,b]$ باشد. به عبارتی A متناظر با یک افراز قابل‌تظریف از نقاط درون‌یابی به صورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} t_{۱۱} & & & \\ t_{۲۱} & t_{۲۲} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n۱} & t_{n۲} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

بنابراین متناظر با درایه‌های سطر k ماتریس A یک چندجمله‌ای درون‌یاب درجه $k-۱$ برای x وجود دارد که با $\pi_k x$ (به وضوح به x و نقاط وابسته است) نمایش داده می‌شود. تعریف می‌کنیم

$$E_{n,\infty}(A) = \|x-\pi_n x\|_\infty, \qquad n=۱,\ldots,$$

و فرض می‌کنیم $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ چندجمله‌ای بهترین تقریب[۲۲] (به مفهوم نرم بینهایت) برای x باشد، یعنی

$$E_n^* = \|x-p_n^*\|_\infty \le \|x-q_n\|_\infty, \qquad \forall q_n \in \mathbb{P}_n.$$

گزاره ۳.۳ *داریم*

$$E_n^* \le E_{n,\infty}(A) \le (۱+\Lambda_n(A))E_n^*, \qquad n=۱,\ldots,$$

که در آن $\Lambda_n(A)$ به ثابت لبگ[۲۳] A معروف است که به صورت $\Lambda_n(A) = \left\|\sum_{j=۱}^n |L_{j,n}(t)|\right\|_\infty$ تعریف می‌شود که در آن $L_{j,n}$ چندجمله‌ای jام لاگرانژ متناظر با گره‌های سطر nام ماتریس A است.

برهان. به مرجع [۲۰] مراجعه کنید. □

چون E_n^* به A وابسته نیست، تمام اطلاعاتی که به اثر انتخاب A روی $E_{n,\infty}(A)$ بستگی دارد، در $\Lambda_n(A)$ نهفته است. از طرفی یک ماتریس A^* چنان وجود دارد که $\Lambda_n(A^*)$ کمترین مقدار است ولی تعیین آن چندان ساده نیست. به عنوان نمونه ثابت می‌شود اگر در درونیابی روی $[-۱,۱]$ از صفرهای چبیشف استفاده شود، ثابت لبگ نظیر خیلی کوچک خواهد بود. اثبات گزاره‌های زیر در مرجع [۲۰] آمده است.

گزاره ۴.۳ *برای هر A، ثابت C چنان وجود دارد که*

$$\Lambda_n(A) > \frac{۲}{\pi}\log(n+۱) - C, \qquad n=۰,۱,\ldots.$$

بنابراین $\Lambda_n(A)\to\infty$ *هرگاه* $n\to\infty$.

[۲۲] در فصل بعد با جزئیات بررسی می‌کنیم.
[۲۳] Lebesque

گزاره ۵.۳ *برای هر A، تابع پیوسته x چنان وجود دارد که دنباله $\{\pi_n x\}$ به طور یکنواخت به x همگرا نیست.*

گزاره ۶.۳ *برای هر تابع پیوسته x، یک افراز A چنان وجود دارد که دنباله $\{\pi_n x\}$ به طور یکنواخت به x همگرا می‌شود.*

با توجه به خطای چندجمله‌ای درون‌یاب چنین به نظر می‌رسد که با افزایش n، خطای چندجمله‌ای درون‌یاب کاهش یابد و چندجمله‌ای درون‌یاب p به تابع x همگرا شود (نزدیک شود) ولی مثال زیر این مطلب را نقض می‌کند.

مثال ۲۱.۳ *(پدیده رانگ) برای تابع $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$، در صفحه 78 مرجع [۸] ثابت شده است که اگر A متناظر با نقاط هم‌فاصله روی بازه $[-a, a]$ باشد، $\{\pi_n x\}$ به دست آمده از روش لاگرانژ فقط روی بازه $[-3/63000, 3/63000]$ همگرا است و خارج این بازه واگرا می‌شود، در حالی که $x \in C^\infty[-a, a]$. ولی اگر A متناظر با صفرهای چبیشف باشد، همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود (برنامه* runge.nb *بررسی شود).* $\triangle$

در ادامه قصد داریم نشان دهیم که اگر انتخاب نقاط درون‌یابی در اختیار ما باشد، انتخاب مناسبی از $t_0, \dots, t_n$ وجود دارد که $\max |(t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n)|$ را کمینه می‌کند. این مسئله به مسئله اقل اکثر[۲۴] معروف است.

تعریف ۱۶.۳ چندجمله‌ای‌های چبیشف *در بازه $[-1, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند*

$$T_n : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1],$$
$$T_n(t) = \cos(n \cos^{-1}(t)).$$

اگر قرار دهیم $t = \cos(\theta)$ آن‌گاه $cos^{-1}(t) = \theta$ و بنابراین $T_n(t) = \cos(n\theta)$ و بنابر اتحاد مثلثاتی

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta),$$

خواهیم داشت

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \qquad n \geq 1.$$

به کمک این رابطه بازگشتی مرتبه دو و مقادیر آغازی $T_0(t) = 1$ و $T_1(t) = t$ می‌توان T_nها را تعیین نمود. به عنوان مثال داریم

$$T_2(t) = 2tT_1(t) - T_0(t) = 2t^2 - 1, \qquad T_3(t) = 2tT_2(t) - T_1(t) = 4t^3 - 3t.$$

تمرین ۷.۳ به کمک استقرا نشان دهید

آ) T_n یک چندجمله‌ای درجه n با ضریب جمله پیشرو 2^{n-1} است؛

ب) اگر n زوج باشد T_n تابعی زوج و اگر n فرد باشد، T_n تابعی فرد است.

در ادامه قصد داریم ریشه‌ها و نقاط برگشت (اکسترمم‌های درونی) تابع T_n را به دست آوریم. اگر $T_n(t) = \cos(n\theta) = 0$ آن‌گاه $n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و یا $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ که در آن $k = 0, 1, \dots, n-1$. در نتیجه ریشه‌های T_n عبارتند از

$$t_k = \cos(\theta) = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

[۲۴] Minimax problem

حال چون

$$\frac{d}{dt}T_n(t) = \frac{d}{d\theta}\cos(n\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},$$

بنابراین در نقاط برگشت باید داشته باشیم $\sin(n\theta) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $\theta = \frac{k\pi}{n}$ که در آن $k = ۱, \dots, n-۱$ و بلافاصله می‌توان نقاط برگشت T_n را به صورت زیر معرفی کرد

$$z_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = ۱, \dots, n-۱.$$

هم‌چنین در نقاط انتهایی $t = -۱$ و $t = ۱$ یا $\theta = \pi$ و $\theta = ۰$، مقادیر T_n به ترتیب عبارتند از $(-۱)^n$ و ۱. بنابراین T_n در $n+۱$ نقطه زیر اکسترمم‌های خود را اختیار می‌کند

$$z_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = ۰, ۱, \dots, n.$$

قضیه ۱۲.۳ *اگر $t_۰, \dots, t_n$ صفرهای $T_{n+۱}$ اختیار شوند آن‌گاه $\max_{-۱\le t\le ۱}|(t-t_۰)(t-t_۱)\cdots(t-t_n)|$ کمترین مقدار را نسبت به انتخاب‌های مختلف $t_۰, \dots, t_n$ خواهد داشت که برابر $\frac{۱}{۲^n}$ است.*

برهان. به عنوان تمرین. □

نتیجه ۱.۱۲.۳ *اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب مبتنی بر صفرهای $T_{n+۱}$ برای تابع x باشد (نقاط درون‌یابی صفرهای $T_{n+۱}$ انتخاب شوند) آن‌گاه داریم*

$$\max_{-۱\le t\le ۱}|x(t)-p(t)| \le \frac{M_۱}{۲^n(n+۱)!}.$$

بنابراین برای آن دسته از توابع که $M_۱$ آن‌ها با سرعتی کمتر از $۲^n(n+۱)!$ افزایش یابد همگرایی چندجمله‌ای درون‌یاب به تابع x تضمین شده است.

مثال ۲۲.۳ *برنامه* chebyshev.nb *بررسی شود.* △

۴.۳ درون‌یابی هرمیت

ابتدا در ارتباط با چندجمله‌ای درون‌یاب به دو نکته زیر باید توجه داشت

- چندجمله‌ای درون‌یاب خارج بازه $[a,b]$ (بازه‌ای که نقاط درون‌یابی به آن تعلق دارند) قابل اعتماد نیست. به عبارتی چندجمله‌ای درون‌یاب برای برون‌یابی توصیه نمی‌شود. زیرا هرچه از دو سر بازه دور می‌شویم عبارت

$$\psi_n(t) = (t-t_۰)\cdots(t-t_n),$$

  در جمله خطای درون‌یابی، به شدت افزایش می‌یابد،

- نباید از چندجمله‌ای درون‌یاب در بازه $[a,b]$ انتظار زیادی داشت زیرا ممکن است از رفتار تابع به خوبی پیروی نکند.

یک راه‌کار برای آن که چندجمله‌ای درون‌یاب در بازه $[a,b]$ از رفتار تابع بیشتر پیروی کند، استفاده از درون‌یابی هرمیت است. فرض کنید از تابع x در نقاط $t_0 < \cdots < t_m$ اطلاعات زیر در دسترس باشد

$$x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n_0-1)}, \dots, x(t_m), x'(t_m), \dots, x^{(n_m-1)}(t_m).$$

در روش هرمیت می‌خواهیم چندجمله‌ای $p_n \in \mathbb{P}_n$ که در آن $n+1 = \sum_{i=0}^{m} n_i$ را به گونه‌ای بیابیم که

$$p_n^{(k)}(t_i) = x^{(k)}(t_i) = x_i^{(k)}, \qquad k = 0, \dots, n_i - 1, \qquad i = 0, \dots, m. \tag{7.3}$$

اگر برای هر i داشته باشیم $n_i = 1$ واضح است که با مسئله درون‌یابی چندجمله‌ای مواجه هستیم و بنابراین فرض می‌کنیم برای حداقل یک اندیس i داشته باشیم $n_i > 1$. اگرچه وجود و یکتایی چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت به کمک دترمینان گرام اثبات می‌شود ولی می‌توان به طور مستقیم نیز آن را بررسی کرد.

قضیه ۱۳.۳ *چندجمله‌ای یکتای $p_n \in \mathbb{P}_n$ چنان وجود دارد که در شرایط (۷.۳) صدق کند.*

برهان. فرض کنید دو چندجمله‌ای $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ صادق در شرایط (۷.۳) وجود داشته باشند. به وضوح برای چندجمله‌ای $q(t) = p_1(t) - p_2(t)$ داریم

$$q^{(k)}(t_i) = 0, \qquad k = 0, \dots, n_i - 1, \qquad i = 0, \dots, m.$$

یعنی q یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است که (با در نظر گرفتن ریشه‌های چندگانه) $n+1$ ریشه دارد و بنابر قضیه اساسی جبر باید داشته باشیم $q = 0$. وجود چندجمله‌ای p_n نتیجه مستقیمی از یکتایی است!؟ □

۱.۴.۳ روش لاگرانژ تعمیم‌یافته

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ تعمیم‌یافته که با $L_{ik}(t)$ نمایش داده می‌شوند چندجمله‌ای‌های درجه n هستند که برای $i = 0, 1, \dots, m$ به صورت زیر ساخته می‌شوند

$$\begin{cases} L_{i,n_i-1}(t) = l_{i,n_i-1}(t), \\ L_{ik}(t) = l_{ik}(t) - \displaystyle\sum_{r=k+1}^{n_i-1} l_{ik}^{(r)}(t_i) L_{ir}(t), \qquad k = n_i - 2, n_i - 3, \dots, 1, 0, \end{cases}$$

که در آن

$$l_{ik}(t) = \frac{(t-t_i)^k}{k!} \prod_{i \neq j = 0}^{m} \left(\frac{t - t_j}{t_i - t_j} \right)^{n_j}, \qquad k = 0, 1, \dots, n_i - 1, \qquad i = 0, 1, \dots, m.$$

گزاره ۷.۳ *چندجمله‌ای‌های لاگرانژ تعمیم‌یافته مستقل خطی هستند و* $L_{ik}^{(r)}(t_j) = \begin{cases} 1, & i = j \ \& \ k = r, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$.

برهان. به کمک استقراء نشان دهید. □

حال چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت که به صورت

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n_i-1} x_i^{(k)} L_{ik}(t),$$

ساخته می‌شود، به وضوح در شرایط درون‌یابی (۷.۳) صدق می‌کند. همان نکاتی که در مورد روش لاگرانژ بیان شد را می‌توان در مورد این روش نیز بیان کرد.

پروژه ۱.۳ *روش لاگرانژ معمولی و تعمیم‌یافته.*

۲.۴.۳ روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن تعمیم‌یافته

در اینجا کافی است تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن را به صورتی تعمیم دهیم که برای نقاطی که متمایز نباشند نیز قابل محاسبه باشد. به همین منظور نقاط $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ را به صورت زیر گسترش می‌دهیم

$$s_0 = t_0, s_1 = t_0, \ldots, s_{n_0-1} = t_0, \ldots, s_{n-n_m+1} = t_m, s_{n-n_m+2} = t_m, \ldots, s_n = t_m.$$

حال اگر $s_i = s_{i+1} = \cdots = s_{i+k} = t_l$، تعریف می‌کنیم

$$x_{i,i+1,\ldots,i+k} = \frac{1}{k!} x_l^{(k)},$$

زیرا به کمک چندجمله‌ای تیلور داریم

$$p_{i,i+1,\ldots,i+k}(t) = \sum_{r=0}^{k} \frac{x_l^{(r)}}{r!} (t-t_l)^r,$$

و اگر $s_i < s_{i+k}$، قرار می‌دهیم

$$x_{i,i+1,\ldots,i+k} = \frac{x_{i+1,\ldots,i+k} - x_{i,i+1,\ldots,i+k-1}}{s_{i+k} - s_i}.$$

در پایان کافی است بنویسیم

$$p(t) = a_0 + a_1(t-s_0) + a_2(t-s_0)(t-s_1) + \cdots + a_n(t-s_0)\cdots(t-s_n),$$

که در آن برای $k = 0, \ldots, n$ داریم $a_k = x_{0,1,\ldots,k}$. در عمل کافی است جدول تفاضلات تقسیم‌شده تعمیم‌یافته را ساخته، ضرایب را از آن استخراج کرده و چندجمله‌ای درونیاب را بسازیم.

تمرین ۸.۳ *نشان دهید p در شرایط درون‌یابی صدق می‌کند.*

به مثال زیر از مرجع [۲۲] توجه کنید.

$s_0 = 0$	$x(s_0) = -1$				
		$x_{01} = -2^*$			
$s_1 = 0$	$x(s_1) = -1$		$x_{012} = 3$		
		$x_{12} = 1$		$x_{0123} = 6$	
$s_2 = 1$	$x(s_2) = 0$		$x_{123} = 9$		$x_{01234} = 5$
		$x_{23} = 10^*$		$x_{1234} = 11$	
$s_3 = 1$	$x(s_3) = 0$		$x_{234} = 20^*$		
		$x_{34} = 10^*$			
$s_4 = 1$	$x(s_4) = 0$				

جدول ۴.۳: جدول تفاضلات تقسیم‌شده تعمیم‌یافته

مثال ۲۳.۳ *فرض کنید از تابع x در نقاط $t_0 = 0$ و $t_1 = 1$ داده‌های زیر در دسترس باشد*

$$x_0^{(0)} = -1, \qquad x_0^{(1)} = -2, \qquad x_1^{(0)} = 0, \qquad x_1^{(1)} = 10, \qquad x_1^{(2)} = 40.$$

بنابراین $m = 1$، $n_0 = 2$ و $n_1 = 3$. پس از استخراج ضرایب قطر اصلی از جدول ۴.۳ خواهیم داشت

$$p(t) = -1 - 2t + 3t^2 + 6t^2(t-1) + 5t^2(t-1)^2.$$

در جدول ۴.۳ اعدادی که بالاندیس $*$ دارند، به کمک تفاضلات تقسیم‌شده تعمیم‌یافته به دست آمده‌اند. $\triangle$

قضیه ۱۴.۳ *فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت تابع x در نقاط متمایز $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ باشد. اگر $x \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه به ازای هر t در $[a,b]$ عدد $\xi(t)$ در (a,b) چنان وجود دارد که*

$$x(t) = p(t) + \frac{x^{n+1}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n_0}\cdots(t-t_m)^{n_m}.$$

برهان. بنابر قضیه رل اگر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر g دارای n صفر در یک بازه باشد، g' در آن بازه حداقل $n-1$ صفر دارد. به علاوه اگر k تا از این صفرها دارای تکرر بزرگتر از یک باشند، آنگاه g' حداقل $n-1+k$ صفر در آن بازه دارد. هر صفر مرتبه k از g یک صفر مرتبه $k-1$ برای g' است (بررسی این موارد به عنوان تمرین). حال فرض کنید $t \neq t_i$، (چه در غیر این صورت حکم به سادگی نتیجه می‌شود) و تابع

$$w(s) = x(s) - p(s) - (s-t_0)^{n_0}\cdots(s-t_m)^{n_m}\frac{x(t)-p(t)}{(t-t_0)^{n_0}\cdots(t-t_m)^{n_m}},$$

را در نظر بگیرید. به وضوح w یک صفر در $s = t$ و یک صفر مرتبه n_i در t_i دارد. فرض کنید ν_i بیانگر تعداد صفرهای $w^{(i)}$ در بازه $[a,b]$ باشد و تعریف کنید

$$r(i,j) = \begin{cases} 1, & j > i, \\ 0, & j \le i. \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= m+2,\\
\nu_1 &= \nu_0 - 1 + r(1,n_0) + \cdots + r(1,n_m),\\
\nu_2 &= \nu_1 - 1 + r(2,n_0) + \cdots + r(2,n_m) = m + r(1,n_0) + r(2,n_0) + \cdots + r(1,n_m) + r(2,n_m),\\
&\vdots\\
\nu_{n+1} &= m + 1 - n + r(1,n_0) + \cdots + r(n+1,n_0) + \cdots + r(1,n_m) + \cdots + r(n+1,n_m).
\end{aligned}$$

چون $r(1,n_i) + \cdots + r(n+1,n_i) = n_i - 1$ بنابراین $\nu_{n+1} = 1$ و در نتیجه $w^{(n+1)}$ دارای حداقل یک صفر مانند ξ در بازه $[a,b]$ است. پس می‌توان نوشت

$$0 = w^{(n+1)}(\xi) = x^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{x(t)-p(t)}{(t-t_0)^{n_0}\cdots(t-t_m)^{n_m}},$$

و از آنجا حکم به سادگی نتیجه می‌شود. □

تذکر ۹.۳ *اگر $x \in C^\infty[a,b]$ و مشتقات x روی بازه $[a,b]$ به طور یکنواخت کراندار باشند یعنی ثابت مثبت κ چنان وجود داشته باشد که*

$$\sup_j \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(j)}(t)\right| \le \kappa < \infty,$$

آنگاه بنابر قضیه ۱۴.۳ داریم $p(t) \to x(t)$ هرگاه $m \to \infty$. مثال نقض رانگ در این شرط صدق نمی‌کند.

پروژه ۲.۳ *تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن معمولی و تفاضلات تقسیم‌شده تعمیم‌یافته.*

۵.۳ درون‌یابی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای

در درون‌یابی سراسری[۲۵] که تاکنون بررسی کردیم، یک چندجمله‌ای بر اساس داده‌ها می‌سازیم و از آن برای درون‌یابی در کل (سراسر) بازه استفاده می‌کنیم. درجه چندجمله‌ای درون‌یاب حداکثر یک واحد کمتر از تعداد داده‌ها است که ممکن است عدد بزرگی باشد. این نوع درون‌یابی دو ایراد دارد

- نوسانات چندجمله‌ای درون‌یاب با افزایش درجه زیاد می‌شود،
- یک تغییر موضعی کوچک، باعث تغییر چندجمله‌ای درون‌یاب در سراسر بازه می‌شود.

بنابراین بهتر است به سراغ درون‌یابی موضعی[۲۶] برویم که یک نوع پرکاربرد آن درون‌یابی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای[۲۷] است که در آن قصد داریم یک تابع چندضابطه‌ای بسازیم که هر ضابطه آن یک چندجمله‌ای است. به همین منظور ابتدا یک افراز $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ برای بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم که در آن برای سادگی فرض می‌کنیم

[۲۵] Global interpolation
[۲۶] Local interpolation
[۲۷] Piecewise polynomials

برای $i = ۰, \ldots, m-۱$ داشته باشیم $h = t_{i+۱} - t_i$ (البته لزومی ندارد نقاط هم‌فاصله باشند). اگر بخواهیم یک تابع قطعه‌ای چندجمله‌ای درجه دو بسازیم که درون‌یابی برای تابع x در نقاط افراز باشد، ابتدا چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ درجه دو را روی بازه $[t_i, t_{i+۱}]$، به صورت

$$p_{۲,i}(t) = \frac{۲}{h^۲}\left((t-t_{i+\frac{۱}{۲}})(t-t_{i+۱})x(t_i) - ۲(t-t_i)(t-t_{i+۱})x(t_{i+\frac{۱}{۲}}) + (t-t_i)(t-t_{i+\frac{۱}{۲}})x(t_{i+۱})\right),$$

ساخته و قرار می‌دهیم

$$q_{m,۲}(t) = \begin{cases} p_{۲,۰}(t), & t \in [t_۰, t_۱], \\ p_{۲,۱}(t), & t \in [t_۱, t_۲], \\ \vdots & \vdots \\ p_{۲,m-۱}(t), & t \in [t_{m-۱}, t_m]. \end{cases}$$

حال اگر $x \in C^۳[a,b]$ و $M_۳ = \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(۳)}(t)\right|$ آنگاه

$$|x(t) - q_{m,۲}(t)| \le \frac{h^۳}{۶} M_۳ = \frac{(b-a)^۳}{۶m^۳} M_۳.$$

البته این کران بدبینانه است و می‌توان آن را به کرانی واقع‌بینانه تبدیل کرد (به عنوان تمرین). به هر حال با همگرایی مرتبه سه داریم

$$\lim_{m\to\infty} \|x - q_{m,۲}\|_\infty = ۰.$$

به همین ترتیب می‌توان یک تابع قطعه‌ای چندجمله‌ای (حداکثر) درجه k ساخت و اگر $x \in C^{k+۱}[a,b]$ همگرایی مرتبه $k+۱$ داریم و می‌توان نشان داد

$$\|x - q_{m,k}\|_\infty \le C \left\|x^{(k+۱)}\right\|_\infty h^{k+۱}.$$

اگرچه با افزایش k مرتبه همگرایی افزایش می‌یابد ولی متاسفانه $q_{m,k}$ همواری ضعیفی دارد و در واقع فقط پیوسته است و در گره‌ها (t_iها) مشتق‌پذیر نیست. اگر بخواهیم درون‌یاب هموارتری داشته باشیم، به سراغ درون‌یابی هرمیت موضعی می‌رویم. به همین منظور فرض کنید H_Δ^ν فضای توابع $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ با دو ویژگی زیر باشد

- $\phi \in C^{\nu-۱}[a,b]$،
- تحدید ϕ روی بازه $I_i := [t_i, t_{i+۱}]$، یک چندجمله‌ای حداکثر درجه $۲\nu - ۱$ است.

حال کافی است چندجمله‌ای $p_i = \phi|_{I_i}$ را به کمک درون‌یابی هرمیت به گونه‌ای بسازیم که داشته باشیم

$$p_i^{(k)}(t_i) = x^{(k)}(t_i), \qquad p_i^{(k)}(t_{i+۱}) = x^{(k)}(t_{i+۱}), \qquad k = ۰, \ldots, \nu-۱,$$

و اگر $x \in C^{۲\nu}[a,b]$، خواهیم داشت

$$|x(t) - p_i(t)| \le \frac{|(t-t_i)^\nu (t-t_{i+۱})^\nu|}{(۲\nu)!} \max_{t\in I_i} \left|x^{(۲\nu)}(t)\right|,$$

و از آنجا می‌توان نوشت (بررسی کنید)

$$\|x-\phi\|_\infty \le \frac{1}{2^{2\nu}(2\nu)!}\left\|x^{(2\nu)}\right\|_\infty \|\Delta\|^{2\nu},$$

که در آن $\|\Delta\| = \max_i |t_{i+1}-t_i|$ به ظرافت[28] افراز معروف است و بنابراین همگرایی مرتبه 2ν داریم. به علاوه ثابت می‌شود[۱۶]

$$\left\|x^{(k)}-\phi^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{1}{2^{2\nu-2k}(2\nu-2k)!}\left\|x^{(2\nu)}\right\|_\infty \|\Delta\|^{2\nu-k}, \qquad k=0,\ldots,\nu-1.$$

در این درون‌یابی، اگرچه مشکل همواری درون‌یاب تا حدودی برطرف می‌شود ولی به اطلاعات اضافی نیاز داریم که ممکن است در دسترس نباشند و همچنین تابع درون‌یاب قطعه‌ای چندجمله‌ای درجه فرد است که شاید مطلوب نباشد.

پروژه ۳.۳ *درون‌یابی موضعی معمولی و هرمیت.*

۶.۳ درون‌یابی هموار اسپلاین

توابع قطعه‌ای چندجمله‌ای از ابتدای قرن ۱۹ مورد مطالعه قرار گرفتند ولی واژه اسپلاین[29] نخستین بار در سال ۱۹۴۶ توسط شونبرگ[30] معرفی شد. اسپلاین یک میله مفتولی نازک است که طراحان به کمک آن به طراحی می‌پردازند. در بعضی مراجع مانند [۱۶]، یک تابع قطعه‌ای چندجمله‌ای را اسپلاین می‌نامند.

تعریف ۱۷.۳ یک *تابع اسپلاین درجه* k *(*$k \in \mathbb{N}_0$*) در نقاط* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *تابعی مانند* s *است به قسمی که* s *در هر زیربازه* $[t_j, t_{j+1}]$ *یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر* k *باشد و* s *در* $[t_0, t_n]$ *تا مشتق مرتبه* $(k-1)$*ام پیوسته داشته باشد.*

شکل ۲.۳: اسپلاین‌های درجه صفر و یک

همان طور که در شکل ۲.۳ مشاهده می‌شود، اسپلاین درجه صفر پیوسته نیست حال آن که اسپلاین درجه یک پیوسته است ولی در گره‌ها شکستگی دارد (مشتق‌پذیر نیست). با درون‌یابی به وسیله اسپلاین درجه یک (قطعه‌ای خطی) در درس‌های مقدماتی آشنا می‌شویم (محاسبه دستی توابع مثلثاتی و لگاریتمی از روی جدول) و به دلیل سادگی در عمل

[28] Fineness
[29] Spline
[30] Schuenberg

زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که همواری کمی مورد نظر باشد. یکی از متداول‌ترین روش‌های درون‌یابی به صورت موضعی، درون‌یابی به وسیله اسپلاین درجه سه (مکعبی) است زیرا این نوع توابع تا مشتق مرتبه دوم پیوسته دارند و این نوع همواری برای بسیاری از کاربردها مانند پردازش سیگنال، حل عددی معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی و غیره کافی است.

تعریف ۱۸.۳ *فرض کنید تابع x بر $[a,b]$ تعریف شده باشد و $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ افرازی از $[a,b]$ باشد. درون‌یاب اسپلاین مکعبی x تابعی مانند s با ضابطه*

$$s(t)=\begin{cases} s_0(t), & t\in[t_0,t_1],\\ s_1(t), & t\in[t_1,t_2],\\ \vdots & \vdots\\ s_{n-1}(t), & t\in[t_{n-1},t_n],\end{cases}$$

است به طوری که برای $j=0,1,\ldots,n$ داشته باشیم $s(t_j)=x(t_j)$، s_j برای $j=0,1,\ldots,n-1$ یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر سه باشد، برای $j=0,1,\ldots,n-2$ داشته باشیم

$$s_{j+1}(t_{j+1})=s_j(t_{j+1}),\quad s'_{j+1}(t_{j+1})=s'_j(t_{j+1}),\quad s''_{j+1}(t_{j+1})=s''_j(t_{j+1})$$

و یا $s''(t_0)=s''(t_n)=0$ (شرط مرزی آزاد یا طبیعی) یا $s'(t_0)=x'(t_0)$ و $s'(t_n)=x'(t_n)$ (شرط مرزی مقید) و یا برای $k=0,1,2$ داشته باشیم $s^{(k)}(t_0)=s^{(k)}(t_n)$ (شرط مرزی متناوب).

تذکر ۱۰.۳ *برای تعیین s باید $4n$ مجهول (ضرایب چندجمله‌ای‌های درجه سه s_j) مشخص شوند که به کمک شرایط آـپ، $n+1+3(n-1)=4n-2$ معادله به دست می‌آید و واضح است که به دو شرط مرزی نیاز داریم تا اسپلاین درونیاب مشخص شود.*

تعریف ۱۹.۳ *فضای توابع مربع انتگرال‌پذیر روی بازه $[a,b]$ که با $L^2[a,b]$ نمایش داده می‌شود شامل توابعی مانند x است که $\int_a^b |x(t)|^2\,dt$ موجود (متناهی) باشد[31]. این فضا با ضرب داخلی $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$، یک فضای ضرب داخلی است و نرم القایی از آن عبارت است از $\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^2\right)^{1/2}$.*

تعریف ۲۰.۳ *برای عدد صحیح مثبت m منظور از $\mathcal{K}^m[a,b]$ فضای توابع $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ است که $x^{(m-1)}$ پیوسته مطلق [32] باشد و $x^{(m)}\in L^2[a,b]$.* همچنین

$$\mathcal{K}_p^m[a,b]=\{x\in\mathcal{K}^m[a,b]|\ x^{(k)}(a)=x^{(k)}(b),\quad k=0,1,\ldots,m-1\},$$

زیرفضایی از $\mathcal{K}^m[a,b]$ متشکل از توابع متناوب با دوره تناوب $b-a$ است.

---

[31] البته انتگرال به مفهوم لبگ است ولی می‌توان همان مفهوم ریمان را در نظر گرفت.

[32] Absolutely continuous

تعریف ۲۱.۳ *تابع* $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ *روی بازه* $[a,b]$ *پیوسته مطلق نامیده می‌شود هرگاه برای هر* $\epsilon>0$، $\delta>0$ *چنان وجود داشته باشد که برای هر مجموعه متناهی* $[a_i,b_i]$ *با* $a\le a_1<b_1<\dots<a_n<b_n\le b$ *که* $\sum_i|b_i-a_i|<\delta$ *داشته باشیم* $\sum_i|x(b_i)-x(a_i)|<\epsilon$.

تذکر ۱۱.۳ *قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع پیوسته مطلق برقرار است و می‌توان قاعده انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای چنین توابعی به کار برد. به علاوه تابعی که بر* $[a,b]$ *پیوسته مطلق باشد تقریبا همه جای* $[a,b]$ *مشتق‌پذیر است (یعنی در تعداد متناهی یا شمارش‌پذیر از نقاط مشتق‌پذیر نیست). از مشتق‌پذیری یک تابع، پیوستگی لیپشیتس و از آن پیوستگی مطلق و از آن پیوستگی تابع نتیجه می‌شود. از پیوستگی مطلق، پیوستگی یکنواخت و از آن پیوستگی تابع نتیجه می‌شود.*

اسپلاین مکعبی s به فضای $\mathcal{K}^3[a,b]$ تعلق دارد حال آن که اسپلاین مکعبی درونیاب که در شرط مرزی تناوبی صدق کند به فضای $\mathcal{K}_p^3[a,b]$ متعلق است. برای تابع $x\in\mathcal{K}^2[a,b]$ یک نیم‌نرم به صورت $\|x\|^2=\int_a^b|x''(t)|^2\,dt$ تعریف می‌شود زیرا $\|x\|=0$ برای توابعی به صورت $x(t)=ct+d$ برقرار است که لزوما صفر نیستند.

قرارداد ۱.۳ *منظور از* Δ *افراز* $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ *از بازه* $[a,b]$ *است و برای* $i=0,\dots,n-1$ *قرار می‌دهیم* $h_{i+1}=t_{i+1}-t_i$.

قضیه ۱۵.۳ (برابری هولادی[۳۳]) **اگر** $x\in\mathcal{K}^2[a,b]$ **و** s **اسپلاین مکعبی روی نقاط افراز** Δ **باشد، آنگاه**

$$\|x-s\|^2=\|x\|^2-\|s\|^2-2\left((x'(t)-s'(t))s''(t)|_a^b-\sum_{i=1}^{n}(x(t)-s(t))s'''(t)|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}\right).$$

برهان. بنابر تعریف داریم

$$\|x-s\|^2=\int_a^b|x''(t)-s''(t)|^2\,dt=\|x\|^2-2\int_a^b x''(t)s''(t)dt+\|s\|^2=\|x\|^2-2\int_a^b(x''(t)-s''(t))s''(t)dt-\|s\|^2.$$

به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء برای $i=1,\dots,n$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(x''(t)-s''(t))s''(t)dt &= (x'(t)-s'(t))s''(t)|_{t_{i-1}}^{t_i}-\int_{t_{i-1}}^{t_i}(x'(t)-s'(t))s'''(t)dt\\ &= (x'(t)-s'(t))s''(t)|_{t_{i-1}}^{t_i}-(x(t)-s(t))s'''(t)|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}+\int_{t_{i-1}}^{t_i}(x(t)-s(t))s^{(4)}(t)dt.\end{aligned}$$

حال با جمع بستن روی i، چون روی $[t_{i-1},t_i]$ داریم $s^{(4)}=0$ و x'، s' و s'' روی $[a,b]$ پیوسته‌اند، حکم نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۱۶.۳ *اگر* $x\in\mathcal{K}^2[a,b]$ *و* s *اسپلاین مکعبی درونیاب* x *روی نقاط افراز* Δ *باشد، آنگاه*

$$\|x-s\|^2=\|x\|^2-\|s\|^2,$$

به شرط آن که یکی از شرایط مرزی برقرار باشد (برای شرط مرزی تناوبی باید داشته باشیم $x\in\mathcal{K}_p^2[a,b]$*). در هر یک از حالات* s *یکتا است.*

---
[۳۳] Holladay

برهان. برای هر یک از شرایط مرزی داریم

$$(x'(t)-s'(t))s''(t)|_a^b-\sum_{i=1}^{n}(x(t)-s(t))s'''(t)|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}=0,$$

و بنابر برابری هولادی قسمت اول قضیه ثابت می‌شود. برای اثبات یکتایی، فرض کنید s_1 و s_2 دو اسپلاین مکعبی درونیاب x روی نقاط افراز Δ باشند. اگر s_1 نقش x و s_2 نقش s را بازی کند، بنابر قسمت اول می‌توان نوشت

$$\|s_1-s_2\|^2=\|s_1\|^2-\|s_2\|^2 .$$

حال با تعویض نقش s_1 و s_2 داریم

$$\|s_2-s_1\|^2=\|s_2\|^2-\|s_1\|^2 .$$

با جمع دو رابطه اخیر خواهیم داشت

$$0=\|s_1-s_2\|^2=\int_a^b|s_1''(t)-s_2''(t)|^2\,dt,$$

و از آنجا داریم $s_1''(t)=s_2''(t)$ و در نتیجه $s_1(t)-s_2(t)=ct+d$. اما چون $s_1(a)=s_2(a)$ و $s_1(b)=s_2(b)$ به وضوح $c=d=0$. □

تذکر ۱۲.۳ *بنابر قضیه ۱۶.۳ داریم $\|s\|\le\|x\|$. این نابرابری به ویژگی کمینگی اسپلاین مکعبی درونیاب معروف است. یعنی $\min_{x\in X\cap\mathcal{I}}\|x\|=\|s\|$ که در آن $\mathcal{I}$ مجموعه تمام درونیاب‌های x روی نقاط Δ است و*

$$X=\begin{cases}\{g\in\mathcal{K}^2[a,b]|g''(a)=g''(b)=0\}, & \text{آزاد}\\ \mathcal{K}_p^2[a,b], & \text{تناوبی}\\ \{g\in\mathcal{K}^2[a,b]|g'(a)=x'(a)\ \&\ g'(b)=x'(b)\}. & \text{مقید}\end{cases}$$

انتگرال معرف نیم‌نرم، متناسب با انرژی پتانسیل است و ویژگی کمینگی اسپلاین مکعبی درونیاب دلالت بر پایداری بیشتر آن نسبت به سایر درونیاب‌ها دارد. از طرف دیگر با توجه به تعریف انحنای g روی $[a,b]$ یعنی $g''(t)(1+(g'(t))^2)^{-3/2}$، اگر $|g'(t)|$ در مقایسه با یک کوچک باشد، $\|g\|$ تقریبی برای انحنای کلی (سراسری) g روی $[a,b]$ است و به این مفهوم اسپلاین مکعبی درونیاب با شرط مرزی طبیعی هموارترین (پایدارترین) تابعی است که x را روی نقاط Δ درونیابی می‌کند.

برای ساختن اسپلاین مکعبی درونیاب s، ابتدا گشتاورهای $M_j=s''(t_j)$ را در نظر گرفته و در ادامه نشان می‌دهیم اگر این گشتاورها معلوم باشند به سادگی می‌توان s را ساخت و همچنین برای تعیین M_jها باید یک دستگاه خطی سه‌قطری را حل کرد. به وضوح داریم

$$s''(t)=M_j\frac{t_{j+1}-t}{h_{j+1}}+M_{j+1}\frac{t-t_j}{h_{j+1}},\qquad t\in[t_j,t_{j+1}],$$

و با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$s'(t) = -M_j \frac{(t_{j+1} - t)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(t - t_j)^2}{2h_{j+1}} + A_j,$$
$$s(t) = M_j \frac{(t_{j+1} - t)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(t - t_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(t - t_j) + B_j.$$

به کمک ویژگی درونیابی $s(t_j) = x_j$ و $s(t_{j+1}) = x_{j+1}$، می‌توان A_j و B_j را به صورت زیر به دست آورد

$$A_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j), \qquad B_j = x_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6},$$

و بنابراین اسپلاین به صورت زیر مشخص می‌شود

$$s(t) = \alpha_j + \beta_j(t - t_j) + \gamma_j(t - t_j)^2 + \delta_j(t - t_j)^3, \qquad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

که در آن

$$\alpha_j = x_j, \quad \beta_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1}, \quad \gamma_j = \frac{M_j}{2}, \qquad \delta_j = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}.$$

از طرفی داریم

$$s'(t) = -M_j \frac{(t_{j+1} - t)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(t - t_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j),$$

و چون

$$s'(t_j^-) = \frac{x_j - x_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{h_j}{6} M_{j-1},$$
$$s'(t_j^+) = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1},$$

بنابر پیوستگی s' خواهیم داشت

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{x_j - x_{j-1}}{h_j}, \qquad j = 1, \ldots, n-1. \qquad (8.3)$$

به کمک معادلات (۸.۳) و شرایط مرزی طبیعی و مقید داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

که در آن متناظر با شرایط طبیعی داریم

$$\lambda_0 = 0, \qquad d_0 = 0, \qquad \mu_n = 0, \qquad d_n = 0,$$

و متناظر با شرایط مقید خواهیم داشت

$$\lambda_0 = 1, \qquad d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{x_1 - x_0}{h_1} - x'_0\right), \qquad \mu_n = 1, \qquad d_n = \frac{6}{h_n}\left(x'_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{h_n}\right),$$

و به کمک معادلات (۸.۳) و شرایط مرزی متناوب داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\lambda_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n}, \qquad \mu_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n}, \qquad d_n = \frac{6}{h_1 + h_n}\left(\frac{x_1 - x_n}{h_1} - \frac{x_n - x_{n-1}}{h_n}\right), \qquad M_0 = M_n,$$

و برای هر سه شرط مرزی داریم

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \qquad \mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \qquad d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{x_j - x_{j-1}}{h_j}\right).$$

تذکر ۱۳.۳ *چون $\lambda_j, \mu_j \geq 0$ و $\lambda_j + \mu_j = 1$، به وضوح دستگاه‌های خطی به دست آمده غالب قطری سطری اکید بوده و M_jها با حل آنها به طور یکتا معین می‌شوند. دستگاه سه‌قطری (سه‌قطری با دو اختلال) به دست آمده به سادگی با روش توماس (همان روش حذف گاوسی تغییریافته با حجم عملیات $O(n)$) حل می‌شود.*

برای جزئیات بیشتر به بخش 2.4.2 مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

پروژه ۴.۳ *اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط طبیعی، اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط مقید و اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط تناوبی متناظر با داده‌های جدولی داده‌شده و رسم نمودار.*

پروژه ۵.۳ *اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط طبیعی، اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط مقید و اسپلاین مکعبی درونیاب با شرایط تناوبی متناظر با تابع داده‌شده و رسم نمودار.*

مثال ۲۴.۳ *برنامه* spline.nb *را بررسی کنید.* △

تمرین ۹.۳ *مقدارهای a، b و c را چنان بیابید که تابع زیر یک اسپلاین مکعبی در گره‌های ۰، ۱ و ۲ باشد.*

$$s(t) = \begin{cases} ۳ + t - ۹t^۲, & t \in [۰, ۱], \\ a + b(t-۱) + c(t-۱)^۲ + d(t-۱)^۳, & t \in [۱, ۲]. \end{cases}$$

تمرین ۱۰.۳ *اسپلاین مکعبی طبیعی و مقید متناظر با جدول زیر را به دست آورید.*

t_i	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	π
x_i	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰

فرض کنید s اسپلاین مکعبی درونیاب تابع x در نقاط افراز Δ صادق در شرایط مرزی مقید باشد، یعنی

$$s(t_j) = x(t_j), \quad j = ۰, \ldots, n, \qquad s'(a) = x'(a), \quad s'(b) = x'(b).$$

همان طور که مشاهده شد بردار گشتاورها یعنی $M = [M_۰ \ \cdots \ M_n]^T$ از حل دستگاه سه‌قطری $AM = d$ به دست می‌آید. با معرفی بردار $F = [x''(t_۰) \ \cdots \ x''(t_n)]^T$، قرار می‌دهیم $r = D - AF = A(M - F)$.

قضیه ۱۷.۳ *اگر $x \in C^۴[a,b]$ و $\|x^{(۴)}\|_\infty \le L$ آنگاه*

$$\|M - F\|_\infty \le \|r\|_\infty \le \frac{۳}{۴} L \|\Delta\|^۲ .$$

برهان. با توجه به تنظیمات دستگاه سه‌قطری متناظر با شرایط مرزی مقید داریم

$$r_۰ = d_۰ - ۲x''(t_۰) - \lambda_۰ x''(t_۱) = \frac{۶}{h_۱}\left(\frac{x_۱ - x_۰}{h_۱} - x'_۰\right) - ۲x''(t_۰) - x''(t_۱).$$

به کمک بسط تیلور $x_۱$ و $x''(t_۱)$ حول $t_۰$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} r_۰ = \frac{۶}{h_۱} & \left(x'(t_۰) + \frac{h_۱}{۲}x''(t_۰) + \frac{h_۱^۲}{۶}x'''(t_۰) + \frac{h_۱^۳}{۲۴}x^{(۴)}(\tau_۱) - x'(t_۰)\right) - ۲x''(t_۰) - \\ & \left(x''(t_۰) + h_۱ x'''(t_۰) + \frac{h_۱^۲}{۲}x^{(۴)}(\tau_۲)\right) = \frac{h_۱^۲}{۴}x^{(۴)}(\tau_۱) - \frac{h_۱^۲}{۲}x^{(۴)}(\tau_۲), \end{aligned}$$

که در آن $\tau_۱$ و $\tau_۲$ بین $t_۰$ و $t_۱$ قرار دارند. به وضوح $|r_۰| \le \frac{۳}{۴}L\|\Delta\|^۲$ و به طور مشابه برای $r_n = d_n - x''(t_{n-۱}) - ۲x''(t_n)$ داریم $|r_n| \le \frac{۳}{۴}L\|\Delta\|^۲$. حال برای $j = ۱, \ldots, n-۱$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} r_j = d_j - \mu_j x''(t_{j-۱}) - ۲x''(t_j) - \lambda_j x''(t_{j+۱}) = \quad & \frac{۶}{h_j + h_{j+۱}}\left(\frac{x_{j+۱} - x_j}{h_{j+۱}} - \frac{x_j - x_{j-۱}}{h_j}\right) - \\ & \frac{h_j}{h_j + h_{j+۱}}x''(t_{j-۱}) - ۲x''(t_j) - \frac{h_{j+۱}}{h_j + h_{j+۱}}x''(t_{j+۱}). \end{aligned}$$

به کمک بسط تیلور x_{j+1}، x_{j-1}، $x''(t_{j+1})$ و $x''(t_{j-1})$ حول t_j داریم

$$\begin{aligned} r_j = \frac{6}{h_j+h_{j+1}}\Big(\quad & x'(t_j) + \frac{h_{j+1}}{2}x''(t_j) + \frac{h_{j+1}^2}{6}x'''(t_j) + \frac{h_{j+1}^3}{24}x^{(4)}(\tau_1) - \\ & x'(t_j) + \frac{h_j}{2}x''(t_j) - \frac{h_j^2}{6}x'''(t_j) + \frac{h_j^3}{24}x^{(4)}(\tau_2)\Big) - \frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}\Big(\\ & x''(t_j) - h_j x'''(t_j) + \frac{h_j^2}{2}x^{(4)}(\tau_3)\Big) - 2x''(t_j) - \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}\Big(\\ & x''(t_j) - h_{j+1}x'''(t_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2}x^{(4)}(\tau_4)\Big), \end{aligned}$$

که در آن τ_i برای $i = 1,2,3,4$ بین t_{j-1} و t_{j+1} قرار دارد. پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$r_j = \frac{1}{h_j+h_{j+1}}\Big(\frac{h_{j+1}^3}{4}x^{(4)}(\tau_1) + \frac{h_j^3}{4}x^{(4)}(\tau_2) - \frac{h_j^3}{2}x^{(4)}(\tau_3) - \frac{h_{j+1}^3}{2}x^{(4)}(\tau_4)\Big),$$

و از آنجا داریم

$$|r_j| \le \frac{3}{4}L\frac{1}{h_j+h_{j+1}}(h_j^3 + h_{j+1}^3) \le \frac{3}{4}L\,\|\Delta\|^2 .$$

بنابراین با در نظر گرفتن تمام حالات داریم

$$\|r\|_\infty \le \frac{3}{4}L\,\|\Delta\|^2 ,$$

و چون $r = A(M-F)$ و A یک ماتریس سه‌قطری غالب قطری سطری اکید است، به سادگی می‌توان نشان داد $\|M-F\|_\infty \le \|r\|_\infty$ (بررسی کنید). □

قضیه ۱۸.۳ *فرض کنید $x \in C^4[a,b]$، $\left\|x^{(4)}\right\|_\infty \le L$ و ثابت K چنان وجود داشته باشد که*

$$\frac{\|\Delta\|}{t_{j+1}-t_j} \le K, \qquad j = 0,\ldots,n-1.$$

اگر s اسپلاین مکعبی درونیاب x در نقاط Δ و صادق در شرایط مرزی مقید باشد، آنگاه ضرایب $c_k \le 2$ مستقل از Δ چنان وجود دارند که برای $t \in [a,b]$ داریم

$$\left|x^{(k)}(t) - s^{(k)}(t)\right| \le \begin{cases} c_k L\,\|\Delta\|^{4-k}, & k = 0,1,2,\\ c_k LK\,\|\Delta\|, & k = 3.\end{cases}$$

برهان. ابتدا برای $k = 3$ و $t \in [t_{j-1}, t_j]$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} s'''(t) - x'''(t) = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} - x'''(t) = \quad & \frac{M_j - x''(t_j)}{h_j} - \frac{M_{j-1} - x''(t_{j-1})}{h_j} + \\ & \frac{x''(t_j) - x''(t) - (x''(t_{j-1}) - x''(t))}{h_j} - x'''(t). \end{aligned}$$

به کمک قضیه ۱۷.۳ و بسط تیلور حول t داریم

$$\begin{aligned}|s'''(t)- \quad x'''(t)| &\leq \frac{۳}{۲}L\frac{\|\Delta\|^{۲}}{h_j}+\frac{۱}{h_j}\Big|(t_j-t)x'''(t)+\frac{(t_j-t)^{۲}}{۲}x^{(۴)}(\tau_۱)-(t_{j-۱}-t)x'''(t)- \\ &\frac{(t_{j-۱}-t)^{۲}}{۲}x^{(۴)}(\tau_۲)-h_jx'''(t)\Big|\leq\frac{۳}{۲}L\frac{\|\Delta\|^{۲}}{h_j}+\frac{L}{۲}\frac{\|\Delta\|^{۲}}{h_j}=۲L\frac{\|\Delta\|^{۲}}{h_j}\leq ۲LK\|\Delta\|,\end{aligned} \qquad (۹.۳)$$

که در آن $\tau_۱$ و $\tau_۲$ بین $t_{j-۱}$ و t_j قرار دارند. برای هر $t\in(a,b)$ گره $t_j=t_j(t)$ چنان وجود دارد که $|t_j-t|\leq\frac{h_j}{۲}\leq\frac{\|\Delta\|}{۲}$. به کمک قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت

$$x''(t)-s''(t)=x''(t_j)-s''(t_j)+\int_{t_j}^{t}(x'''(t)-s'''(t))dt,$$

و به کمک (۹.۳) و قضیه ۱۷.۳ نتیجه می‌گیریم

$$|x''(t)-s''(t)|\leq\frac{۳}{۴}L\|\Delta\|^{۲}+\frac{۱}{۲}h_j\times ۲L\frac{\|\Delta\|^{۲}}{h_j}\leq\frac{۷}{۴}L\|\Delta\|^{۲}. \qquad (۱۰.۳)$$

با در نظر گرفتن گره‌های مرزی $\xi_۰=a$ و $\xi_{n+۱}=b$ به کمک قضیه رل نقاط $\xi_i\in(t_{i-۱},t_i)$ برای $i=۱,\ldots,n$ چنان وجود دارند که $x'(\xi_i)-s'(\xi_i)=۰$. حال برای هر $t\in(a,b)$ گره $\xi_j=\xi_j(t)$ چنان وجود دارد که $|\xi_j-t|\leq\|\Delta\|$. به کمک قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت

$$x'(t)-s'(t)=x'(\xi_j)-s'(\xi_j)+\int_{\xi_j}^{t}(x''(t)-s''(t))dt=\int_{\xi_j}^{t}(x''(t)-s''(t))dt,$$

و بنابر (۱۰.۳) نتیجه می‌گیریم

$$|x'(t)-s'(t)|\leq\frac{۷}{۴}L\|\Delta\|^{۲}\|\Delta\|=\frac{۷}{۴}L\|\Delta\|^{۳}. \qquad (۱۱.۳)$$

در پایان چون $x(t)-s(t)=\int_{t_j}^{t}(x'(t)-s'(t))dt$، بنابر (۱۱.۳) می‌توان نوشت

$$|x(t)-s(t)|\leq\frac{۷}{۴}L\|\Delta\|^{۳}\times\frac{۱}{۲}\|\Delta\|=\frac{۷}{۸}L\|\Delta\|^{۴}.$$

□

تذکر ۱۴.۳ *K کمیتی است که نشان می‌دهد چقدر افراز تا یک افراز یکنواخت فاصله دارد و همواره داریم $K\geq ۱$.*

تذکر ۱۵.۳ *ضرایب c_k توسط هال و همکاران در سال ۱۹۷۶ بهبود یافت که عبارتند از $c_۰=\frac{۵}{۳۸۴}$، $c_۱=\frac{۱}{۲۴}$، $c_۲=\frac{۳}{۸}$ و $c_۳=\frac{K+K^{-۱}}{۲}$ و ضرایب $c_۰$ و $c_۱$ بهینه هستند.*

تذکر ۱۶.۳ *اگر Δ_m بیانگر افراز قابل‌تظریف $a=t_۰^{(m)}<t_۱^{(m)}<\cdots<t_{n_m}^{(m)}=b$ و فرضیات قضیه ۱۸.۳ برقرار باشد، وقتی $\|\Delta_m\|\to ۰$، اسپلاین مکعبی درونیاب s و دو مشتق اول آن به x و دو مشتق اول آن همگرای یکنواخت هستند و به علاوه اگر $\sup_{m,j}\frac{\|\Delta_m\|}{\left|t_{j+۱}^{(m)}-t_j^{(m)}\right|}\leq\kappa\leq\infty$ آنگاه s''' با آن که ناپیوسته است به x''' همگرای یکنواخت است.*

۱.۶.۳ B-اسپلاین

در این بخش قصد داریم یک پایه برای فضای اسپلاین‌ها بسازیم.

تعریف ۲۲.۳ *B-اسپلاین*[۳۴] *نرمال‌شده درجه k در نقاط $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k+1}$ که با $B_{i,k+1}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$B_{i,k+1}(t) = (t_{i+k+1} - t_i) g_{i,i+1,\cdots,i+k+1},$$

که در آن

$$g(s) = (s-t)_+^k = \begin{cases} (s-t)^k, & t \leq s, \\ 0, & t > s, \end{cases}$$

و با جایگذاری تفاضل تقسیم‌شده خواهیم داشت

$$B_{i,k+1}(t) = (t_{i+k+1} - t_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(t_{j+i} - t)_+^k}{\prod_{j \neq l = 0}^{k+1} (t_{i+j} - t_{i+l})}.$$

به وضوح گره‌های فعال تابع $B_{i,k+1}$ عبارتند از $t_i, \ldots, t_{i+k+1}$ و تابع $B_{i,k+1}$ فقط روی بازه (t_i, t_{i+k+1}) ناصفر است یعنی تابعی محمل (تکیه‌گاه) فشرده[۳۵] است. برخی از ویژگی‌های مهم B-اسپلاین‌ها عبارتند از

- $B_{i,k+1}$ها یک افراز واحد تشکیل می‌دهند، یعنی $\sum_i B_{i,k+1}(t) = 1$،
- $B_{i,k+1}$ها توابعی نامنفی هستند، یعنی $B_{i,k+1}(t) \geq 0$،
- $\left|B_{i,k+1}^{(l)}(t_i)\right| = \left|B_{i,k+1}^{(l)}(t_{i+k+1})\right|, \qquad l = 0, \ldots, k-1$،
- $B_{i,k+1}$ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$B_{i,k+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k}(t), \qquad k \geq 1,$$

که در آن $B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$.

مثال ۲۵.۳ *B-اسپلاین مکعبی در گره‌های هم‌فاصله $t_0, \ldots, t_n$ با فاصله h به صورت زیر ساخته می‌شوند.* △

$$6h^3 B_{i,4}(t) = \begin{cases} (t-t_i)^3, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i+1}) + 3h(t - t_{i+1})^2 - 3(t - t_{i+1})^3, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ h^3 + 3h^2(t_{i+3} - t) + 3h(t_{i+3} - t)^2 - 3(t_{i+3} - t)^3, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}], \\ (t_{i+4} - t)^3, & t \in [t_{i+3}, t_{i+4}], \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

---

[۳۴] Bell-spline or Base-spline

[۳۵] Compact support

قضیه ۱۹.۳ *فرض کنید S بیانگر فضای اسپلاین‌های درجه k نظیر افراز Δ باشد. بعد S برابر $n+k$ است و*

$$S = \mathrm{Span}\{1, t, \ldots, t^k, (t-t_1)_+^k, \ldots, (t-t_{n-1})_+^k\}.$$

پایه بیان‌شده در این قضیه کارایی ندارد و در عمل هم منجر به تولید ماتریس‌های شبه‌واندرموند بدوضع می‌شود.

قضیه ۲۰.۳ *پایه‌ای که در عمل می‌توان برای S به کار برد به صورت زیر است*

$$S = \mathrm{Span}\{B_{-k,k}, B_{-k+1,k}, \ldots, B_{n-1,k}\}.$$

تذکر ۱۷.۳ *با توجه به قضیه ۲۰.۳ در عمل می‌توان برای ساختن یک اسپلاین درجه k، ابتدا نوشت $s(t) = \sum_{j=-k}^{n-1} \alpha_j B_{j,k}(t)$ سپس ضرایب α_j را به گونه‌ای یافت که s در شرایط درونیابی صدق کند. با توجه به محمل فشرده بودن B-اسپلاین‌ها در عمل با ماتریس‌های نواری مواجه می‌شویم.*

برای اثبات قضایا و جزئیات بیشتر به کتاب و مقالات دبور[۳۶] مراجعه کنید.

سمینار ۱.۳ *B-اسپلاین‌ها معرفی، کاربردها و پیاده‌سازی*

سمینار ۲.۳ *توابع پایه‌ای موجک[۳۷] معرفی، کاربردها و پیاده‌سازی*

سمینار ۳.۳ *توابع پایه شعاعی[۳۸] معرفی، کاربردها و پیاده‌سازی*

سمینار ۴.۳ *تقریب کمترین مربعات متحرک*[۳۹]

۷.۳ درونیابی گویا

از چندجمله‌ای درونیاب به عنوان تقریبی برای تابع x در نقطه t استفاده می‌شود و بیشتر مواقع این تقریب رضایت‌بخش است ولی اگر t به قطب یا نقطه تکین تابع x نزدیک باشد (مانند t نزدیک $\frac{\pi}{2}$ برای تابع $\tan t$) نتیجه تقریب بسیار بد است زیرا چندجمله‌ای‌ها رفتار مجانبی ندارند. در این مواقع بهتر است به جای درونیابی با چندجمله‌ای‌ها از توابع گویا استفاده کنیم که می‌توانند رفتار مجانبی از خود نشان دهند. به همین منظور یک تابع گویا به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\Phi_\nu^\mu(t) = \frac{p_\mu(t)}{q_\nu(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \cdots + a_\mu t^\mu}{b_0 + b_1 t + \cdots + b_\nu t^\nu}.$$

---

[۳۶] Conte de Boor

[۳۷] Wavelet

[۳۸] Radial basis functions

[۳۹] Moving least squares

(μ,ν) به زوج درجه تابع گویا معروف است. واضح است که اگر ۲ + $\mu+\nu$ ضریب $a_0,\dots,a_\mu,b_0,\dots,b_\nu$ معلوم باشند Φ^μ_ν معین می‌شود و برعکس اگر Φ^μ_ν معلوم باشد می‌توان ضرایب را بر حسب حداقل یک ضریب بیان کرد. به عنوان مثال $\Phi^1_1(t)=\frac{1+t}{1-t}$ دلالت بر آن دارد که $a_1=a_0$، $b_0=a_0$، $b_1=-a_0$ و $a_0\neq 0$.

تعریف ۲۳.۳ *مسئله یافتن Φ^μ_ν که در شرایط درونیابی*

$$\Phi^\mu_\nu(t_i)=x(t_i)=x_i, \qquad i=0,\dots,\mu+\nu,$$

به مسئله $A^{\mu,\nu}$ معروف است. به وضوح برای حل این مسئله لازم است ضرایب a_j,b_j در دستگاه همگن

$$p_\mu(t_i)-x_iq_\nu(t_i)=0 \to a_0+a_1t_i+\cdots+a_\mu t_i^\mu-x_i(b_0+b_1t_i+\cdots+b_\nu t_i^\nu)=0, \qquad i=0,\dots,\mu+\nu,$$

صدق کنند. این دستگاه را با $S^{\mu,\nu}$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که اگر $A^{\mu,\nu}$ جواب داشته باشد $S^{\mu,\nu}$ نیز جواب خواهد داشت. اما مسئله درونیابی گویا پیچیده‌تر از درونیابی چندجمله‌ای است.

مثال ۲۶.۳ *داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید.*

t_i	۰	۱	۲
x_i	۱	۲	۲

بنابر تعداد داده‌ها داریم ۲ = $\mu+\nu$ و از سه حالت ممکن فرض می‌کنیم ۱ = $\mu=\nu$. بنابراین دستگاه $S^{1,1}$ به صورت زیر است

$$\begin{cases} a_0-b_0=0\to b_0=a_0, \\ a_0+a_1-2(b_0+b_1)=0, \\ a_0+2a_1-2(b_0+2b_1)=0, \end{cases}$$

و از آنجا داریم $a_1-a_0-2b_1=0$ و $2a_1-a_0-4b_1=0$ که نتیجه می‌دهد $a_0=0$ و $a_1=2b_1$. پس $a_0=b_0=0$ و $a_1=2b_1$ جواب $S^{1,1}$ است و نظیر آن یک عبارت گویا به صورت $\Phi^1_1(t)=\frac{2t}{t}$ داریم که در $t=0$ منجر به $\frac{0}{0}$ می‌شود و پس از ساده‌سازی داریم $\tilde{\Phi}^1_1(t)=2$ که نقطه $(t_0,x_0)=(0,1)$ در آن صدق نمی‌کند و بنابراین جواب $A^{1,1}$ نیست. چون برای حل $A^{1,1}$ لازم است که $S^{1,1}$ جواب داشته باشد پس $A^{1,1}$ جواب ندارد. $\triangle$

تذکر ۱۸.۳ *$A^{\mu,\nu}$ لزوما حل‌پذیر نیست. در واقع اگر $S^{\mu,\nu}$ جوابی داشته باشد که عبارت گویای نظیر آن جواب $A^{\mu,\nu}$ نباشد آنگاه می‌توان گفت $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نیست.*

تعریف ۲۴.۳ *عبارت‌های گویای $\Phi_1(t)=\dfrac{p_1(t)}{q_1(t)}$ و $\Phi_2(t)=\dfrac{p_2(t)}{q_2(t)}$ که در آن $q_1(t)\neq 0\neq q_2(t)$ را هم‌ارز (معادل)[40] نامند و می‌نویسیم $\Phi_1\approx\Phi_2$ هرگاه*

$$p_1(t)q_2(t)=p_2(t)q_1(t).$$

[40] Equivalent

تعریف ۲۵.۳ *یک عبارت گویا را به طور نسبی اول* [۴۱] *نامند هرگاه صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند یعنی عامل مشترک با درجه مثبت نداشته باشند. به وضوح اگر یک عبارت گویا به طور نسبی اول نباشد با حذف عامل‌های مشترک صورت و مخرج به یک عبارت گویا تبدیل می‌شود که به طور نسبی اول است.*

تذکر ۱۹.۳ *Φ_ν^μ دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند هرگاه ضرایب آن در دستگاه $S^{\mu,\nu}$ صدق کند. اگر Φ_ν^μ مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل کند دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را نیز حل می‌کند اما ممکن است Φ_ν^μ دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل کند ولی مسئله $A^{\mu,\nu}$ را حل نکند (مانند مثال بیان‌شده) که در این حالت نتیجه می‌گیریم $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نیست.*

قضیه ۲۱.۳ *دستگاه $S^{\mu,\nu}$ همواره جواب غیربدیهی دارد و نظیر آن یک عبارت گویا به صورت $\Phi_\nu^\mu(t) = \dfrac{p_\mu(t)}{q_\nu(t)}$ وجود دارد که $q_\nu(t) \neq ۰$.*

برهان. به وضوح دستگاه خطی همگن $S^{\mu,\nu}$، $\mu + \nu + ۱$ معادله و $\mu + \nu + ۲$ مجهول دارد و در نتیجه همواره دارای جواب غیربدیهی زیر است

$$(a_۰, \dots, a_\mu, b_۰, \dots, b_\nu) \neq (۰, \dots, ۰, ۰, \dots, ۰).$$

اگر $b_۰ = \dots = b_\nu = ۰$، از معادلات همگن نتیجه می‌گیریم

$$p_\mu(t_i) = ۰, \qquad i = ۰, \dots, \mu + \nu.$$

یعنی چندجمله‌ای p_μ که حداکثر از درجه μ است، باید $\mu + \nu + ۱$ ریشه داشته باشد که نتیجه می‌دهد $p_\mu = ۰$ که یک تناقض آشکار است. بنابراین $q_\nu \neq ۰$. □

قضیه ۲۲.۳ *اگر $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ دو جواب غیربدیهی $S^{\mu,\nu}$ باشند آنگاه $\Phi_۱ \approx \Phi_۲$.*

برهان. اگر $\Phi_۱(t) = p_۱(t)/q_۱(t)$ و $\Phi_۲(t) = p_۲(t)/q_۲(t)$ جواب‌های $S^{\mu,\nu}$ باشند چندجمله‌ای

$$p(t) = p_۱(t)q_۲(t) - p_۲(t)q_۱(t),$$

دارای $\mu + \nu + ۱$ ریشه است زیرا

$$p(t_i) = p_۱(t_i)q_۲(t_i) - p_۲(t_i)q_۱(t_i) = x_i q_۱(t_i)q_۲(t_i) - x_i q_۲(t_i)q_۱(t_i) = ۰, \qquad i = ۰, \dots, \mu + \nu,$$

و چون درجه p حداکثر $\mu + \nu$ است باید داشته باشیم $p = ۰$ و در نتیجه $\Phi_۱ \approx \Phi_۲$. □

تذکر ۲۰.۳ *همچنان که در مثال بیان‌شده مشاهده شد عکس این قضیه برقرار نیست.*

قضایای بیان‌شده دلالت بر آن دارند که برای هر مسئله $A^{\mu,\nu}$ یک عبارت گویای Φ_ν^μ وجود دارد که جواب $S^{\mu,\nu}$ است. یا Φ_ν^μ جواب $A^{\mu,\nu}$ نیز هست یا $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نیست. در این حالت برخی از داده‌های (t_i, x_i) گم می‌شوند و گفته می‌شود آن نقطه غیرقابل‌دسترسی [۴۲] است. به وضوح مسئله $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر است هرگاه نقطه غیرقابل‌دسترسی وجود نداشته

[۴۱] Relatively prime

[۴۲] Inaccessible

باشد. فرض کنید $\Phi(t) = p_\mu(t)/q_\nu(t)$ جواب $S^{\mu,\nu}$ باشد. برای هر t_i یا $q_\nu(t_i) \neq 0$ (نقطه (t_i, x_i) غیرقابل‌دسترسی نیست) یا $q_\nu(t_i) = 0$ و در نتیجه $p_\mu(t_i) = 0$. حال یا $\lim_{t\to t_i} \Phi_\nu^\mu(t) = x_i$ (نقطه (t_i, x_i) غیرقابل‌دسترسی نیست) یا $\lim_{t\to t_i} \Phi_\nu^\mu(t) \neq x_i$ که در این حالت نقطه (t_i, x_i) غیرقابل‌دسترسی است و در نتیجه مسئله $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نیست.

تذکر ۲۱.۳ *اگر $S^{\mu,\nu}$ دارای جواب به طور نسبی اول Φ_ν^μ باشد آنگاه نقطه غیرقابل‌دسترسی وجود ندارد و بنابراین مسئله $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر است.*

قضیه ۲۳.۳ *فرض کنید Φ_ν^μ، $S^{\mu,\nu}$ را حل کند. Φ_ν^μ، $A^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند اگر و فقط اگر $\tilde{\Phi}_\nu^\mu$ (که هم‌ارز با Φ_ν^μ و به طور نسبی اول است) $S^{\mu,\nu}$ را حل کند.*

برهان. اگر $\tilde{\Phi}_\nu^\mu$، $S^{\mu,\nu}$ را حل نکند آنگاه $\tilde{\Phi}_\nu^\mu$، $A^{\mu,\nu}$ را حل نمی‌کند. پس t_iای وجود دارد که $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}(t_i) \neq x_i$ یعنی $\tilde{p}_\mu(t_i)/\tilde{q}_\nu(t_i) \neq x_i$ و چون $\tilde{q}_\nu(t_i) \neq 0$ داریم $\tilde{p}_\mu(t_i) - x_i\tilde{q}_\nu(t_i) \neq 0$. از طرف دیگر Φ_ν^μ، $S^{\mu,\nu}$ را حل می‌کند پس $p_\mu(t_i) - x_i q_\nu(t_i) = 0$ و در نتیجه $\tilde{q}_\nu(t_i)p_\mu(t_i) - x_i\tilde{q}_\nu(t_i)q_\nu(t_i) = 0$ و چون $\Phi \approx \tilde{\Phi}$ داریم

$$\tilde{p}_\mu(t_i)q_\nu(t_i) - x_i\tilde{q}_\nu(t_i)q_\nu(t_i) = 0,$$

و در نتیجه $(\tilde{p}_\mu(t_i) - x_i\tilde{q}_\nu(t_i))q_\nu(t_i) = 0$ که نتیجه می‌دهد $q_\nu(t_i) = 0$. پس نقطه (t_i, x_i) غیرقابل‌دسترسی است و در نتیجه $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نیست. □

تذکر ۲۲.۳ *اگر دستگاه $S^{\mu,\nu}$ رتبه کامل (با رتبه $\mu + \nu + 1$) باشد باز هم ممکن است مسئله $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر نباشد.*

نتیجه ۱.۲۳.۳ *اگر دستگاه $S^{\mu,\nu}$ رتبه کامل باشد، مسئله $A^{\mu,\nu}$ حل‌پذیر است اگر و فقط اگر Φ_ν^μ یعنی جواب $S^{\mu,\nu}$ به طور نسبی اول باشد.*

برهان. به عنوان تمرین. □

تعریف ۲۶.۳ *نقاط $(t_i, x_i), \quad i = 0, \ldots, \sigma$ در موقعیت ویژه قرار دارند هرگاه بتوان یک عبارت گویای درونیاب در این نقاط با زوج درجه (κ, λ) یافت به گونه‌ای که $\kappa + \lambda < \sigma$.*

قضیه ۲۴.۳ *نقاط قابل‌دسترسی یک مسئله حل‌پذیر $A^{\mu,\nu}$ در موقعیت ویژه قرار دارند.*

برهان. اگر $\Phi^{\mu,\nu}$ جواب $S^{\mu,\nu}$ باشد و $i_1, \ldots, i_\alpha$ اندیس نقاط غیرقابل‌دسترسی باشد، با حذف عامل‌های $t - t_{i_1}, \ldots, t - t_{i_\alpha}$ از صورت و مخرج $\Phi^{\mu,\nu}$ عبارت گویای $\Phi^{\kappa,\lambda}$ به دست می‌آید که $\kappa = \mu - \alpha$ و $\lambda = \nu - \alpha$. $\Phi^{\kappa,\lambda}$ مسئله $A^{\kappa,\lambda}$ را حل می‌کند که دارای $\mu + \nu + 1 - \alpha$ نقطه قابل‌دسترسی است. چون

$$\kappa + \lambda < \kappa + \lambda + 1 = \mu + \nu + 1 - 2\alpha < \mu + \nu + 1 - \alpha,$$

نقاط قابل‌دسترسی $A^{\mu,\nu}$ در موقعیت ویژه قرار دارند. □

تذکر ۲۳.۳ *برای راحتی فرض می‌کنیم با مسایلی مواجه هستیم که به طور کامل ناتباهیده هستند یعنی هیچ زیرمجموعه‌ای از نقاط داده‌شده در موقعیت ویژه قرار نداشته باشند.*

۳.۷.۱ روش تفاضلات تقسیم‌شده وارون

فرض کنید بخواهیم عبارت گویای $\Phi_n^n(t) = p_n(t)/q_n(t)$ را به گونه‌ای بیابیم که

$$\Phi_n^n(t_i) = x_i, \qquad i = ۰, \ldots, ۲n.$$

ابتدا می‌توان نوشت

$$\frac{p_n(t)}{q_n(t)} = x_۰ + \frac{p_n(t)}{q_n(t)} - \frac{p_n(t_۰)}{q_n(t_۰)} = x_۰ + (t - t_۰)\frac{p_{n-۱}(t)}{q_n(t)} = x_۰ + \frac{(t - t_۰)}{q_n(t)/p_{n-۱}(t)}.$$

برای برقراری شرایط درونیابی باید داشته باشیم

$$\frac{q_n(t_i)}{p_{n-۱}(t_i)} = \frac{t_i - t_۰}{x_i - x_۰} := \phi(t_۰, t_i), \qquad i = ۱, \ldots, ۲n.$$

حال می‌توان نوشت

$$\frac{q_n(t)}{p_{n-۱}(t)} = \phi(t_۰, t_۱) + \frac{q_n(t)}{p_{n-۱}(t)} - \frac{q_n(t_۱)}{p_{n-۱}(t_۱)} = \phi(t_۰, t_۱) + (t - t_۱)\frac{q_{n-۱}(t)}{p_{n-۱}(t)} = \phi(t_۰, t_۱) + \frac{(t - t_۱)}{p_{n-۱}(t)/q_{n-۱}(t)},$$

و از آنجا داریم

$$\frac{p_{n-۱}(t_i)}{q_{n-۱}(t_i)} = \frac{t_i - t_۱}{\phi(t_۰, t_i) - \phi(t_۰, t_۱)} := \phi(t_۰, t_۱, t_i), \qquad i = ۲, \ldots, ۲n.$$

با ادامه این فرایند می‌توان عبارت درونیاب را به صورت زیر ساخت

$$\begin{aligned}
\Phi_n^n(t) &= \frac{p_n(t)}{q_n(t)} = x_۰ + \frac{t - t_۰}{q_n(t)/p_{n-۱}(t)} = x_۰ + \cfrac{t - t_۰}{\phi(t_۰, t_۱) + \cfrac{t - t_۱}{p_{n-۱}(t)/q_{n-۱}(t)}} = \cdots \\
&= x_۰ + \cfrac{t - t_۰}{\phi(t_۰, t_۱) + \cfrac{t - t_۱}{\phi(t_۰, t_۱, t_۲) + \ddots + \cfrac{t - t_{۲n-۱}}{\phi(t_۰, \ldots, t_{۲n})}}}
\end{aligned}$$

تعریف ۲۷.۳ *تفاضلات تقسیم‌شده وارون به صورت زیر تعریف می‌شوند*

$$\begin{aligned}
&\phi(t_i, t_j) = \frac{t_i - t_j}{x_i - x_j}, \\
&\phi(t_i, t_j, t_k) = \frac{t_j - t_k}{\phi(t_i, t_j) - \phi(t_i, t_k)}, \ldots, \\
&\phi(t_i, \ldots, t_l, t_m, t_n) = \frac{t_m - t_n}{\phi(t_i, \ldots, t_l, t_m) - \phi(t_i, \ldots, t_l, t_n)}.
\end{aligned}$$

در عمل برای ساختن عبارت درونیاب گویا کافی است جدول تفاضلات تقسیم‌شده وارون را ساخته و ضرایب مورد نیاز را از آن استخراج کرده و عبارت گویا را ساخت. به مثال زیر از مرجع [۲۲] توجه کنید.

مثال ۲۷.۳ *یک عبارت گویا نظیر داده‌های جدول زیر بسازید.*

t_i	۰	۱	۲	۳
x_i	۰	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	۹

ابتدا جدول تفاضلات تقسیم‌شده وارون را می‌سازیم

t_i	x_i	$\phi(t_۰, t_i)$	$\phi(t_۰, t_۱, t_i)$	$\phi(t_۰, t_۱, t_۲, t_i)$
۰	۰			
۱	-۱	-۱		
۲	$-\frac{۲}{۳}$	-۳	$-\frac{۱}{۲}$	
۳	۹	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

سپس عبارت گویای درونیاب به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\Phi_۱^۲(t) = ۰ + \cfrac{t - ۰}{-۱ + \cfrac{t - ۱}{-۱/۲ + \cfrac{t - ۲}{۱/۲}}} = \frac{۴t^۲ - ۹t}{-۲t + ۷}.$$

$\triangle$

تذکر ۲۴.۳ *تفاضلات تقسیم‌شده وارون تقارن ندارند و در عمل به جای آن از تفاضلات دوجانبه*[۴۳] *استفاده می‌کنند که متقارن است (به صفحه 67-68 مرجع [۲۲] مراجعه کنید).*

پروژه ۶.۳ *ساختن درونیاب گویا به کمک تفاضلات تقسیم‌شده وارون و تفاضلات دوجانبه.*

۲.۷.۳ الگوریتم شبه‌نویل

در این بخش قصد داریم به کمک یک الگوریتم شبیه به الگوریتم نویل برای درونیابی چندجمله‌ای، درونیابی گویا انجام دهیم. باید توجه داشت که این الگوریتم برای ساختن عبارت گویا مناسب نیست ولی اگر بخواهیم مقدار یک تابع مجهول را در نقطه‌ای معلوم درونیابی کنیم، حجم عملیات این الگوریتم قابل توجیه است. فرض کنید بخواهیم عبارت گویای

$$\Phi_{\nu,s}^{\mu}(t) = \frac{p_{\mu,\nu,s}(t)}{q_{\mu,\nu,s}(t)},$$

را به گونه‌ای بسازیم که

$$\Phi_{\nu,s}^{\mu}(t_i) = x_i, \qquad i = s, s+۱, \ldots, s+\mu+\nu.$$

[۴۳] Reciprocal differences

همچنین فرض کنید $a_{\mu,\nu,s}$ و $b_{\mu,\nu,s}$ به ترتیب بیانگر ضریب جمله پیشرو $p_{\mu,\nu,s}$ و $q_{\mu,\nu,s}$ باشند و

$$\alpha_i = t - t_i, \qquad T_{\mu,\nu,s}(t,x) = p_{\mu,\nu,s}(t) - xq_{\mu,\nu,s}(t),$$

که خواهیم داشت

$$T_{\mu,\nu,s}(t_i,x_i) = 0, \qquad i = s, s+1, \ldots, s+\mu+\nu.$$

به کمک قضیه زیر می‌توان عبارت گویا را به تدریج ساخت.

قضیه ۲۵.۳ *با شروع از* $p_{0,0,s}(t) = x_s$ و $q_{0,0,s}(t) = 1$ *روابط بازگشتی زیر برقرارند*
برای گذر $(\mu-1,\nu) \to (\mu,\nu)$

$$p_{\mu,\nu,s}(t) = \alpha_s b_{\mu-1,\nu,s} p_{\mu-1,\nu,s+1}(t) - \alpha_{s+\mu+\nu} b_{\mu-1,\nu,s+1} p_{\mu-1,\nu,s}(t),$$
$$q_{\mu,\nu,s}(t) = \alpha_s b_{\mu-1,\nu,s} q_{\mu-1,\nu,s+1}(t) - \alpha_{s+\mu+\nu} b_{\mu-1,\nu,s+1} q_{\mu-1,\nu,s}(t),$$

برای گذر $(\mu,\nu-1) \to (\mu,\nu)$

$$p_{\mu,\nu,s}(t) = \alpha_s a_{\mu,\nu-1,s} p_{\mu,\nu-1,s+1}(t) - \alpha_{s+\mu+\nu} a_{\mu,\nu-1,s+1} p_{\mu,\nu-1,s}(t),$$
$$q_{\mu,\nu,s}(t) = \alpha_s a_{\mu,\nu-1,s} q_{\mu,\nu-1,s+1}(t) - \alpha_{s+\mu+\nu} a_{\mu,\nu-1,s+1} q_{\mu,\nu-1,s}(t).$$

برهان. گذر $(\mu-1,\nu) \to (\mu,\nu)$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید عبارت‌های گویای $\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}$ و $\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}$ در شرایط درونیابی

$$T_{\mu-1,\nu,s}(t_i,x_i) = 0, \qquad i = s, \ldots, s+\mu+\nu-1,$$
$$T_{\mu-1,\nu,s+1}(t_i,x_i) = 0, \quad i = s+1, \ldots, s+\mu+\nu,$$

صدق کنند. $p_{\mu,\nu,s}$ و $q_{\mu,\nu,s}$ به دست آمده از روابط بازگشتی قسمت اول، به وضوح چندجمله‌ای‌هایی به ترتیب از درجه حداکثر μ و ν هستند (اگرچه ابتدا به نظر می‌رسد $q_{\mu,\nu,s}$ از درجه حداکثر $\nu+1$ باشد ولی جمله $t^{\nu+1}$ حذف می‌شود). با تعریف

$$T_{\mu,\nu,s}(t,x) = \alpha_s b_{\mu-1,\nu,s} T_{\mu-1,\nu,s+1}(t,x) - \alpha_{s+\mu+\nu} b_{\mu-1,\nu,s+1} T_{\mu-1,\nu,s}(t,x),$$

داریم

$$T_{\mu,\nu,s}(t_i,x_i) = 0, \qquad i = s, \ldots, s+\mu+\nu.$$

بنابراین در قسمت اول در حقیقت صورت و مخرج $\Phi^{\mu}_{\nu,s}$ ساخته شده است. گذر $(\mu,\nu-1) \to (\mu,\nu)$ به طور مشابه بررسی می‌شود. □

برای استفاده از روابط بازگشتی قضیه ۲۵.۳ به ضرایب جملات پیشرو چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج عبارت گویا نیاز داریم که در دسترس نیستند و در نتیجه برای تعیین عبارت گویا در یک نقطه معین نمی‌توان از این روابط بازگشتی بهره برد ولی به کمک قضیه بعد می‌توان این مشکل را برطرف کرد.

قضیه ۲۶.۳ *روابط زیر برقرارند*

$$\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}(t)=k_1\frac{(t-t_{s+1})\cdots(t-t_{s+\mu+\nu-1})}{q_{\mu-1,\nu,s}(t)q_{\mu-1,\nu-1,s+1}(t)},\quad k_1=-a_{\mu-1,\nu-1,s+1}b_{\mu-1,\nu,s},$$

$$\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}(t)=k_2\frac{(t-t_{s+1})\cdots(t-t_{s+\mu+\nu-1})}{q_{\mu-1,\nu,s+1}(t)q_{\mu-1,\nu-1,s+1}(t)},\quad k_2=-a_{\mu-1,\nu-1,s+1}b_{\mu-1,\nu,s+1}.$$

برهان. صورت عبارت

$$\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}(t)=\frac{p_{\mu-1,\nu,s}(t)q_{\mu-1,\nu-1,s+1}(t)-p_{\mu-1,\nu-1,s+1}(t)q_{\mu-1,\nu,s}(t)}{q_{\mu-1,\nu,s}(t)q_{\mu-1,\nu-1,s+1}(t)},$$

(با توجه به تعریف $\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}$ و $\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}$) یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $\mu-1+\nu$ است که $\mu+\nu-1$ ریشه آن عبارتند از $t_{s+1},\ldots,t_{s+\mu+\nu-1}$ و بنابراین به صورت $k_1(t-t_{s+1})\cdots(t-t_{s+\mu+\nu-1})$ خواهد بود که در آن $k_1=-a_{\mu-1,\nu-1,s+1}b_{\mu-1,\nu,s}$. قسمت دوم قضیه به صورت مشابه ثابت می‌شود. □

قضیه ۲۷.۳ *روابط زیر برای* $\mu,\nu\geq 1$ *برقرارند*

$$\Phi^{\mu}_{\nu,s}(t)=\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}(t)+\frac{\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}(t)}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left[1-\left(\dfrac{\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu,s}(t)}{\Phi^{\mu-1}_{\nu,s+1}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}(t)}\right)\right]-1},\tag{۱۲.۳}$$

$$\Phi^{\mu}_{\nu,s}(t)=\Phi^{\mu}_{\nu-1,s+1}(t)+\frac{\Phi^{\mu}_{\nu-1,s+1}(t)-\Phi^{\mu}_{\nu-1,s}(t)}{\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{s+\mu+\nu}}\left[1-\dfrac{\Phi^{\mu}_{\nu-1,s+1}(t)-\Phi^{\mu}_{\nu-1,s}(t)}{\Phi^{\mu}_{\nu-1,s+1}(t)-\Phi^{\mu-1}_{\nu-1,s+1}(t)}\right]-1}.\tag{۱۳.۳}$$

برهان. به سادگی به کمک قضایای ۲۵.۳ و ۲۶.۳ می‌توان صحت این روابط را بررسی کرد. □

حال همه چیز فراهم است تا بتوان درونیاب گویا را در یک نقطه معلوم تعیین کرد. به همین منظور ابتدا اگر برای $\nu=0$ بخواهیم μ را افزایش دهیم با درونیابی چندجمله‌ای مواجه هستیم و به کمک الگوریتم نویل داریم

$$\begin{aligned}\Phi^{0}_{0,s}(t)&:=x_s,\\ \Phi^{\mu}_{0,s}(t)&:=\frac{\alpha_s\Phi^{\mu-1}_{0,s+1}(t)-\alpha_{s+\mu}\Phi^{\mu-1}_{0,s}(t)}{\alpha_s-\alpha_{s+\mu}},\quad \mu=1,2,\ldots.\end{aligned}$$

این رابطه را می‌توان با قرار دادن $\Phi^{\mu-1}_{-1,s+1}(t)=\infty$ در رابطه (۱۲.۳) (که باعث صفر شدن عبارت داخل پرانتز می‌شود) به دست آورد. اگر برای $\mu=0$ بخواهیم ν را افزایش دهیم با درونیابی چندجمله‌ای در نقاط $(t_i,1/x_i)$ مواجه هستیم و از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\Phi^{0}_{0,s}(t)&:=x_s,\\ \Phi^{0}_{\nu,s}(t)&:=\frac{\alpha_s-\alpha_{s+\mu}}{\dfrac{\alpha_s}{\Phi^{0}_{\nu-1,s+1}(t)}-\dfrac{\alpha_{s+\nu}}{\Phi^{0}_{\nu-1,s}(t)}},\quad \nu=1,2,\ldots,\end{aligned}\tag{۱۴.۳}$$

که از قرار دادن $\Phi^{-۱}_{\nu-۱,s+۱}(t)=۰$ در رابطه (۱۳.۳) به دست می‌آید. از میان حالات مختلف افزایش درجه صورت و مخرج، تجربه نشان می‌دهد بهتر است درجه صورت و مخرج عبارت گویا را به تدریج اضافه کرد و از روندی مشابه $(۰,۰)\to(۰,۱)\to(۱,۱)\to(۱,۲)\to(۲,۲)\to\cdots$ برای افزایش زوج درجه (μ,ν) پیروی کرد. برای دنبال کردن این روند کافی است، قرار دهیم $i=s+\mu+\nu,\ k=\mu+\nu,\ T_{i,k}:=\Phi^{\mu}_{\nu,s}(t)$ و به کمک (۱۲.۳)، (۱۳.۳) و (۱۴.۳)، برای $۱\le k\le i,\ i=۰,۱,\ldots$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&T_{i,۰}:=x_i,\qquad T_{i,-۱}:=۰,\\
&T_{i,k}=T_{i,k-۱}+\frac{T_{i,k-۱}-T_{i-۱,k-۱}}{\dfrac{t-t_{i-k}}{t-t_i}\left(۱-\dfrac{T_{i,k-۱}-T_{i-۱,k-۱}}{T_{i,k-۱}-T_{i-۱,k-۲}}\right)-۱}.
\end{aligned}
\tag{۱۵.۳}
$$

اگر عبارت داخل پرانتز در رابطه (۱۵.۳) را با عدد ۱ جایگزین کنیم، رابطه (۳.۳) یعنی الگوریتم نویل برای چندجمله‌ای درونیاب به دست می‌آید. در عمل برای پیاده‌سازی طرح (۱۵.۳) کافی است یک جدول به صورت زیر بسازیم

$$
\begin{array}{ccccc}
 & x_۰=T_{۰,۰} & & & \\
۰=T_{۰,-۱} & & T_{۱,۱} & & \\
 & x_۱=T_{۱,۰} & & T_{۲,۲} & \\
۰=T_{۱,-۱} & & T_{۲,۱} & & T_{۳,۳}\\
 & x_۲=T_{۲,۰} & & T_{۳,۲} & \\
۰=T_{۲,-۱} & & T_{۳,۱} & & \\
 & x_۳=T_{۳,۰} & & &
\end{array}
$$

درایه راسی در این جدول همان مقدار عبارت گویا در نقطه t است. به مثال زیر از مرجع [۲۲] توجه کنید.

مثال ۲۸.۳ *با داشتن مقادیر $\cot ۱^\circ,\ldots,\cot ۵^\circ$، می‌خواهیم تقریبی برای $\cot ۲^\circ ۳۰'$ به دست آوریم. با به کار بردن الگوریتم شبه‌نویل (درونیابی گویا) یعنی رابطه (۱۵.۳) جدول زیر به دست می‌آید*

t_i	$\cot(t_i)$				
۱°	۵۷٫۲۸۹۹۶۱۶۳				
		۲۲٫۹۰۷۶۰۶۷۳			
۲°	۲۸٫۶۳۶۲۵۳۲۸		۲۲٫۹۰۳۴۱۶۲۴		
		۲۲٫۹۰۲۰۱۸۰۵		۲۲٫۹۰۳۶۹۵۷۳	
۳°	۱۹٫۰۸۱۱۳۶۶۹		۲۲٫۹۰۴۱۱۴۸۷		۲۲٫۹۰۳۷۶۵۵۲
		۲۲٫۹۱۰۴۱۹۱۶		۲۲٫۹۰۳۸۴۱۴۱	
۴°	۱۴٫۳۰۰۶۶۶۲۶		۲۲٫۹۰۲۰۱۹۷۵		
		۲۲٫۹۴۴۱۸۱۵۱			
۵°	۱۱٫۴۳۰۰۵۲۳۰				

حال آن که با به کار بردن الگوریتم نویل (درونیابی چندجمله‌ای) یعنی رابطه (۳.۳) جدول زیر به دست می‌آید

t_i	$\cot(t_i)$				
1°	۵۷/۲۸۹۹۶۱۶۳				
		۱۴/۳۰۹۳۹۹۱۱			
2°	۲۸/۶۳۶۲۵۳۲۸		۲۱/۴۷۱۳۷۱۰۲		
		۲۳/۸۵۸۶۹۴۹۹		۲۲/۳۶۶۶۱۷۶۲	
3°	۱۹/۰۸۱۱۳۶۶۹		۲۳/۲۶۱۸۶۴۲۱		۲۲/۶۳۵۱۹۱۵۸
		۲۱/۴۷۱۳۷۱۹۰		۲۳/۰۸۲۸۱۴۸۶	
4°	۱۴/۳۰۰۶۶۶۲۶		۲۲/۱۸۷۵۶۸۰۸		
		۱۸/۶۰۶۵۸۷۱۹			
5°	۱۱/۴۳۰۰۵۲۳۰				

در مقایسه با مقدار دقیق $\cot 2^\circ 30' = 22/9037655484\cdots$ *واضح است که درونیابی گویا جواب دقیق‌تری داده است (زیر رقم‌های نادرست مقادیر راسی هر دو جدول خط کشیده شده است).* $\triangle$

پروژه ۷.۳ *الگوریتم نویل و شبه‌نویل در حل مثال قبل.*

۸.۳ درونیابی مثلثاتی

زمانی که به نظر می‌رسد داده‌های در دسترس مربوط به یک تابع متناوب هستند بهتر است از درونیابی مثلثاتی استفاده کرد. در این نوع درونیابی ضرایب c_j, s_j را چنان می‌یابیم که عبارت مثلثاتی

$$T(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{M}(c_j \cos(jt) + s_j \sin(jt)),$$

یا

$$T(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{M-1}(c_j \cos(jt) + s_j \sin(jt)) + \frac{c_M}{2}\cos(Mt),$$

به ترتیب در $N = 2M + 1$ یا $N = 2M$ نقطه (t_k, x_k) درونیاب تابع x باشد. در واقع T یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است. برای سادگی فرض می‌کنیم برای $k = 0, \ldots, N-1$ داشته باشیم $t_k = \frac{2k\pi}{N}$، یعنی یک افراز منظم از نقاط روی بازه $[0, 2\pi)$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲۸.۳ *عبارت* $p(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{it} + \beta_2 e^{2it} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)it}$ *به چندجمله‌ای وجهی*[44] *معروف است.* p *به چندجمله‌ای وجهی درونیاب* x *معروف است هرگاه ضرایب* $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ *به گونه‌ای یافت شوند که برای* $k = 0, \ldots, N-1$ *داشته باشیم* $p(t_k) = x_k$.

[44] Phase polynomial

قضیه ۲۸.۳ $\beta_{0} = \frac{c_{0}}{2}$ یا $c_{0} = 2\beta_{0}$ و

$$\beta_j = \frac{1}{2}(c_j - \mathrm{i}s_j), \qquad \beta_{N-j} = \frac{1}{2}(c_j + \mathrm{i}s_j), \qquad c_j = \beta_j + \beta_{N-j}, \qquad s_j = \mathrm{i}(\beta_j - \beta_{N-j}),$$

و اگر $N = 2M$ آنگاه $\beta_M = \frac{c_M}{2}$ یا $c_M = 2\beta_M$.

برهان. اثبات به کمک فرمول دموآور[۴۵]

$$e^{\mathrm{i}kt} = \cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt), \qquad \forall k,$$

رابطه $e^{-j\mathrm{i}t_k} = e^{-2\pi\mathrm{i}jk/N} = e^{2\pi\mathrm{i}(N-j)k/N} = e^{(N-j)\mathrm{i}t_k}$ و روابط

$$\cos(jt_k) = \frac{e^{j\mathrm{i}t_k} + e^{(N-j)\mathrm{i}t_k}}{2}, \qquad \sin(jt_k) = \frac{e^{j\mathrm{i}t_k} - e^{(N-j)\mathrm{i}t_k}}{2\mathrm{i}},$$

در یک محیط نمادین مانند Mathematica یا Maple به سادگی قابل بررسی است. □

تذکر ۲۵.۳ *باید توجه داشت که برای $k = 0, \dots, N-1$ داریم $x_k = T(t_k) = p(t_k)$. به بیان دقیق‌تر مسئله یافتن عبارت مثلثاتی درونیاب T و مسئله یافتن چندجمله‌ای وجهی درونیاب p هم‌ارز هستند به این معنی که با داشتن ضرایب یکی به کمک قضیه ۲۸.۳ می‌توان ضرایب دیگری را به دست آورد ولی $T(t) \neq p(t)$ برای $t \neq t_k$. در عمل چون یافتن ضرایب p ساده‌تر از یافتن ضرایب T است، ابتدا ضرایب $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ را به دست آورده و سپس به کمک قضیه ۲۸.۳ ضرایب c_j, s_j را مشخص کرده و در نهایت به کمک T درونیابی می‌کنیم.*

با فرض $\omega = e^{\mathrm{i}t}$ و $\omega_k = e^{\mathrm{i}t_k} = e^{2k\pi\mathrm{i}/N}$ داریم

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1\omega + \beta_2\omega^2 + \cdots + \beta_{N-1}\omega^{N-1} := P(\omega),$$

و چون برای $j \neq k$ داریم $\omega_j \neq \omega_k$، به وضوح با مسئله درونیابی چندجمله‌ای مواجه هستیم یعنی می‌خواهیم ضرایب $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ را به گونه‌ای بیابیم که برای $k = 0, \dots, N-1$ داشته باشیم $P(\omega_k) = x_k$. بنابراین اثبات قضیه زیر واضح است.

قضیه ۲۹.۳ *برای نقاط (t_k, x_k) با $t_k = \frac{2k\pi}{N}$، یک و فقط یک چندجمله‌ای وجهی درونیاب*

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{\mathrm{i}t} + \beta_2 e^{2\mathrm{i}t} + \cdots + \beta_{N-1}e^{(N-1)\mathrm{i}t},$$

چنان وجود دارد که برای $k = 0, \dots, N-1$ داشته باشیم $p(t_k) = x_k$.

قضیه ۳۰.۳ *برای $0 \leq j,k \leq N-1$ داریم*

آ- $\omega_k^j = \omega_j^k$ و $\omega_k^{-j} = \overline{\omega_j^k}$. ب- $\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^j \omega_l^{-k} = \begin{cases} N, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$

---

[۴۵] De Moivre's

برهان. آ- به وضوح داریم

$$\omega_k^j = e^{\mathrm{i}jt_k} = e^{2\mathrm{i}jk\pi/N} = e^{\mathrm{i}k(2j\pi/N)} = e^{\mathrm{i}kt_j} = \omega_j^k, \quad \omega_k^{-j} = e^{-\mathrm{i}jt_k} = \overline{\omega_k^j} = \overline{\omega_j^k}.$$

ب- بنابر قسمت قبل ω_{j-k} ریشه معادله $\omega^N - 1 = 0$ است زیرا

$$\omega_{j-k}^N = e^{2(j-k)\pi\mathrm{i}} = \cos(2(j-k)\pi) + \mathrm{i}\sin(2(j-k)\pi) = 1,$$

و با توجه به $\omega^N - 1 = (\omega - 1)(\omega^{N-1} + \omega^{N-2} + \cdots + 1)$ یا $\omega_{j-k} - 1 = 0$ که نتیجه می‌دهد $e^{\mathrm{i}t_{j-k}} = 1$ و از آنجا داریم $j = k$ یا $\sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^j \overline{\omega_l^k} = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^j \omega_l^{-k} = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^{j-k} = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_{j-k}^l = 1 + \cdots + \omega_{j-k}^{N-2} + \omega_{j-k}^{N-1} = 0$. □

تعریف ۲۹.۳ *با تعریف ضرب داخلی*

$$(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \overline{v_j} = v^H u, \qquad \forall u, v \in \mathbb{C}^N,$$

بنابر قضیه ۳۰.۳ بردارهای

$$\omega^{(k)} = [1 \ \omega_1^k \ \cdots \ \omega_{N-1}^k]^T, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

یک پایه متعامد برای $\mathbb{C}^N$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۳۱.۳ *چندجمله‌ای وجهی $p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{\mathrm{i}jt}$ در شرایط درونیابی $p(t_k) = x_k$ با $t_k = 2k\pi/N$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر*

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_k^{-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2jk\pi\mathrm{i}/N}, \qquad j = 0, \ldots, N-1.$$

برهان. چون $x_k = p(t_k) = P(\omega_k) = \beta_0 + \beta_1\omega_k + \beta_2\omega_k^2 + \cdots + \beta_{N-1}\omega_k^{N-1}$ بنابراین می‌توان نوشت $x = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \omega^{(j)}$ که در آن $x = [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}]^T$. در نتیجه داریم

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_k^{-j} = (x, \omega^{(j)}) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \omega^{(k)}, \omega^{(j)} \right) = N\beta_j.$$

□

تعریف ۳۰.۳ نگاشت $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ به طوری که

$$x = [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}]^T \to F(x) = \beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{N-1}]^T,$$

به تبدیل فوریه گسسته[۴۶] (DFT) یا آنالیز فوریه معروف است. وارون این نگاشت یعنی

$$\beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{N-1}]^T \to F^{-1}(\beta) = x = [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}]^T,$$

به سنتز (ساخت) فوریه معروف است.

در سنتز فوریه هدف ارزیابی چندجمله‌ای وجهی p در نقاط هم‌فاصله $t_k = 2k\pi/N$ است یعنی

$$x_k = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{2jk\pi \mathrm{i}/N} = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \omega_k^j.$$

چون $\overline{x_k} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\beta_j}\omega_j^{-k}$ بنابراین $\frac{1}{N}\overline{x_k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \overline{\beta_j}\omega_j^{-k}$ و در نتیجه می‌توان نگاشت F^{-1} را به کمک DFT به صورت زیر به دست آورد

$$x = F^{-1}(\beta) = N\overline{F(\overline{\beta})}.$$

قضیه ۳۲.۳ *شرط لازم و کافی برای آنکه عبارت مثلثاتی T در شرایط درونیابی*

$$T(t_k) = x_k, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

برای نقاط $t_k = 2k\pi/N$ صدق کند آن است که

$$c_j = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos(jt_k), \qquad s_j = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin(jt_k). \tag{۱۶.۳}$$

برهان. از قضایای ۲۸.۳ و ۳۱.۳ کمک بگیرید. □

تذکر ۲۶.۳ *در عمل برای محاسبه ضرایب عبارت مثلثاتی درونیاب T، یا به کمک DFT ضرایب β_j را به دست آورده و سپس از قضیه ۲۸.۳ استفاده می‌کنیم یا به طور مستقیم قضیه ۳۲.۳ را به کار می‌بریم.*

۱.۸.۳ تبدیل فوریه سریع

در DFT که یکی از ابزارهای پرکاربرد در علوم مختلف است باید ضرایب β_j را از رابطه

$$\beta_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2jk\pi \mathrm{i}/N}, \qquad j = 0, \ldots, N-1, \tag{۱۷.۳}$$

به دست آورد. در گسسته‌سازی انتگرال فوریه

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi s t \mathrm{i}} dt,$$

[۴۶] Discrete Fourier transform

که ابزار ارزشمندی در ریاضیات کاربردی است نیز رابطه (۱۷.۳) ظاهر می‌شود. واضح است که برای محاسبه ضرایب β_j به کمک (۱۷.۳) به $N^۲$ عمل ضرب نیاز است که برای N بزرگ زمان زیادی می‌طلبد. کشف مهم کولی و توکی[۴۷] در سال 1965 (گاوس از راه‌کارهای مشابهی استفاده می‌کرده) سرآغاز پیدایش روش‌هایی موسوم به تبدیل فوریه سریع[۴۸] (FFT) شد که حجم عملیات را به $N\log N$ کاهش می‌دهند. بیشتر روش‌های FFT بر اساس تجزیه N به صورت $N = N_۱ \times \cdots \times N_n$ کار می‌کنند. برای سادگی فرض می‌کنیم $N = ۲^n$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در ادامه نسخه سندی‌ـتوکی[۴۹] که توسط جنتلمن[۵۰] و سندی در سال 1966 ارائه شد را بررسی می‌کنیم. در این روش مجموع به کار رفته در (۱۷.۳) به دو زیرمجموع با تعداد مساوی تقسیم می‌شود و این روند ادامه می‌یابد. به منظور بیان دقیقتر این فرایند، فرض کنید $\epsilon_m = e^{-۲\pi i/۲^m}$ و قرار دهید

$$\beta_j = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱} x_{۰,k}^{(n)} \epsilon_n^{jk}, \qquad j = ۰,\dots,N-۱,$$

که در آن $x_{۰,k}^{(n)} = x_k$. اگر $N' = N/۲$، به ازای $j' = ۰,\dots,N'-۱$ می‌توان نوشت

$$\beta_{۲j'} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱} x_{۰,k}^{(n)} \epsilon_n^{۲j'k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱}\left(x_{۰,k}^{(n)} + x_{۰,k+N'}^{(n)}\right)\epsilon_{n-۱}^{j'k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۰,k}^{(n-۱)}\epsilon_{n-۱}^{j'k},$$
$$\beta_{۲j'+۱} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱} x_{۰,k}^{(n)} \epsilon_n^{(۲j'+۱)k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱}\left(\left(x_{۰,k}^{(n)} - x_{۰,k+N'}^{(n)}\right)\epsilon_n^k\right)\epsilon_{n-۱}^{j'k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۱,k}^{(n-۱)}\epsilon_{n-۱}^{j'k}.$$

اگر $N'' = N'/۲$، به ازای $j'' = ۰,\dots,N''-۱$ می‌توان نوشت

$$\beta_{۲(۲j'')} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۰,k}^{(n-۱)} \epsilon_{n-۱}^{۲j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱}\left(x_{۰,k}^{(n-۱)} + x_{۰,k+N''}^{(n-۱)}\right)\epsilon_{n-۲}^{j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱} x_{۰,k}^{(n-۲)}\epsilon_{n-۲}^{j''k},$$
$$\beta_{۲(۲j''+۱)} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۰,k}^{(n-۱)} \epsilon_{n-۱}^{(۲j''+۱)k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱}\left(\left(x_{۰,k}^{(n-۱)} - x_{۰,k+N''}^{(n-۱)}\right)\epsilon_{n-۱}^k\right)\epsilon_{n-۲}^{j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱} x_{۲,k}^{(n-۲)}\epsilon_{n-۲}^{j''k},$$

$$\beta_{۲(۲j'')+۱} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۱,k}^{(n-۱)} \epsilon_{n-۱}^{۲j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱}\left(x_{۱,k}^{(n-۱)} + x_{۱,k+N''}^{(n-۱)}\right)\epsilon_{n-۲}^{j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱} x_{۱,k}^{(n-۲)}\epsilon_{n-۲}^{j''k},$$
$$\beta_{۲(۲j''+۱)+۱} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N'-۱} x_{۱,k}^{(n-۱)} \epsilon_{n-۱}^{(۲j''+۱)k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱}\left(\left(x_{۱,k}^{(n-۱)} - x_{۱,k+N''}^{(n-۱)}\right)\epsilon_{n-۱}^k\right)\epsilon_{n-۲}^{j''k} = \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N''-۱} x_{۳,k}^{(n-۲)}\epsilon_{n-۲}^{j''k}.$$

با ادامه این فرایند روابط بازگشتی زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} x_{r,k}^{(m-۱)} = x_{r,k}^{(m)} + x_{r,k+۲^{m-۱}}^{(m)}, \\ x_{r+۲^{n-m},k}^{(m-۱)} = \left(x_{r,k}^{(m)} - x_{r,k+۲^{m-۱}}^{(m)}\right)\epsilon_m^k, \end{cases} \quad m = n, n-۱,\dots,۱,\ k = ۰,\dots,۲^{m-۱}-۱,\ r = ۰,\dots,۲^{n-(m-۱)}-۱.$$

به کمک این روابط بازگشتی خواهیم داشت $\beta_j = \frac{۱}{N}x_{۰,j}^{(۰)}, \qquad j = ۰,\dots,N-۱$.
ابتدا به نظر می‌رسد برای پیاده‌سازی این روابط بازگشتی به آرایه‌های سه‌اندیسه نیاز باشد ولی به کمک یک نگاشت

---

[۴۷] Cooley and Tukey

[۴۸] Fast Fourier transform

[۴۹] Sande-Tukey

[۵۰] Gentleman

مانند $\kappa(m,r,k)$ که به ازای هر m یک عدد صحیح بین ۰ و $N-۱$ را برمی‌گرداند، مانند نگاشت

$$\kappa(m,r,k) = ۲^{m-۱}\times r+k, \qquad m=n,n-۱,\dots,۱, \qquad k=۰,\dots,۲^{m-۱}-۱, \qquad r=۰,\dots,۲^{n-(m-۱)}-۱$$

می‌توان این کار را به کمک آرایه‌های تک‌اندیسه به طول N انجام داد. سپس به نظر می‌رسد به دو بردار به طول N برای نگهداری اطلاعات دو طرف رابطه بازگشتی نیاز باشد. ولی به کمک یک نگاشت درجا می‌توان این کار را به طرز هنرمندانه‌ای به کمک یک بردار به طول N انجام داد. فرض کنید نگاشت $\tau(m,r,k)$ به یک مکان از یک آرایه یک بعدی به طول N اشاره کند. بنابر روابط بازگشتی برای $m=n,n-۱,\dots,۱,\ k=۰,\dots,۲^{m-۱}-۱,\ r=۰,\dots,۲^{n-(m-۱)}-۱$، می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \tau(m-۱,r,k)=\tau(m,r,k), \\ \tau(m-۱,r+۲^{n-m},k)=\tau(m,r,k+۲^{m-۱}). \end{cases}$$

اگرچه این روابط بازگشتی پسرو به خوبی نگاشت τ را تعریف می‌کنند ولی به کمک قضیه زیر می‌توان نگاشت τ را به طور صریح تعریف کرد.

قضیه ۳۳.۳ *برای* $m=n,n-۱,\dots,۱,\ k=۰,\dots,۲^{m-۱}-۱,\ r=۰,\dots,۲^{n-(m-۱)}-۱$ *داریم*

$$\tau(m,r,k)=\rho(r)+k.$$

برهان. به صفحه 85 مرجع [۲۲] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۱.۳ *اگر* $t=b_۰+b_۱\times ۲^۱+b_۲\times ۲^۲+\cdots+b_{n-۱}\times ۲^{n-۱}$ *که در آن* $b_i\in\{۰,۱\}$*، آنگاه*

$$\rho(t)=b_{n-۱}+b_{n-۲}\times ۲^۱+b_{n-۳}\times ۲^۲+\cdots+b_۰\times ۲^{n-۱},$$

به واژگون بیتی[۵۱]*،* t *معروف است.*

با توجه به خاصیت $\rho(\rho(t))=t$ به وضوح $\tau(m,\rho(\bar r),k)=\bar r+k$ که در آن $\bar r$ مضربی از $۲^{m-۱}$ بین ۰ و $۲^n-۲^{m-۱}$ است و بنابراین به کمک روابط

$$t=\tau(m,\rho(\bar r),k)=\tau(m-۱,\rho(\bar r),k)=\bar r+k,$$
$$\bar t=\tau(m,\rho(\bar r),k+۲^{m-۱})=\tau(m-۱,\rho(\bar r)+۲^{n-m},k)=\bar r+k+۲^{m-۱}$$

می‌توان روش سندی-توکی را در شبه‌کد زیر خلاصه کرد (جزئیات را بررسی کنید).

```
for m=n:-1:1
  for k=0:1:2^(m-1)-1
    e=exp(-2*pi*k*I/2^m); % I^2=-1
```

[۵۱] Bit reversal

```
    for r=0:2^(m-1):2^n-2^(m-1)
      u=v(r+k);
      w=v(r+k+2^(m-1));
      v(r+k)=u+w;
      v(r+k+2^(m-1))=(u-w)*e;
    end
  end
end
```

اگر بردار $v = [x_0 \ \cdots \ x_{N-1}]^T$ ورودی این الگوریتم باشد، خروجی آن عبارت است از

$$\beta_j = \frac{1}{N} v(\rho(j)), \qquad j = 0, \ldots, N-1.$$

تمرین ۱۱.۳ *نشان دهید تعداد عمل ضرب مورد نیاز برای محاسبه β_jها به $N \log N$ کاهش یافته است.*

پروژه ۸.۳ *پیاده‌سازی روش سندی-توکی.*

پروژه ۹.۳ *پیاده‌سازی روش کولی-توکی*[52] *(به مرجع [۲۲] مراجعه کنید).*

تذکر ۲۷.۳ *اگر x_kها اعداد حقیقی باشند و N زوج باشد، آنگاه حجم محاسبات مسئله یافتن ضرایب β_j را می‌توان کمی کاهش داد (جزئیات را بررسی کنید). به همین منظور با فرض*

$$y_k = x_{2k} + \mathrm{i} x_{2k+1}, \qquad k = 0, \ldots, N/2 - 1,$$

ضرایب

$$\gamma_j = \frac{1}{N/2} \sum_{k=0}^{N/2-1} y_k e^{-2jk\pi \mathrm{i}/(N/2)}, \qquad j = 0, \ldots, N/2 - 1,$$

را به کمک FFT حساب کرده و ضرایب β_j را به کمک روابط زیر به دست می‌آوریم (توجه داریم که $\gamma_{N/2} = \gamma_0$)

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{1}{4}(\gamma_j + \overline{\gamma}_{N/2-j}) + \frac{1}{4\mathrm{i}}(\gamma_j - \overline{\gamma}_{N/2-j}) e^{-2\pi j \mathrm{i}/N}, & j &= 0, \ldots, N/2, \\ \beta_{N-j} &= \overline{\beta}_j, & j &= 1, \ldots, N/2 - 1. \end{aligned}$$

۲.۸.۳ محاسبه مجموع‌های سینوسی-کسینوسی

برای ساختن عبارت مثلثاتی درونیاب T به کمک قضیه ۳۲.۳، باید عبارت‌های جمعی رابطه (۱۶.۳) را حساب کرد. در این بخش خواهیم دید که محاسبه چنین مجموع‌هایی باید با دقت بیشتری انجام شود. به ازای ξ و $x_0, \ldots, x_{N-1}$ داده‌شده، گورتزل[53] الگوریتمی در سال 1958 برای محاسبه مجموع‌های

[52] Cooly-Tukey
[53] Goertzel

$$s_s := \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin(k\xi), \qquad s_c := \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos(k\xi),$$

ارائه کرد که در سنتز فوریه مورد استفاده قرار می‌گیرند. این الگوریتم در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۳.۳۴ *اگر ξ مضرب صحیحی از π نباشد و تعریف کنیم*

$$s_j = \frac{1}{\sin\xi}\sum_{k=j}^{N-1} x_k \sin(k-j+1)\xi, \quad j = 0, \dots, N-1, \qquad s_N = s_{N+1} = 0,$$

آنگاه s_j در رابطه بازگشتی

$$s_j = x_j + (2\cos\xi)s_{j+1} - s_{j+2}, \qquad j = N-1, N-2, \dots, 0,$$

صدق می‌کند و به علاوه داریم

$$s_s = s_1 \sin\xi, \qquad s_c = x_0 + (\cos\xi)s_1 - s_2. \tag{۳.۱۸}$$

برهان. بنابر تعریف s_j می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
x_j + (2\cos\xi)s_{j+1} - s_{j+2} &= x_j + \frac{1}{\sin\xi}\left(2\cos\xi\sum_{k=j+1}^{N-1} x_k \sin(k-j)\xi - \sum_{k=j+2}^{N-1} x_k \sin(k-j-1)\xi\right)\\
&= x_j + \frac{1}{\sin\xi}\sum_{k=j+1}^{N-1} x_k(2\cos\xi\sin(k-j)\xi - \sin(k-j-1)\xi)\\
&= \frac{1}{\sin\xi}\left(x_j\sin\xi + \sum_{k=j+1}^{N-1} x_k \sin(k-j+1)\xi\right) = s_j.
\end{aligned}$$

در آخرین مرحله از اتحاد مثلثاتی $2\cos\xi\sin(k-j)\xi = \sin(k-j+1)\xi + \sin(k-j-1)\xi$ استفاده شده است. اولین رابطه (۳.۱۸) نیازی به اثبات ندارد و برای بررسی صحت رابطه دوم داریم

$$\begin{aligned}
s_2 &= \frac{1}{\sin\xi}\sum_{k=2}^{N-1} x_k \sin(k-1)\xi = \frac{1}{\sin\xi}\sum_{k=1}^{N-1} x_k \sin(k-1)\xi\\
&= \frac{1}{\sin\xi}\sum_{k=1}^{N-1} x_k(\cos\xi\sin k\xi - \sin\xi\cos k\xi) = \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\sum_{k=1}^{N-1} x_k\sin k\xi - \sum_{k=1}^{N-1} x_k\cos k\xi\\
&= x_0 + (\cos\xi)s_1 - \sum_{k=0}^{N-1} x_k\cos k\xi.
\end{aligned}$$

□

بنابراین می‌توان برای محاسبه s_s, s_c از شبه‌کد زیر استفاده کرد.

```
s(N)=0;s(N+1)=0;
c=cos(xi);cc=2*c;
```

```
for j=N-1:-1:1
  s(j)=x(j)+cc*s(j+1)-s(j+2);
end
ss=s(1)*sin(xi);
sc=x(0)+c*s(1)-s(2);
```

متاسفانه این الگوریتم برای $\xi \ll ۱$ ناپایدار است. برای نشان دادن این مطلب باید توجه داشت که s_c فقط به $c = \cos\xi$ و x_kها بستگی دارد یعنی

$$s_c = \phi(c, x_۰, \dots, x_{N-۱}) = \sum_{k=۰}^{N-۱} x_k \cos(k \cos^{-۱} c).$$

اگر در محاسبه c خطایی به اندازه $e_a(c) = c\epsilon_c$ داشته باشیم، سهم این خطا در $e_a(s_c)$ به اندازه

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} e_a(c) = \frac{\epsilon_c \cos\xi}{\sin\xi} \sum_{k=۰}^{N-۱} k x_k \sin k\xi = \epsilon_c (\cot\xi) \sum_{k=۰}^{N-۱} k x_k \sin k\xi,$$

خواهد بود که چون برای $\xi \ll ۱$ داریم $\cot\xi \gg ۱$ بنابراین خطای محاسبه c مضر بوده و در نتیجه الگوریتم ناپایدار است. این در حالی است که سهم خطای محاسبه ξ یعنی $e_a(\xi) = \epsilon_\xi \xi$ در $e_a(s_c)$ به اندازه

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{k=۰}^{N-۱} x_k \cos k\xi \right) e_a(\xi) = -\epsilon_\xi \xi \sum_{k=۰}^{N-۱} k x_k \sin k\xi,$$

خواهد بود که نشان می‌دهد خطای ξ مضر نیست. راینش[۵۴] توانست الگوریتم گورتزل را به صورت زیر اصلاح کند. برای $\cos\xi > ۰$، تفاضل $\delta s_j = s_j - s_{j+۱}$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\delta s_j = x_j + (۲\cos\xi - ۲) s_{j+۱} + s_{j+۱} - s_{j+۲} = x_j + \lambda s_{j+۱} + \delta s_{j+۱},$$

که در آن $\lambda = ۲(\cos\xi - ۱) = -۴\sin^۲(\xi/۲)$. بنابراین می‌توان یک شبه‌کد به صورت زیر در نظر گرفت

```
la=-4*sin(xi/2)^2;
s(N+1)=0;dels(N)=0;
for j=N-1:-1:0
  s(j+1)=dels(j+1)+s(j+2);
  dels(j)=la*s(j+1)+dels(j+1)+x(j);
end
ss=s(1)*sin(xi); sc=dels(0)-la*s(1)/2;
```

اگر در محاسبه λ خطایی به اندازه $e_a(\lambda) = \epsilon_\lambda \lambda$ داشته باشیم، سهم این خطا در $e_a(s_c)$ به اندازه

$$\frac{\partial s_c}{\partial \lambda} e_a(\lambda) = \epsilon_\lambda \lambda \frac{\partial s_c}{\partial \xi} / \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = -\epsilon_\lambda \frac{\sin^۲(\xi/۲)}{\sin(\xi/۲)\cos(\xi/۲)} \sum_{k=۰}^{N-۱} k x_k \sin k\xi = -\epsilon_\lambda \left(\tan\frac{\xi}{۲} \right) \sum_{k=۰}^{N-۱} k x_k \sin k\xi,$$

[۵۴] Reinsch

خواهد بود و داریم $\tan(\xi/۲) < ۱$ زیرا $\xi \ll ۱$ و $\cos\xi > ۰$. بنابراین خطای محاسبه λ بی‌ضرر بوده و در نتیجه الگوریتم پایدار است.
برای $\cos\xi \le ۰$، مجموع $\delta s_j = s_j + s_{j+۱}$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\delta s_j = x_j + (۲\cos\xi + ۲)s_{j+۱} - s_{j+۱} - s_{j+۲} = x_j + \lambda s_{j+۱} - \delta s_{j+۱},$$

که در آن $\lambda = ۲(\cos\xi + ۱) = ۴\cos^۲(\xi/۲)$. بنابراین می‌توان یک شبه‌کد به صورت زیر در نظر گرفت

```
la=4*cos(xi/2)^2;
s(N+1)=0;dels(N)=0;
for j=N-1:-1:0
  s(j+1)=dels(j+1)-s(j+2);
  dels(j)=la*s(j+1)-dels(j+1)+x(j);
end
ss=s(1)*sin(xi);
sc=dels(0)-la*s(1)/2;
```

اگر در محاسبه λ خطایی به اندازه $e_a(\lambda) = \epsilon_\lambda \lambda$ داشته باشیم، سهم این خطا در $e_a(s_c)$ به اندازه

$$\epsilon_\lambda \left(\cot\frac{\xi}{۲}\right)\sum_{k=۰}^{N-۱} kx_k \sin k\xi,$$

خواهد بود و داریم $\cot(\xi/۲) \le ۱$ زیرا $\xi \ll ۱$ و $\cos\xi \le ۰$. بنابراین خطای محاسبه λ بی‌ضرر بوده و در نتیجه الگوریتم در این حالت نیز پایدار است.

پروژه ۱۰.۳ *الگوریتم گورتزل در محاسبه مجموع‌های s_s, s_c با اصلاحیه راینش.*

تمرین ۱۲.۳ *تمرینات فصل دوم از مرجع [۲۲] را حل کنید.*

۹.۳ برونیابی و درونیابی وارون

در حالت کلی برای برونیابی ابزارهای پیشرفته‌تری نیاز است ولی برای برونیابی در نقاطی که نزدیک دو انتهای بازه داده‌شده $[a,b]$ باشند می‌توان از همان چندجمله‌ای درون‌یاب استفاده کرد و با توجه به مشکلات درونیابی باید توجه داشت که هرچه از دو انتها دور شویم اعتبار نتایج کمتر می‌شود. اما برای درونیابی وارون می‌توان از ابزارهای درونیابی به خوبی سود برد.

تعریف ۳۲.۳ (**مسئله درونیابی وارون**) *فرض کنید مقدار تابع f در $n+۱$ نقطه $x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n$ معلوم باشد. می‌خواهیم نقطه $\bar{x}$ متعلق به بازه $[x_۰, x_n]$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقدار تابع f در آن نقطه یعنی $f(\bar{x})$ معین باشد.*

در ادامه دو ایده برای حل این مسئله مطرح می‌گردد. ایده اول آن است که فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ باشد. با به کار بردن یکی از روش‌های ریشه‌یابی مانند نیوتن یا تکرار ساده در حل معادله $p(\bar{x}) = f(\bar{x})$، تقریبی از $\bar{x}$ به دست می آید.

مثال ۲۹.۳ *با توجه به جدول داده‌شده مطلوب است مقدار $\bar{x}$ به قسمی که* $\sinh(\bar{x}) = 5$.

x_i	۱	۲	۳	۴
$\sinh(x_i)$	۱/۱۷۵۲	۳/۶۲۶۹	۱۰/۰۱۷۹	۲۷/۲۸۹۹

به کمک نتیجه‌۳.۹.۱ و جدول تفاضلات می‌توان نوشت

$$p(\bar{x}) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0,$$

که در آن با انتخاب $x_0 = 1$ *داریم* $\theta = \frac{\bar{x}-x_0}{h} = \bar{x} - 1$ *و در نتیجه*

$$p(\bar{x}) = 1.1752 + 2.4517(\bar{x}-1) + \frac{3.9393}{2}(\bar{x}-1)(\bar{x}-2) + \frac{6.9417}{6}(\bar{x}-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-3),$$

و یا $p(\bar{x}) = 1.1570\bar{x}^3 - 4.9721\bar{x}^2 + 9.2692\bar{x} - 4.2789$.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۱/۱۷۵۲			
		۲/۴۵۱۷		
۲	۳/۶۲۶۹		۳/۹۳۹۳	
		۶/۳۹۱۰		۶/۹۴۱۷
۳	۱۰/۰۱۷۹		۱۰/۸۸۱۰	
		۱۷/۲۷۲۰		
۴	۲۷/۲۸۹۹			

بنابراین $\bar{x}$ از حل معادله $p(\bar{x}) = 5$ *به دست می‌آید. جدول زیر تکرارهای روش نیوتن را با انتخاب* $t_0 = 2.3$ *برای تابع* $g(t) = p(t) - 5 = 1.1570t^3 - 4.9721t^2 + 9.2692t - 9.2789$ *نشان می‌دهد*

n	۱	۲	۳
t_n	۲/۳۳۸۹	۲/۳۳۸۰	۲/۳۳۸۰

پس با دقت $3D$ داریم $\bar{x} = 2.338$ *و* $g(2.338) = 0.0000$ *اما* $\sinh(2.338) - 5 = 0.1320$*!؟* △

اما ایده دوم آن است که فرض کنید تابع $y = f(x)$ در بازه‌ای شامل x_iها وارون‌پذیر است و جدول زیر را در نظر بگیرید.

y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n

اگر $x=q(y)$ چندجمله‌ای درون‌یاب صادق در جدول باشد که با یکی از روش‌های درون‌یابی لاگرانژ یا تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به دست آمده باشد آن‌گاه داریم $\bar{x} \simeq q(f(\bar{x}))$. یعنی $x=q(y)$ را به عنوان تقریبی از تابع وارون $y=f(x)$ می‌پذیریم.

مثال ۳۰.۳ *یک کاربرد جالب از درون‌یابی وارون، در ریشه‌یابی است. تقریبی از ریشه تابعی که از آن تابع فقط اطلاعات $f(۰)=-۱,\ f(۰/۵)=-۰/۳۷۷۶,\ f(۱)=۰/۴۵۹۷,\ f(۱/۵)=۱/۴۲۹۳$ در دسترس است بیابید. سپس جواب خود را آزمایش کنید.*

ابتدا جدول تفاضلات تقسیم‌شده را به صورت زیر ساخته

f_i	x_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
-۱	۰			
		$\frac{۰/۵-۰}{-۰/۳۷۷۶-(-۱)}=۰/۸۰۳۳$		
$-۰/۳۷۷۶$	$۰/۵$		$-۰/۱۴۱۲$	
		$\frac{۱-۰/۵}{۰/۴۵۹۷-(-۰/۳۷۷۶)}=۰/۵۹۷۲$		$۰/۰۳۹۶$
$۰/۴۵۹۷$	۱		$-۰/۰۴۵۱$	
		$\frac{۱/۵-۱}{۱/۴۲۹۳-۰/۴۵۹۷}=۰/۵۱۵۷$		
$۱/۴۲۹۳$	$۱/۵$			

و از $f(\alpha)=۰$ داریم

$$\alpha \simeq ۰+۰/۸۰۳۳(۱)-۰/۱۴۱۲(۱)(۰/۳۷۷۶)+۰/۰۳۹۶(۱)(۰/۳۷۷۶)(-۰/۴۵۹۷).$$

پس $\alpha \simeq ۰/۷۴۳۱$. برای آزمایش جواب به جدول زیر نیاز داریم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۰	-۱			
		$۰/۶۲۲۴$		
$۰/۵$	$-۰/۳۷۷۶$		$۰/۲۱۴۹$	
		$۰/۸۳۷۳$		$-۰/۰۸۲۶$
۱	$۰/۴۵۹۷$		$۰/۱۳۲۳$	
		$۰/۹۶۹۶$		
$۱/۵$	$۱/۴۲۹۳$			

به کمک نتیجه۱.۹.۳ می‌توان نوشت

$$p(x)=f_۰+\theta\Delta f_۰+\frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰+\frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰.$$

که در آن با انتخاب $x_0 = ۰$ داریم $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{۰/۷۴۳۱-۰}{۰/۵} = ۱/۴۸۶۲$ و در نتیجه

$$p(۰/۷۴۳۱) = -۱ + ۰/۶۲۲۴(۱/۴۸۶۲) + \frac{۰/۲۱۴۹}{۲}(۱/۴۸۶۲)(۰/۴۸۶۲)+$$
$$\frac{-۰/۰۸۲۶}{۶}(۱/۴۸۶۲)(۰/۴۸۶۲)(-۰/۵۱۳۸),$$

و بنابراین $p(۰/۷۴۳۱) \simeq ۰/۰۰۷۸$ که بیانگر آن است که ۰/۷۴۳۱ تقریبی از α است. $\triangle$

فصل ۴

نظریه تقریب

تقریب توابع یک یا چندمتغیره یکی از موضوعات اساسی ریاضیات و سنگ‌بنای آنالیز عددی به ویژه در توسعه الگوریتم‌های عددی است. توجه زیاد ریاضیدانان از قرن نوزده تا به حال به پیشرفت‌های شگرفی در سال‌های اخیر در این زمینه منجر شده است. یک بحث مهم در نظریه تقریب آن است که می‌خواهیم یک تابع در یک فضای نامتناهی‌البعد (مانند فضای $C[۰,۱]$) را با یک تابع ساده‌تر از یک فضای متناهی‌البعد (مانند $\mathbb{P}_n$) تقریب بزنیم. فضای متناهی‌البعد به فضای تقریب معروف است و از دیدگاه آنالیز عددی باید چند ویژگی داشته باشد

- با افزایش بعد فضا تقریب بهتر شود (همگرایی داشته باشیم)،
- عناصر فضا باید ساده باشند (انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از آنها به سادگی انجام شود)،
- هم نظری هم عملی مفاهیم قابل توسعه‌ای داشته باشد.

از تابع درون‌یاب می‌توان به عنوان تقریبی از یک تابع استفاده کرد ولی تابع درونیاب فقط در داده‌های معلوم دقیق است (صرف نظر از خطای گرد کردن) و ممکن است تقریب خوبی در سایر نقاط ارائه ندهد و حتی جوابی دور از انتظار تولید کند. در این فصل، قصد داریم به جای آن که به دنبال ارضای شرایط درونیابی باشیم، بهترین تقریب[۱] یک تابع را به دست آوریم. در ادامه خواهیم دید که بهترین تقریب به فضای تقریب وابسته است، بنابراین ابتدا فضای ضرب داخلی را بهتر بشناسیم.

۱.۴ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۴ *یک فضای خطی (برداری) را کامل نامند هرگاه هر دنباله کوشی در آن فضا به عضوی از فضا همگرا باشد. یک فضای خطی نرم‌دار کامل را فضای باناخ[۲] نامند.*

تمرین ۱.۴ *نشان دهید فضای $C[a,b]$ با نرم ماکزیمم $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$ یک فضای باناخ است.*

---

[۱] Best approximation

[۲] Banach space

تمرین ۲.۴ نشان دهید فضای $C[a,b]$ با نرم دو $\|x\|_2 = \left(\int_a^b x^2(t)dt\right)^{1/2}$ کامل نیست.

تعریف ۲.۴ برای $1 \leq p < \infty$ فضای برداری $L_p[a,b]$ عبارت است از فضای توابعی که $\int_a^b |x(t)|^p\, dt$ موجود (متناهی) باشد. در اصل این فضا یک فضای نرم‌دار با نرم زیر است

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

تذکر ۱.۴ در مراجع آنالیز حقیقی (تابعی) ثابت می‌شود فضای $L_p[a,b]$ برای $1 \leq p < \infty$، یک فضای باناخ است به شرط آن که انتگرال داده‌شده به مفهوم لبگ باشد (اگر انتگرال به مفهوم ریمان باشد فضا کامل نیست).

تذکر ۲.۴ فضای $C[a,b]$ با نرم فضای $L_p[a,b]$ برای $1 \leq p < \infty$، کامل نیست.

تذکر ۳.۴ کامل بودن فضا نه تنها به فضا بلکه به توپولوژی فضا (نرمی که فضا به آن مجهز می‌شود) نیز بستگی دارد.

تعریف ۳.۴ فرض کنید X یک فضای خطی (برداری) حقیقی باشد. تابع $ip(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک ضرب داخلی[3] روی X نامند هرگاه

- $\forall x \in X \;:\; ip(x,x) \geq 0, \qquad ip(x,x) = 0 \iff x = 0$،
- $\forall x, y \in X \;:\; ip(x,y) = ip(y,x)$،
- $\forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \;:\; ip(\alpha x, y) = \alpha\, ip(x,y)$،
- $\forall x, y, z \in X \;:\; ip(x+y, z) = ip(x,z) + ip(y,z)$.

به منظور سادگی نوشتار به جای $ip(\cdot,\cdot)$ از نماد $(\cdot,\cdot)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۴ یک فضای برداری که با یک ضرب داخلی مجهز شده باشد به فضای ضرب داخلی[4] (*IPS*) و یک فضای ضرب داخلی کامل به فضای هیلبرت[5] معروف است.

مثال ۱.۴ $\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ یک *IPS* و در اصل یک فضای هیلبرت است. △

مثال ۲.۴ فضای $L_2[a,b]$ با ضرب داخلی $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ یک *IPS* و در اصل یک فضای هیلبرت است. △

---

[3] Inner product
[4] Inner product space
[5] Hilbert space

تذکر ۴.۴ هر IPS یک NLS نیز هست زیرا $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ بیانگر یک نرم روی فضا است ولی عکس این مطلب درست نیست.

قضیه ۱.۴ *نابرابری زیر معروف به نابرابری کوشی-شوارتز[۶] در هر IPS برقرار است*

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)(y,y)} = \|x\| \, \|y\| \, .$$

برهان. به عنوان تمرین. □

تعریف ۵.۴ *در یک IPS زاویه بین دو عنصر (بردار) به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\|x\| \, \|y\|}.$$

دو بردار x,y در یک IPS **متعامد** *نامیده می‌شوند (به مفهوم هندسی $\theta = \frac{\pi}{۲}$) هرگاه $(x,y) = ۰$. بردار x بر زیرفضای Φ* **عمود** *است هرگاه*

$$(x,\phi) = ۰, \qquad \forall \phi \in \Phi.$$

بردار $P_x(y) = \frac{(x,y)}{(x,x)} x$ به **تصویر متعامد** *y روی x معروف است.*

قضیه ۲.۴ *برابری زیر به قانون متوازی‌الاضلاع در IPS معروف است*

$$\|x+y\|^{۲} + \|x-y\|^{۲} = ۲\,\|x\|^{۲} + ۲\,\|y\|^{۲}\,, \qquad \forall x,y \in X.$$

برهان. به عنوان تمرین. □

تذکر ۵.۴ *از قانون متوازی‌الاضلاع برای تشخیص اینکه آیا یک NLS یک IPS است یا نه، استفاده می‌کنیم.*

قضیه ۳.۴ در یک IPS اگر $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ آنگاه x,y **وابسته خطی** هستند. به علاوه اگر $\|x\| = \|y\|$ آنگاه $x = y$.

برهان. به عنوان تمرین. □

تعریف ۶.۴ *فرض کنید X یک NLS و Φ زیرفضایی از آن باشد. برای $x \in X$ بردار $\phi \in \Phi$ را* **بهترین تقریب** *x در Φ نامند هرگاه*

$$\|x-\phi\| \leq \|x-\psi\|\,, \qquad \forall \psi \in \Phi.$$

بیشتر مواقع Φ یک زیرفضای متناهی‌البعد است و داریم $\Phi = \operatorname{Span}\{\phi_۱,\ldots,\phi_n\}$ و در نتیجه می‌خواهیم ضرایب $a_۱,\ldots,a_n$ را به گونه‌ای بیابیم که $\|x-\phi\| = \|x - \sum_{i=۱}^{n} a_i\phi_i\|$ کمینه باشد.

---
[۶] Caucy-Schwarz

تذکر ۶.۴ *بهترین تقریب هم به فضای تقریب* Φ *هم به نرم فضا (توپولوژی فضا) بستگی دارد.*

قضیه ۴.۴ *بهترین تقریب در* IPS *وجود دارد و یکتا است.*

برهان. با تعریف $d(a_۱,\ldots,a_n) := \|x-\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\|$ داریم

$$\left|\left\|x-\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\right\|-\left\|x-\sum_{i=۱}^n b_i\phi_i\right\|\right| \le \left\|\sum_{i=۱}^n (a_i-b_i)\phi_i\right\| \le \sum_{i=۱}^n |a_i-b_i|\,\|\phi_i\|\,.$$

یعنی d به عنوان تابعی از ضرایب $a_۱,\ldots,a_n$ پیوسته است. به طور مشابه تابع $h(a_۱,\ldots,a_n) := \|\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\|$ نیز پیوسته است. گوی واحد $S: a_۱^۲+\cdots+a_n^۲=۱$ بسته و کراندار است و در نتیجه h مینیمم خود (m) را روی S اختیار می‌کند. به وضوح $m>۰$ چه در غیر این صورت با مستقل خطی بودن ϕ_iها به تناقض می‌رسیم. حال اگر $(a_۱,\ldots,a_n)$ روی یک گوی به مرکز مبداء و شعاع r باشد یعنی $a_۱^۲+\cdots+a_n^۲=r^۲$ داریم

$$h=\left\|\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\right\| = r\left\|\sum_{i=۱}^n \frac{a_i}{r}\phi_i\right\| \ge mr.$$

حال با انتخاب r به اندازه کافی بزرگ ($r>\frac{۲\|x\|}{m}$) خواهیم داشت

$$\left\|x-\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\right\| \ge \left\|\sum_{i=۱}^n a_i\phi_i\right\| - \|x\| \ge mr-\|x\| > \|x\| \ge t,$$

که در آن $t=\min_{y\in B}\|x-y\|$ به طوری که $B=\{z\in\Phi/\,\|z\|\le r\}$. به وضوح t وجود دارد زیرا B بسته و کراندار است. بنابراین وجود بهترین تقریب ثابت شد.

فرض کنید $\psi_۱$ و $\psi_۲$ بهترین تقریب x باشند و $\epsilon=\|x-\psi_۱\|=\|x-\psi_۲\|$. به وضوح $\left\|x-\frac{\psi_۱+\psi_۲}{۲}\right\|<\epsilon$ برقرار نیست زیرا با بهترین تقریب بودن $\psi_۱$ و $\psi_۲$ در تناقض است. پس داریم $\left\|x-\frac{\psi_۱+\psi_۲}{۲}\right\|\ge\epsilon$ و از آنجا داریم

$$۲\epsilon \le \|۲x-\psi_۱-\psi_۲\| \le \|x-\psi_۱\|+\|x-\psi_۲\| = ۲\epsilon.$$

در نتیجه داریم $\|x-\psi_۱+x-\psi_۲\|=\|x-\psi_۱\|+\|x-\psi_۲\|$ و بنابر قضیه ۳.۴ خواهیم داشت $x-\psi_۱=x-\psi_۲$ یعنی $\psi_۱=\psi_۲$. پس بهترین تقریب یکتا است. □

تمرین ۳.۴ *در فضای ضرب داخلی* X*، نشان دهید* $\phi\in\Phi$ *بهترین تقریب* $x\in X$ *است اگر و فقط اگر* $x-\phi$ *بر* Φ *عمود باشد.*

قضیه ۵.۴ *ضرایب بهترین تقریب از حل دستگاه زیر معروف به دستگاه معادلات نرمال به دست می‌آید*

$$\begin{array}{ccccccc}
(\phi_۱,\phi_۱)a_۱ & + & \cdots & + & (\phi_۱,\phi_n)a_n & = & (x,\phi_۱),\\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
(\phi_n,\phi_۱)a_۱ & + & \cdots & + & (\phi_n,\phi_n)a_n & = & (x,\phi_n).
\end{array}$$

برهان. چون بهترین تقریب $x = ۰$ همان بردار صفر است، پس دستگاه همگن نظیر فقط جواب صفر را دارد و بنابراین دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است و در نتیجه دستگاه برای $x \neq ۰$ جواب یکتا دارد. حال با مشتق‌گیری از تابع پیوسته و مشتق‌پذیر

$$\left\| x - \sum_{i=۱}^{n} a_i \phi_i \right\|^۲ = \left(x - \sum_{i=۱}^{n} a_i \phi_i, x - \sum_{k=۱}^{n} a_k \phi_k \right),$$

باید داشته باشیم

$$\frac{\partial}{\partial a_j}(x,x) - ۲\frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=۱}^{n} a_i(x,\phi_i) + \frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_i a_k(\phi_i,\phi_k) = ۰,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{i=۱}^{n}(\phi_i,\phi_j)a_i = (x,\phi_j), \qquad j = ۱,\ldots,n.$$

بررسی این مطلب که یک مینیمم‌کننده به دست آمده است نه یک ماکزیمم‌کننده به عنوان تمرین. □

مثال ۳.۴ *در فضای $L_۲[۰,۱]$ با ضرب داخلی $(x,y) = \int_۰^۱ x(t)y(t)dt$ و انتخاب $\phi_i(t) = t^{i-۱}$، در حل دستگاه معادلات نرمال با ماتریس بدحالت هیلبرت مواجه می‌شویم زیرا $(\phi_i,\phi_j) = ۱/(i+j-۱)$.* △

تعریف ۷.۴ *بردارهای $\phi_۱,\ldots,\phi_n$ در یک IPS متعامد[۷] نامیده می‌شوند هرگاه برای $i \neq j$ داشته باشیم $(\phi_i,\phi_j) = ۰$. به علاوه اگر $(\phi_i,\phi_i) = ۱$، این بردارها متعامدیکه[۸] نامیده می‌شوند.*

مثال ۴.۴ *در زیر چند نمونه از بردارهای متعامدیکه بیان شده است.*

- *بردارهای $e^{(۱)},\ldots,e^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ با همان ضرب داخلی متعارف $\mathbb{R}^n$، که در آن $e^{(k)}$ همان بردار صفر است که درایه k ام آن یک قرار داده شده است،*
- *بردارهای $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin nt \in L_۲[۰,۲\pi]$ با همان ضرب داخلی متعارف $L_۲[۰,۲\pi]$،*
- *بردارهای $\frac{۱}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{۲}{\pi}}T_۱(t), \ldots, \sqrt{\frac{۲}{\pi}}T_n(t) \in C[-۱,۱]$ با ضرب داخلی $(x,y) = \int_{-۱}^{۱} x(t)y(t)/\sqrt{۱-t^۲}dt$، که در آن $T_k(t) = \cos(k\cos^{-۱} t)$ چندجمله‌ای درجه k چبیشف است.*

△

قضیه ۶.۴ *بردارهای متعامد، مستقل خطی نیز هستند.*

برهان. به کمک تعریف به سادگی قابل بررسی است. □

عکس این قضیه برقرار نیست ولی می‌توان بردارهای مستقل خطی را به عنوان بردارهای ورودی فرایند متعامدسازی گرام‌ـاشمیت[۹] در نظر گرفت و بردارهای متعامد یکه ساخت. این فرایند در قضیه بعد بیان می‌شود.

[۷] Orthogonal
[۸] Orthonormal
[۹] Gram-Schmidt orthogonalization

قضیه ۷.۴ *فرض کنید بردارهای* $x_1, x_2, \ldots$ *در یک* IPS *مستقل خطی باشند (هر زیرمجموعه متناهی از آن مستقل خطی باشد). ضرایب* a_{kj} *را می‌توان به گونه‌ای به دست آورد که* $x_k^* = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} x_j$ *برای* $k = 1, 2, \ldots$ *متعامدیکه باشند. در واقع داریم*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, & x_1^* &= y_1 / \|y_1\|, \\ y_2 &= x_2 - (x_2, x_1^*) x_1^*, & x_2^* &= y_2 / \|y_2\|, \ldots \\ y_n &= x_n - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, x_j^*) x_j^*, & x_n^* &= y_n / \|y_n\|. \end{aligned}$$

برهان. به وضوح x_n^* ترکیب خطی $x_1, \ldots, x_n$ است. اگر $\|y_n\| = 0$ پس $y_n = 0$ و در نتیجه یک ترکیب خطی از $x_1, \ldots, x_n$ با ضرایب ناصفر، صفر می‌شود که متناقض با مستقل خطی بودن $x_1, \ldots, x_n$ است. پس فرایند شکست نمی‌خورد. حال فرض کنید $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ متعامدیکه باشند. داریم

$$(y_n, x_k^*) = (x_n, x_k^*) - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, x_j^*)(x_j^*, x_k^*) = (x_n, x_k^*) - (x_n, x_k^*) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

و چون $\|x_n^*\| = 1$ بنابراین $x_1^*, \ldots, x_n^*$ متعامدیکه هستند. □

شکل ۱.۴: تعبیر هندسی فرایند گرام‌ـاشمیت

تذکر ۷.۴ *اگر بردارهای ورودی فرایند گرام‌ـاشمیت استقلال خطی ضعیفی داشته باشند فرایند ناپایدار است (بررسی کنید تقسیم به عدد کوچک اتفاق می‌افتد و خطا انتشار می‌یابد). یک راه‌کار ممکن در این حالت، استفاده از متعامدسازی مجدد است که هزینه محاسباتی دو برابری به همراه دارد.*

قضیه ۸.۴ *اگر* $x_1^*, \ldots, x_n^*$ *یک پایه متعامدیکه برای فضای ضرب داخلی* X *باشد آنگاه برای هر* $x \in X$ *داریم* $x = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k^*) x_k^*$.

برهان. چون $x_1^*, \ldots, x_n^*$ یک پایه برای فضای X است به وضوح برای هر $x \in X$ داریم $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^*$ و در نتیجه $(x, x_j^*) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k^*, x_j^*) = \alpha_j$. □

تعریف ۸.۴ *فرض کنید* $x_1^*, x_2^*, \ldots$ *یک دنباله نامتناهی از بردارهای متعامدیکه در فضای ضرب داخلی* X *باشد.* $\sum_{j=1}^{\infty} P_{x_j^*}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j^*) x_j^*$ **به سری فوریه** x **در** X **معروف است و** $P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, x_j^*) x_j^*$ **سری فوریه**

بریده‌شده (قطع‌شده) x نامیده می‌شود. در واقع سری فوریه بریده‌شده x همان تصویر متعامد x روی $\text{Span}\{x_1^*,\dots,x_n^*\}$ است.

قضیه ۹.۴ *اگر $x_1^*,\dots,x_n^*$ در فضای ضرب داخلی X متعامدیکه باشند آنگاه به ازای هر $x\in X$ و به ازای تمام انتخاب‌های α_kها داریم*

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)x_k^*\right\|^2 \le \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*\right\|^2.$$

برهان. بنابر تعریف می‌توان نوشت

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*\right\|^2=\left(x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*,x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*\right)=(x,x)-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x,x_k^*)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2,$$

و از آنجا داریم

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*\right\|^2=(x,x)-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-(x,x_k^*))^2.$$

چون دو جمله اول مستقل از α_k هستند، این عبارت زمانی کمینه می‌شود که $\alpha_k=(x,x_k^*)$. □

قضیه ۱۰.۴ *برخی از ویژگی‌های سری فوریه بریده‌شده عبارتند از*

آـ P_n یک عملگر تصویر است یعنی $P_n^2=P_n$.

بـ $x-P_nx$ بر $\text{Span}\{x_1^*,\dots,x_n^*\}$ عمود است.

پـ P_nx بهترین تقریب x در $\text{Span}\{x_1^*,\dots,x_n^*\}$ است.

تـ P_n خودالحاق[10] است یعنی $(P_nx,y)=(x,P_ny)$.

برهان. به عنوان تمرین. □

تذکر ۸.۴ *بنابر اثبات قضیه ۹.۴ داریم*

$$0\le\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)x_k^*\right\|^2=(x,x)-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)^2,$$

و از آنجا نابرابری بسل نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)^2\le\|x\|^2.$$

از این نابرابری نتیجه می‌گیریم $\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k^*)^2<\infty$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty}(x,x_n^*)=0$. ولی با این اوصاف نمی‌توان نتیجه گرفت که سری فوریه بریده‌شده x به x همگرا شود.

مثال ۵.۴ *توابع $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt$ برای $k=1,2,\dots$، روی $[-\pi,\pi]$ با ضرب داخلی $(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)y(t)dt$ متعامدیکه هستند. سری فوریه بریده‌شده تابع زوج x، یک ترکیب خطی از توابع فرد است و امکان ندارد به x همگرا شود.* △

---
[10] Self-adjoint

قضیه ۱۱.۴ *(فیثاغورث تعمیم‌یافته) اگر $x_1^*, \dots, x_n^*$ در فضای ضرب داخلی X متعامدیکه باشند آنگاه*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left\| x_k^* \right\|^2 .$$

برهان. به عنوان تمرین. □

تعریف ۹.۴ *بردارهای $x_1, x_2, \dots$ در NLS، X بسته[11] (کامل[12]) نامیده می‌شود هرگاه بتوان هر $x \in X$ را با یک ترکیب خطی متناهی از x_kها به دلخواه نزدیک به x تقریب زد. به عبارت دیگر برای هر $x \in X$ و هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح n و ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ چنان وجود داشته باشند که*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \le \epsilon.$$

بردارهای $x_1, x_2, \dots$ که در NLS، X بسته و مستقل خطی باشند (هر زیرمجموعه متناهی از آنها مستقل خطی باشد) یک پایه برای X تشکیل می‌دهند و هر $x \in X$ را می‌توان به صورت $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ نمایش داد. فضایی که دارای پایه متناهی یا شمارا باشد به فضای جدایی‌پذیر[13] معروف است. فضایی مانند $C[a,b]$ بنابر قضیه تقریب وایرشتراس یک فضای جدایی‌پذیر است. فضاهای جدایی‌پذیر در آنالیز عددی از اهمیت بالایی برخوردارند.

قضیه ۱۲.۴ *اگر بردارهای متعامدیکه $x_1^*, x_2^*, \dots$ یک پایه برای فضای ضرب داخلی X باشند، آنگاه*

آ- برای هر $x \in X$ داریم $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k^*) x_k^*\| = 0$.

ب- برای هر $x \in X$ برابری پارسوال[14] برقرار است، یعنی $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k^*)^2$.

پ- برای هر $x, y \in X$ برابری پارسوال گسترش‌یافته[15] برقرار است، یعنی $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k^*)(y, x_k^*)$.

ت- تنها برداری که بر تمام x_k^*ها عمود باشد بردار صفر است.

ث- اگر برای هر k داشته باشیم $(x, x_k^*) = (y, x_k^*)$ آنگاه $x = y$.

برهان. به صفحه 192 مرجع [۸] مراجعه کنید. □

تذکر ۹.۴ *چندجمله‌ای‌های متعامد روی هر بازه متناهی کامل هستند و یک پایه برای فضای توابع پیوسته تشکیل می‌دهند. توابع مثلثاتی $1, \cos t, \sin t, \dots$ روی هر بازه به طول 2π (یک سر باز) کامل هستند و یک پایه برای فضای توابع پیوسته تشکیل می‌دهند.*

تذکر ۱۰.۴ *بهترین تقریب در فضای NLS موجود است زیرا در قسمت اول قضیه ۴.۴ فقط از ویژگی نرم فضا استفاده شده است و با توجه به قسمت دوم همان قضیه، برای یکتایی بهترین تقریب در فضای NLS کافی است نرم فضا اکید[16] باشد یعنی از $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ و $\|x\| = \|y\|$ نتیجه بگیریم $x = y$. ثابت می‌شود نرم فضای $L_p[a,b]$ برای $1 < p < \infty$ اکید است و بنابراین بهترین تقریب در این فضاها موجود و یکتا است.*

[11] Closed
[12] Complete
[13] Seprable space
[14] Parseval identity
[15] Extended Parseval identity
[16] Strict

در ادامه قصد داریم به بررسی بهترین تقریب نسبت به نرم بینهایت (نرم ماکزیمم) بپردازیم. چنین تقریبی به تقریب اقل‌اکثر[۱۷] یا تقریب چبیشف معروف است زیرا می‌خواهیم ضرایب چندجمله‌ای p_n^* را به گونه‌ای بیابیم که

$$\|x - p_n^*\|_\infty = \max_t |x(t) - p_n^*(t)|,$$

کمینه باشد.

قضیه ۱۳.۴ *برای هر تابع $x \in C[a,b]$ و عدد طبیعی ثابت n، یک چندجمله‌ای $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ چنان وجود دارد که*

$$\|x - p_n^*\|_\infty \le \|x - p_n\|_\infty, \qquad \forall p_n \in \mathbb{P}_n.$$

برهان. به صفحه 143 مرجع [۸] مراجعه کنید. □

اثبات این قضیه سازنده نیست و در عمل از قضیه زیر استفاده می‌شود.

قضیه ۱۴.۴ *(هم‌نوسانی چبیشف[۱۸]) فرض کنید p_n^* چندجمله‌ای بهترین تقریب اقل‌اکثر از درجه n برای تابع $x \in C[a,b]$ باشد و قرار دهید*

$$\epsilon(t) = x(t) - p_n^*(t), \qquad E_m = \max_{t\in[a,b]} |\epsilon(t)|.$$

حداقل $n+۲$ نقطه متمایز $a \le t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{n+۲} \le b$ چنان وجود دارد که

$$|\epsilon(t_k)| = E_m, \quad k = ۱,\ldots,n+۱, \qquad \epsilon(t_k) = -\epsilon(t_{k+۱}), \quad k = ۱,\ldots,n+۱.$$

برعکس اگر $n+۲$ نقطه t_k صادق در روابط اخیر وجود داشته باشد و برای هر $t \in [a,b]$ داشته باشیم $|\epsilon(t)| \le E_m$ آنگاه p_n^* بهترین تقریب اقل‌اکثر تابع x است.

برهان. به صفحه 149-152 مرجع [۸] مراجعه کنید. □

مثال ۶.۴ *بهترین تقریب اقل‌اکثر درجه یک تابع $\sqrt{t}$ را روی بازه $[a,b]$ بیابید.*
فرض کنید $p_۱^*(t) = a_۰ + a_۱ t$ و قرار دهید $\epsilon(t) = \sqrt{t} - a_۰ - a_۱ t$. چون $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} - a_۱$، پس $t_۲ = \frac{۱}{۴a_۱^۲}$ یک نقطه بحرانی است. با انتخاب $t_۱ = a,\ t_۳ = b$، از حل دستگاه $\epsilon(t_۱) = -\epsilon(t_۲),\ \epsilon(t_۳) = -\epsilon(t_۲)$ داریم

$$a_۰ = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{۴}\right), \qquad a_۱ = \frac{۱}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad E_m = \sqrt{b} - a_۰ - a_۱ b.$$

△

تذکر ۱۱.۴ *برای nهای بزرگ، حل دستگاه غیرخطی به دست آمده به سادگی امکان‌پذیر نیست و در عمل از روش‌های تکراری مانند الگوریتم رمز[۱۹] استفاده می‌شود. به مرجع [۱۴] مراجعه کنید.*

---

[۱۷] Min-Max
[۱۸] Chebyshev equi-oscilation
[۱۹] Remez

قضیه ۱۵.۴ *فرض کنید $\{p_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله بهترین تقریب‌های اقل‌اکثر تابع $x \in C[a,b]$ باشد. داریم*

$$\lim_{n\to\infty} p_n^*(t) = x(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

برهان. بنابر قضیه تقریب وایرشتراس، برای هر $\epsilon > 0$ و برای n به اندازه کافی بزرگ چندجمله‌ای p_n چنان وجود دارد که $\|x - p_n\|_\infty \leq \epsilon$ و چون p_n^* بهترین تقریب اقل‌اکثر x است

$$\|x - p_n^*\|_\infty \leq \|x - p_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

□

کران خطای بهترین تقریب اقل‌اکثر در چند قضیه منسوب به جکسون[20] بررسی شده [۲۰] که یک نمونه از آنها در زیر آورده شده است.

قضیه ۱۶.۴ *فرض کنید $x \in C^{k+1}[-1,1]$ و $\|x^{(k+1)}\|_\infty = M_{k+1}$. اگر p_n^* برای $n > k$ بهترین تقریب اقل‌اکثر x باشد آنگاه*

$$\|x - p_n^*\|_\infty \leq \frac{6^{k+1} e^k}{n^k (n-k)(k+1)} M_{k+1}.$$

برهان. به صفحه 23 مرجع [۲۰] مراجعه کنید. □

تذکر ۱۲.۴ *اگر x به اندازه کافی هموار باشد (k بزرگ باشد)، همگرایی برای n بزرگ، بسیار سریع است. متاسفانه در بسیاری از مسایل کاربردی ($n < 20$) کران خطای داده‌شده خیلی بدبینانه است. اگر x به اندازه کافی هموار باشد می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد.*

قضیه ۱۷.۴ *اگر $x \in C^{n+1}[-1,1]$ و $\|x^{(n+1)}\|_\infty = M_{n+1}$، آنگاه*

$$\|x - p_n^*\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

برهان. فرض کنید $z_1, \ldots, z_{n+1}$ ریشه‌های چندجمله‌ای درجه $n+1$ چبیشف T_{n+1} و p_n درونیاب x در این نقاط باشد. بنابراین داریم

$$x(t) - p_n(t) = \frac{w(t)}{(n+1)!} x^{(n+1)}(\xi),$$

که در آن ξ نقطه‌ای در $[-1,1]$ و $w(t) = (t - z_1)\cdots(t - z_{n+1})$. به سادگی می‌توان نشان داد که $w(t) = \frac{T_{n+1}(t)}{2^n}$ و چون $|T_{n+1}(t)| \leq 1$ حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۸.۴ *برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف عبارتند از*

آـ چندجمله‌ای‌های چبیشف در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

---

[20] Jackson

ب- T_n یک چندجمله‌ای درجه n با جمله پیشرو $2^{n-1}t^n$ است.

پ- T_n برای n زوج تابعی زوج و برای n فرد تابعی فرد است.

ت- برای $n \geq 1$ ریشه‌های T_n عبارتند از $t_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n},\ j = 1, \ldots, n$ که به وضوح حقیقی، متمایز و در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند.

ث- $\forall n \geq 0,\ \forall t \in [-1, 1],\ |T_n(t)| \leq 1$.

ج- برای $n \geq 1$ در $n+1$ نقطه $t_k = \cos \frac{k\pi}{n},\ k = 0, \ldots, n$ داریم

$$T_n(t_k) = -T_n(t_{k+1}), \qquad |T_n(t_k)| = 1.$$

برهان. به کمک تغییر متغیر $\theta = \cos^{-1} t$ و روابط مثلثاتی به سادگی به نتیجه می‌رسیم. □

۲.۴ تقریب کم‌ترین مربعات گسسته

فرض کنید از تابع x فقط داده‌های جدولی

t_i	t_1	$\cdots$	t_m
x_i	x_1	$\cdots$	x_m

در دسترس باشد و بخواهیم چندجمله‌ای $p_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ را چنان بیابیم که تقریب مناسبی برای تابع نامعلوم x باشد. برای تعیین ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ کافی است تابع

$$E_2(a_0, \ldots, a_n) = \|x - p_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} (x_k - p_n(t_k))^2$$

را کمینه کرد. این مسئله به مسئله کم‌ترین مربعات[21] گسسته معروف است و برای حل آن برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باید داشته باشیم $\frac{\partial E_2}{\partial a_i} = 0$ و در نتیجه

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{m} \left(x_k - \sum_{j=0}^{n} a_j t_k^j \right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial a_i} \left(x_k - \sum_{j=0}^{n} a_j t_k^j \right)^2$$

و یا

$$0 = -2 \sum_{k=1}^{m} t_k^i \left(x_k - \sum_{j=0}^{n} a_j t_k^j \right)$$

و از آنجا

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} t_k^{i+j} \right) a_j = \sum_{k=1}^{m} x_k t_k^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

این دستگاه $(n+1) \times (n+1)$ به دستگاه معادلات نرمال معروف است و از حل آن ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ به دست می‌آیند. با قرار دادن

[21] Least squares

$$\alpha = [a_i]_{(n+۱)\times ۱}$$

$$\beta = [\beta_i]_{(n+۱)\times ۱}, \qquad \beta_i = \sum_{k=۱}^{m} x_k t_k^i, \qquad i = ۰, ۱, \ldots, n$$

$$S = [s_{ij}]_{(n+۱)\times(n+۱)}, \qquad s_{ij} = \sum_{k=۱}^{m} t_k^{i+j}, \qquad i, j = ۰, ۱, \ldots, n$$

می‌توان دستگاه معادلات نرمال را به صورت فشرده $S\alpha = \beta$ و یا به شکل گسترده زیر نیز بیان نمود

$$\begin{bmatrix} s_{۰۰} & s_{۰۱} & \cdots & s_{۰n} \\ s_{۱۰} & s_{۱۱} & \cdots & s_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n۰} & s_{n۱} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_۰ \\ \beta_۱ \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

مثال ۷.۴ *یک چندجمله‌ای درجه دو (سهمی) مناسب داده‌های جدولی زیر بسازید.*

t_i	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
x_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳

در اینجا $m = ۵$ و $n = ۲$ و دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است

$$\begin{array}{rcrcrcl} ۵a_۰ & + & ۲/۵a_۱ & + & ۱/۸۷۵a_۲ & = & ۸/۷۶۸۰ \\ ۲/۵a_۰ & + & ۱/۸۷۵a_۱ & + & ۱/۵۶۲۵a_۲ & = & ۵/۴۵۱۴ \\ ۱/۸۷۵a_۰ & + & ۱/۵۶۲۵a_۱ & + & ۱/۳۸۲۸a_۲ & = & ۴/۴۰۱۵ \end{array}$$

و از حل آن داریم $a_۰ = ۱/۰۰۵۱$، $a_۱ = ۰/۸۶۴۶۸$ و $a_۲ = ۰/۸۴۳۱۶$. پس

$$p_۲(t) = ۰/۸۴۳۱۶t^۲ + ۰/۸۶۴۶۸t + ۱/۰۰۵۱$$

و بنابراین

t_i	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
x_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳
$p_۲(t_i)$	۱/۰۰۵۱	۱/۲۷۴۰	۱/۶۴۸۲	۲/۱۲۷۹	۲/۷۱۲۹
$x_i - p_۲(t_i)$	−۰/۰۰۵۱	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۴	−۰/۰۱۰۹	۰/۰۰۵۴

هم‌چنین

$$E_۲ = \sum_{k=۱}^{۵} (x_k - p_۲(t_k))^۲ = ۲/۷۴ \times ۱۰^{-۴}.$$

$\triangle$

مثال ۸.۴ *برنامه* dls.nb *بررسی شود.* $\triangle$

تذکر ۱۳.۴ *در تقریب کمترین مربعات غیرخطی، اگر راه‌کار مطرح‌شده دنبال شود واضح است که با یک دستگاه غیرخطی مواجه می‌شویم. بعضی مواقع مانند موارد زیر*

$$x = at^{3} + b, \quad x = at^{3} + bt^{2}, \quad x = ae^{bt}, \quad x = \frac{a}{bt + c}, \quad x = \frac{at^{2}}{bt^{2} + c}, \quad x = a\cos t + b,$$

با تغییر متغیرهای مناسب می‌توان مسئله تقریب کمترین مربعات غیرخطی را به مسئله کمترین مربعات خطی تبدیل کرد. به عنوان نمونه اگر هدف یافتن یک تابع به صورت $x = at^{3} + bt$ مناسب داده‌های (t_i, x_i) باشد، با تغییر متغیر $T = t^{2}$، $X = \frac{x}{t}$، باید به دنبال یافتن ضرایب a, b باشیم طوری که خط $X = aT + b$ مناسب داده‌های $(t_i^{2}, \frac{x_i}{t_i})$ باشد.

۳.۴ تقریب کم‌ترین مربعات پیوسته

فرض کنید تابع $x \in C[a, b]$ در دسترس باشد و قصد داشته باشیم چندجمله‌ای $p_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ را چنان بیابیم که

$$E_2(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b (x(t) - p_n(t))^2 dt$$

کمینه شود. این مسئله به مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته معروف است و برای تعیین ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ باید برای $i = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\frac{\partial E_2}{\partial a_i} = 0$ و در نتیجه

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b \left(x(t) - \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right)^2 dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i} \left(x(t) - \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right)^2 dt$$

و یا

$$0 = -2 \int_a^b t^i \left(x(t) - \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right) dt$$

و از آنجا

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b t^{i+j} dt \right) a_j = \int_a^b x(t) t^i dt, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

این دستگاه $(n+1) \times (n+1)$ به دستگاه معادلات نرمال معروف است و از حل آن ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ به دست می‌آیند. با قرار دادن

$$\alpha = [a_i]_{(n+1)\times 1}$$
$$\beta = [\beta_i]_{(n+1)\times 1}, \qquad \beta_i = \int_a^b x(t) t^i dt, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
$$S = [s_{ij}]_{(n+1)\times(n+1)}, \qquad s_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i + j + 1}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n$$

می‌توان این دستگاه را به صورت فشرده $S\alpha = \beta$ و یا به شکل گسترده زیر نیز بیان نمود

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0n} \\ s_{10} & s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n0} & s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

مثال ۹.۴ *تقریب کم‌ترین مربعات چندجمله‌ای درجه دو (سهمی) تابع* $x(t) = \sin \pi t$ *را روی بازه* $[0, 1]$ *مشخص کنید.*

دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & \frac{1}{2}a_1 & + & \frac{1}{3}a_2 & = & \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 & + & \frac{1}{3}a_1 & + & \frac{1}{4}a_2 & = & \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 & + & \frac{1}{4}a_1 & + & \frac{1}{5}a_2 & = & \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \end{array}$$

و از حل آن داریم $a_0 = \frac{12\pi^2-120}{\pi^3} \simeq -0/050465$ و $a_1 = -a_2 = \frac{720-60\pi^2}{\pi^3} \simeq 4/12251$. پس

$$p_2(t) = -4/12251t^2 + 4/12251t - 0/050465$$

و در نتیجه

$$E_2 = \int_0^1 (x(t) - p_2(t))^2 dt \simeq 0/0003.$$

$\triangle$

مثال ۱۰.۴ *برنامه* cls.nb *بررسی شود.* $\triangle$

تذکر ۱۴.۴ *در حل مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته اگر* $a = 0$ *و* $b = 1$ *آن‌گاه* $S = H$ *که در آن* H *ماتریس بدوضع هیلبرت است (برنامه* hilbert.nb *بررسی شود).*

در ادامه قصد داریم مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته را طوری دنبال کنیم که با ماتریس هیلبرت مواجه نشویم.

تعریف ۱۰.۴ *تابع انتگرال‌پذیر* w *را روی بازه* I *تابع وزنی*[۲۲] *نامند اگر به ازای هر* t *در* I *داشته باشیم* $w(t) \geq 0$ *و در هر زیربازه از* I، $w(t)$ *متحد صفر نباشد. به عنوان مثال* $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *بر بازه* $(-1, 1)$ *تابع وزنی است.*

تعریف ۱۱.۴ *فرض کنید* $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ *معرف یک مجموعه مستقل خطی از توابع و* w *یک تابع وزنی بر بازه* $[a, b]$ *باشد و هم‌چنین* $x \in C[a, b]$. *مسئله یافتن*

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(t) \tag{۱.۴}$$

[۲۲] Weight function

به گونه‌ای که تابع

$$E_w(a_0,\dots,a_n)=\int_a^b w(t)(x(t)-p(t))^2\,dt$$

کمینه شود، به مسئله کم‌ترین مربعات وزن‌دار[۲۳] معروف است. مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته حالت خاصی از مسئله کم‌ترین مربعات وزن‌دار است که در آن $w(t)=1$ و برای $j=0,1,\dots,n$، $\phi_j(t)=t^j$.

برای تعیین ضرایب $a_0,\dots,a_n$ در مسئله کم‌ترین مربعات وزن‌دار، باید برای $i=0,1,\dots,n$ داشته باشیم $\frac{\partial E_w}{\partial a_i}=0$ و در نتیجه

$$0=\frac{\partial E_w}{\partial a_i}=\frac{\partial}{\partial a_i}\int_a^b w(t)\left(x(t)-\sum_{j=0}^{n}a_j\phi_j(t)\right)^2 dt=\int_a^b w(t)\frac{\partial}{\partial a_i}\left(x(t)-\sum_{j=0}^{n}a_j\phi_j(t)\right)^2 dt$$

و یا

$$0=-2\int_a^b w(t)\phi_i(t)\left(x(t)-\sum_{j=0}^{n}a_j\phi_j(t)\right)dt$$

و از آنجا

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\int_a^b w(t)\phi_i(t)\phi_j(t)dt\right)a_j=\int_a^b w(t)x(t)\phi_i(t)dt,\qquad i=0,1,\dots,n. \tag{۲.۴}$$

تعریف ۱۲.۴ *مجموعه توابع $\{\phi_0(t),\phi_1(t),\dots,\phi_n(t)\}$ بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزنی w متعامد نامیده می‌شوند اگر*

$$\int_a^b w(t)\phi_i(t)\phi_j(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \alpha_i>0, & i=j,\end{cases}$$

و اگر به ازای $i=0,1,\dots,n$ داشته باشیم $\alpha_i=1$، آن‌گاه مجموعه توابع را متعامدیکه نامند.

تمرین ۴.۴ *نشان دهید چندجمله‌ای‌های چبیشف بر بازه $[-1,1]$ نسبت به تابع وزنی $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ متعامد هستند، یعنی*

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \frac{\pi}{2}, & i=j\neq 0,\\ \pi, & i=j=0.\end{cases}$$

قضیه ۱۹.۴ *اگر مجموعه توابع $\{\phi_0(t),\phi_1(t),\dots,\phi_n(t)\}$ بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزنی w متعامد باشند آن‌گاه*

---

[۲۳] weighted least squares

ضرایب $a_\circ, \dots, a_n$ در (۲.۴) به صورت زیر به دست می‌آیند

$$a_i = \frac{\int_a^b w(t)\phi_i(t)x(t)dt}{\int_a^b w(t)(\phi_i(t))^{۲}dt}, \qquad i = \circ, ۱, \dots, n.$$

برهان. با توجه به تعریف توابع متعامد و به کمک دستگاه معادلات (۲.۴)، واضح است. □

تعریف ۱۳.۴ *مجموعه توابع $\{\phi_\circ(t), \phi_۱(t), \dots, \phi_{۲n}(t)\}$ که در آن*

$$\phi_\circ(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$

و به ازای $k = ۱, ۲, \dots, n$

$$\phi_{۲k}(t) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \qquad \phi_{۲k-۱}(t) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin kt$$

بر بازه $[-\pi, \pi)$ نسبت به تابع وزنی $w(t) = ۱$ **متعامد***یکه هستند!؟ تقریب کم‌ترین مربعات وزن‌دار تقریب مثلثاتی یا تقریب فوریه هر تابع $x \in C[-\pi, \pi)$ به صورت $p(t) = \sum_{j=\circ}^{۲n} a_j\phi_j(t)$ است که در آن*

$$a_j = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\phi_j(t)dt, \qquad j = \circ, ۱, \dots, ۲n.$$

اگر $n \to \infty$ آن‌گاه p به یک سری تبدیل می‌شود که به سری فوریه تابع x بر بازه $[-\pi, \pi)$ معروف است و برای توصیف جواب معادله‌های دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای ابزار مفیدی است.

مثال ۱۱.۴ *سری فوریه تابع $x(t) = e^t$ بر بازه $[-\pi, \pi)$ را به دست آورید.*

داریم

$$a_\circ = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\sinh\pi$$

و

$$a_{۲k} = \frac{۲(-۱)^k}{\sqrt{\pi}(۱ + k^{۲})}\sinh\pi$$

همچنین

$$a_{۲k-۱} = \frac{۲k(-۱)^{k+۱}}{\sqrt{\pi}(۱ + k^{۲})}\sinh\pi$$

بنابراین

$$e^t = \frac{۲\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{۱}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{۱ + k^{۲}}(\cos kt - k\sin kt)\right).$$

△

مثال ۱۲.۴ *برنامه fourier.nb بررسی شود.* △

فصل ۵

درونیابی و تقریب در ابعاد بالاتر

تعریف ۱.۵ *منظور از $\mathbb{P}_m^d$ فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه m تعریف‌شده روی $\mathbb{R}^d$ است. اگر $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ آنگاه $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \times \cdots \times t_d^{\alpha_d}$. α به چنداندیسه (اندیس چندگانه)[1] معروف است و $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. برای چنداندیسه α, β می‌نویسیم $\alpha < \beta$ هرگاه $\alpha_k < \beta_k$ برای هر k. همچنین عملگر مشتق جزئی مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

قضیه ۱.۵ *تک‌جمله‌ای‌های t^α که در آن $t \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ مستقل خطی هستند و به علاوه داریم*

$$\dim \mathbb{P}_m^d = \begin{pmatrix} m+d \\ d \end{pmatrix}.$$

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. $\square$

در ادامه این فصل درونیابی و تقریب را در فضای $\mathbb{R}^2$ بررسی می‌کنیم زیرا تعمیم به فضای $\mathbb{R}^d$ برای $d > 2$ به سادگی امکان‌پذیر است. درونیابی در $\mathbb{R}^2$ از درونیابی در $\mathbb{R}$ پیچیده‌تر است زیرا ثابت می‌شود اگر $\phi_1, \dots, \phi_n$ توابع مستقل خطی در $C(\Omega)$ باشند به طوری که $\Omega \subset \mathbb{R}^d$، آنگاه این توابع لزوما در شرط هار صدق نمی‌کنند و در نتیجه مسئله درونیابی در $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^d$) جواب یکتا ندارد و موقعیت نقاط تعیین‌کننده است.

مثال ۱.۵ *فرض کنید $(s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3)$ سه نقطه دلخواه و متمایز در صفحه باشند و بخواهیم چندجمله‌ای $p(s,t) = a_0 + a_1 s + a_2 t$ را چنان بیابیم که برای $k = 1, 2, 3$ داشته باشیم $p(s_k, t_k) = x_k$. برای این منظور باید داشته باشیم*

$$a_0 + a_1 s_1 + a_2 t_1 = x_1$$

$$a_0 + a_1 s_2 + a_2 t_2 = x_2$$

$$a_0 + a_1 s_3 + a_2 t_3 = x_3$$

---

[1] Multi-index

و یا

$$\begin{bmatrix} ۱ & s_۱ & t_۱ \\ ۱ & s_۲ & t_۲ \\ ۱ & s_۳ & t_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix},$$

و به وضوح مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب به موقعیت نقاط بستگی دارد و ممکن است مسئله صفر، یک یا بی‌شمار جواب داشته باشد. △

۱.۵ ضرب تانسوری

در این بخش نشان می‌دهیم چگونه می‌توان از توابع درونیاب (تقریب) یک متغیره برای درونیابی (تقریب) در ابعاد بالاتر استفاده کرد. فرض کنید X و Y دامنه‌هایی باشند که بتوان توابع حقیقی مقدار را روی آنها تعریف کرد. ضرب دکارتی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X \times Y = \{(x, y) \ : \ x \in X, \ y \in Y\}.$$

حال مجموعه گره‌های (نقاط) زیر را در نظر بگیرید

$$\{x_۱, \dots, x_n\} \subset X, \qquad \{y_۱, \dots, y_m\} \subset Y.$$

شبکه دکارتی تولیدشده توسط این دو مجموعه گره عبارت است از

$$\mathcal{N} = \{x_۱, \dots, x_n\} \times \{y_۱, \dots, y_m\} = \{(x_i, y_j) \ : \ i = ۱, \dots, n, \ j = ۱, \dots, m\}.$$

به وضوح $\#\mathcal{N} = nm$. به منظور تقریب (درونیابی) روی $\mathcal{N}$ دو عملگر یک بعدی P و Q را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$P = \sum_{i=۱}^{n} x_i^* \otimes \phi_i, \qquad Q = \sum_{j=۱}^{m} y_j^* \otimes \psi_j.$$

در اینجا از یک ضرب تانسوری[۲] استاندارد استفاده شده و همچنین تابعی ارزیاب نقطه‌ای به کار برده شده که به صورت $x^* f = f(x)$ تعریف می‌شود. به بیان دیگر می‌توان نوشت

$$Pf = \sum_{i=۱}^{n} x_i^*(f)\phi_i, \qquad Qg = \sum_{j=۱}^{m} y_j^*(g)\psi_j.$$

به بیان ساده‌تر داریم

$$Pf(x) = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\phi_i(x), \qquad Qg(y) = \sum_{j=۱}^{m} g(y_j)\psi_j(y).$$

اگر P و Q عملگر درونیاب باشند باید داشته باشیم $\phi_i(x_k) = \delta_{ik}$ و $\psi_j(y_k) = \delta_{jk}$. حال برای ساختن عملگرهای دو

[۲] Tensor product

متغیره، عملگرهای قبلی را به صورت زیر توسیع می‌دهیم

$$\bar{P}f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y)\phi_i(x), \qquad \bar{Q}f(x,y) = \sum_{j=1}^{m} f(x,y_j)\psi_j(y).$$

تذکر ۱.۵ *عملگرهای $\bar{P}$ و $\bar{Q}$ به ترتیب بر اساس ضرب تانسوری $\bar{P} = P \otimes I$ و $\bar{Q} = I \otimes Q$ تعریف شده‌اند.*

گزاره ۱.۵ *عملگر $\bar{P}$ تابع f را روی مجموعه $\{x_1,\dots,x_n\}\times Y$ و عملگر $\bar{Q}$ تابع f را روی مجموعه $X\times\{y_1,\dots,y_m\}$ درونیابی می‌کند.*

برهان. برای $1 \le k \le n$ و هر $y \in Y$ داریم

$$\bar{P}f(x_k,y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y)\phi_i(x_k) = f(x_k,y).$$

□

مثال ۲.۵ *فرض کنید $X = Y = [0,1]$ و ϕ_i و ψ_j چندجمله‌ای‌های لاگرانژ باشند یعنی*

$$\phi_i(x) = L_i(x) = \prod_{i\neq k=1}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \qquad \psi_j(y) = L_j(y) = \prod_{j\neq k=1}^{m} \frac{y-y_k}{y_j-y_k}.$$

$\bar{P}f$ ($\bar{Q}f$) یک تابع ترکیبی است یعنی بخشی از آن چندجمله‌ای و بخش دیگر تابعی از y (x) است. به بیان دقیق‌تر $\bar{P}f$ ($\bar{Q}f$) یک چندجمله‌ای نسبت به x (y) است که ضرایب آن توابعی نسبت به y (x) هستند. △

گزاره ۲.۵ *عملگر $\bar{P}\bar{Q}$ تابع f را روی $\mathcal{N}$ درونیابی می‌کند.*

برهان. برای $1 \le k \le n$ و برای $1 \le l \le m$ داریم

$$\bar{P}\bar{Q}f(x_k,y_l) = \sum_{i=1}^{n} \bar{Q}f(x_i,y_l)\phi_i(x_k) = \bar{Q}f(x_k,y_l) = \sum_{j=1}^{m} f(x_k,y_j)\psi_j(y_l) = f(x_k,y_l).$$

□

با توجه به تعریف دقیق $\bar{P}\bar{Q}$ یعنی

$$\bar{P}\bar{Q}f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)\phi_i(x)\psi_j(y),$$

واضح است که $\bar{P}\bar{Q} = \bar{Q}\bar{P}$.

گزاره ۳.۵ *اگر $\{\phi_i \ : \ i = 1,\dots,n\}$ و $\{\psi_j \ : \ j = 1,\dots,m\}$ مجموعه‌های مستقل خطی از توابع تعریف‌شده به ترتیب روی مجموعه‌های X و Y باشند، آنگاه $\{\phi_i\psi_j \ : \ i = 1,\dots,n, \ j = 1,\dots,m\}$ یک مجموعه از توابع مستقل خطی تعریف‌شده روی مجموعه $X \times Y$ خواهد بود.*

برهان. فرض کنید $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\phi_i\psi_j = 0$. بنابراین برای هر x داریم

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\phi_i(x)\right)\psi_j = 0,$$

و در نتیجه برای هر j و x داریم $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\phi_i(x) = 0$ که معادل است با اینکه برای هر j داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\phi_i = 0$ که نتیجه می‌دهد برای هر i,j خواهیم داشت $c_{ij} = 0$. □

تعریف ۲.۵ *اگر Φ و Ψ فضاهای خطی از توابع تعریف‌شده به ترتیب روی X و Y به توی $\mathbb{R}$ باشند آنگاه فضای خطی $\Phi\otimes\Psi$ به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\Phi\otimes\Psi = \{\phi\psi \ : \ \phi\in\Phi,\ \psi\in\Psi\},$$

که در آن $\phi\psi$ تابعی روی $X\times Y$ با ضابطه $\phi\psi(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ است. به بیان دقیق‌تر

$$\Phi\otimes\Psi = \left\{\sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i\psi_i \ : \ N\in\mathbb{N},\ c_i\in\mathbb{R},\ \phi_i\in\Phi,\ \psi_i\in\Psi\right\}.$$

به کمک نماد ضرب تانسوری داریم $(\phi\otimes\psi)(x,y) = \phi(x)\psi(y)$. $\phi\otimes\psi$ به دوتایی[3] معروف است و $\Phi\otimes\Psi$ با دوتایی‌ها تولید می‌شود.

گزاره ۴.۵ *اگر $\{\phi_i \ : \ i = 1,\dots,n\}$ و $\{\psi_j \ : \ j = 1,\dots,m\}$ پایه برای فضاهای به ترتیب Φ و Ψ باشند، آنگاه $\{\phi_i\psi_j \ : \ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m\}$ یک پایه برای فضای $\Phi\otimes\Psi$ خواهد بود.*

برهان. استقلال خطی مجموعه داده‌شده به کمک گزاره ۳.۵ به دست می‌آید و چون

$$\left(\sum_i a_i\phi_i\right)\left(\sum_j b_j\psi_j\right) = \sum_{ij} c_{ij}\phi_i\psi_j,$$

واضح است که فضای $\Phi\otimes\Psi$ توسط مجموعه داده‌شده تولید می‌شود. □

مثال ۳.۵ *یک پایه برای فضای $\mathbb{P}_n\otimes\mathbb{P}_m$ عبارت است از*

$$\{(x,y)\to x^iy^j \ : \ i = 0,\dots,n,\ j = 0,\dots,m\},$$

که برای نمونه شامل تک‌جمله‌ای x^ny^m است. واضح است که $\mathbb{P}_n\otimes\mathbb{P}_m$ زیرمجموعه سره‌ای از $\mathbb{P}^2_{n+m}$ است (تک‌جمله‌ای‌های x^{n+m} و y^{n+m} را در نظر بگیرید). △

بنابر گزاره ۲.۵ داریم.

قضیه ۲.۵ *داده‌های دلخواه روی هر مجموعه از گره‌های (نقاط) متمایز به صورت $\mathcal{N} = \{x_0,\dots,x_n\}\times\{y_0,\dots,y_m\}$ را می‌توان به کمک عناصر $\mathbb{P}_n\otimes\mathbb{P}_m$ به طور یکتا درونیابی کرد.*

---
[3] Dyad

تذکر ۲.۵ *به کمک گزاره ۴.۵ می‌توان پایه‌های دیگری برای فضای $\mathbb{P}_n \otimes \mathbb{P}_m$ ساخت. اگر $\{\phi_i \ : \ i = 0, \ldots, n\}$ و $\{\psi_j \ : \ j = 0, \ldots, m\}$ توابع پایه‌ای درونیاب به ترتیب روی مجموعه نقاط $\{x_0, \ldots, x_n\}$ و $\{y_0, \ldots, y_m\}$ باشند یعنی $\phi_i(x_k) = \delta_{ik}$ و $\psi_j(y_l) = \delta_{jl}$ آنگاه $\{\phi_i \otimes \psi_j \ : \ i = 0, \ldots, n, \ j = 0, \ldots, m\}$ یک پایه برای فضای $\mathbb{P}_n \otimes \mathbb{P}_m$ خواهد بود و داریم $(\phi_i \otimes \psi_j)(x_k, y_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} = \delta_{(i,j),(k,l)}$.*

قضیه ۳.۵ *فرض کنید $f(x,y)$ تابعی دلخواه و $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ و $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$ نقاطی متمایز به ترتیب در راستای محور x و y باشند. چندجمله‌ای یکتای $p(x,y)$ حداکثر از درجه n نسبت به x و حداکثر از درجه m نسبت به y چنان وجود دارد که*

$$p(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = f_{ij}, \qquad i = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, m.$$

برهان. چندجمله‌ای $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} L_i(x) L_j(y)$ را در نظر بگیرید که در آن L_i و L_j چندجمله‌ای‌های لاگرانژ یک متغیره هستند و چون در شرط دلتای کرونکر صدق می‌کنند خواهیم داشت

$$p(x_k, y_l) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} L_i(x_k) L_j(y_l) = f_{kl}, \qquad k = 0, \ldots, n, \quad l = 0, \ldots, m.$$

برای اثبات یکتایی فرض کنید $p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$ و $p_2(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} x^i y^j$ دو چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط مفروض باشند. بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) x_k^i y_l^j = 0, \qquad k = 0, \ldots, n, \quad l = 0, \ldots, m.$$

اگر قرار دهیم $c_{il} = \sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) y_l^j$ آنگاه $\sum_{i=0}^{n} c_{il} x_k^i = 0$ و یا

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0l} \\ \vdots \\ c_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

و چون نقاط x_k متمایز هستند دترمینان ماتریس واندرموند مخالف صفر است و در نتیجه برای هر i داریم $c_{il} = 0$ و از این رو $\sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) y_l^j = 0$ و بنابراین داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & y_0 & \cdots & y_0^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_m & \cdots & y_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i0} - b_{i0} \\ \vdots \\ a_{im} - b_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

و چون نقاط y_l متمایز هستند دترمینان ماتریس واندرموند مخالف صفر است و در نتیجه برای هر i و j داریم $a_{ij} = b_{ij}$.

□

تذکر ۳.۵ *بنابراین ثابت شد اگر نقاط بر روی یک شبکه مستطیلی توزیع شده باشند (به شکل ۱.۵ نگاه کنید)، مسئله درونیابی جواب یکتا دارد. برای سایر حالاتی که مسئله درونیابی در بعد دو (یا بالاتر) جواب یکتا دارد به مرجع [۷]*

مراجعه کنید.

شکل ۱.۵: توزیع نقاط روی یک شبکه مستطیلی

قضیه ۴.۵ *اگر $f \in C^{n+1,m+1}(\Omega)$ و نقاط شبکه هم‌فاصله با اندازه گام h_x و h_y روی محور x و y باشند آنگاه*

$$|f(x,y)-p(x,y)| = O(h_x^{n+1}) + O(h_y^{m+1}).$$

برهان. تعریف می‌کنیم $\phi(x,y) = \sum_{j=0}^{m} L_j(y) f(x,y_j)$. برای x ثابت، $\phi(x,y)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر m نسبت به y است و بنابر قضیه خطای درونیابی یک متغیره داریم

$$|\phi(x,y)-f(x,y)| = O(h_y^{m+1}).$$

همچنین با تعریف $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\phi(x_i,y)$، به طور مشابه خواهیم داشت

$$|p(x,y)-\phi(x,y)| = O(h_x^{n+1}).$$

با ترکیب دو نابرابری به دست آمده، حکم نتیجه می‌شود. $\square$

تعریف ۳.۵ *توابع $c_0(t),\ldots,c_{n+2}(t)$ را اسپلاین‌های مکعبی اساسی [۴] در نقاط $t_0,\ldots,t_n$ نامند هرگاه*

$$\begin{aligned} &c_j(t_k) = \delta_{kj}, \qquad j = 0,\ldots,n+2, \quad k = 0,\ldots,n,\\ &c'_j(t_0) = c'_j(t_n) = 0 \qquad j = 0,\ldots,n, \end{aligned}$$

$$c'_{n+1}(t_0) = c'_{n+2}(t_n) = 1, \quad c'_{n+1}(t_n) = c'_{n+2}(t_0) = 0.$$

ثابت می‌شود (بررسی کنید) اسپلاین مکعبی مقید را می‌توان به صورت زیر ساخت

$$sp(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j c_j(t) + x'_0 c_{n+1}(t) + x'_n c_{n+2}(t).$$

حال به کمک ضرب تانسوری و با استفاده از اسپلاین‌های مکعبی اساسی، می‌توان اسپلاین‌های دومکعبی روی شبکه مستطیلی ساخت. به همین منظور تعریف می‌کنیم

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{m+2} \beta_{ij} c_i(x) c_j(y).$$

[۴] Fundamental

اگر برای $i = 0,\dots,n$ و $j = 0,\dots,m$ قرار دهیم $\beta_{ij} = f_{ij}$ به وضوح S درونیابی برای f در نقاط شبکه خواهد بود. برای معرفی کامل S به $(m+3)(n+3) - (m+1)(n+1) = 2m + 2n + 8$ شرط اضافی دیگر نیاز داریم که در ادامه یک انتخاب ممکن بیان شده است

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_i, y_j), \quad i = 0, n, \quad j = 0, m,\\
&\frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j), \qquad i = 0, n, \quad j = 0,\dots,m,\\
&\frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j), \qquad j = 0, m, \quad i = 0,\dots,n.
\end{aligned}$$

ثابت می‌شود این اسپلاین دومکعبی یکتا است و به شرط همواری f به اندازه کافی، خطایی از مرتبه $O(h^4)$ دارد (نقاط روی دو محور هم‌فاصله با اندازه گام h در نظر گرفته شده‌اند).

پروژه ۱.۵ *لاگرانژ دوبعدی و اسپلاین دومکعبی.*

۲.۵ درونیابی با توابع قطعه‌ای چندجمله‌ای

فرض کنید Ω یک چندضلعی محدب در $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر Ω یک ناحیه محدب باشد مرز آن را با چندضلعی محدب تقریب می‌زنیم. Ω را می‌توان به k عنصر یا جزء یا المان ناهم‌پوشان[5] T تجزیه کرد (بیشتر مواقع عناصر مثلث هستند) و به این طریق یک شبکه‌بندی (مثلث‌سازی) روی Ω به دست می‌آید که آن را با τ_h نمایش می‌دهند . به وضوح $\overline{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T$. فرض کنید طول بزرگ‌ترین یال (ضلع) در مثلث‌سازی از عدد مثبت h بزرگ‌تر نباشد. در یک مثلث‌سازی (شبکه‌بندی) مجاز (پذیرفتنی) اشتراک هر دو مثلث حداکثر یا در یک راس یا در یک یال است و هر گره شبکه باید راس یک مثلث باشد و هر راس مثلث باید یک گره شبکه باشد و اگر گره‌ای از شبکه به مثلثی تعلق داشته باشد باید یکی از رئوس آن مثلث باشد. در شکل ۲.۵ نمونه‌هایی از مثلث‌سازی را می‌بینید.

شکل ۲.۵: شبکه‌بندی مجاز (چپ) و شبکه‌بندی غیرمجاز (راست)

به کمک نگاشت آفین

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F_T\left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}\right) = B_T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

[5] None-overlapping element

با وارون

$$\hat{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = F_{_T}^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = B_{_T}^{-1}\begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix},$$

که در آن

$$B_{_T} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix},$$

می‌توان هر مثلث $T \in \tau_{_h}$ با مساحت $|T|$ و رئوس $a_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$، $i = 1, 2, 3,$ را به مثلث مرجع $\hat{T}$ با مساحت ۱/۲ و رئوس $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ در صفحه $\hat{x}\hat{y}$ منتقل کرد (شکل ۳.۵ را ببینید).

شکل ۳.۵: انتقال مثلث دلخواه به مثلث مرجع

نگاشت آفین بیان‌شده از اهمیت ویژه‌ای در کارهای محاسباتی برخوردار است زیرا به محض آن که یک پایه برای نمایش درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای روی $\hat{T}$ ساخته شود، کافی است از تغییر متغیر $\mathrm{x} = F_{_T}(\hat{\mathrm{x}})$ برای بازسازی چندجمله‌ای روی هر عنصر T از $\tau_{_h}$ استفاده کرد. بنابراین علاقمندیم توابع پایه را به صورت موضعی (روی عنصر مرجع) بسازیم و به مثلث T انتقال دهیم بدون آن که به اطلاعاتی از مثلث‌های مجاور نیاز داشته باشیم. فرض کنید گره‌های درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای روی $\tau_{_h}$ به صورت زیر باشند

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ldots, z_{_N} = \begin{bmatrix} x_{_N} \\ y_{_N} \end{bmatrix},$$

و

$$\mathbb{P}_k^2(\Omega) = \{p(x, y) = \sum_{0 \le i+j \le k} a_{ij} x^i y^j \ : \ \Omega \to \mathbb{R}\},$$

و برای $k \ge 0$، $\tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ فضای توابع قطعه‌ای چندجمله‌ای حداکثر درجه k روی Ω باشد به طوری که برای هر $p \in \tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ داشته باشیم $p|_{_T} \in \mathbb{P}_k(T)$ برای هر $T \in \tau_{_h}$. یک پایه مقدماتی برای $\tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ به کمک چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i(x, y)$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که برای $i, j = 1, \ldots, N$ داشته باشیم $L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ (به شکل ۴.۵ نگاه کنید).

سپس برای $k \ge 0$، درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای لاگرانژ حداکثر درجه k تابع f یعنی $\pi_h^k f \in \tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ به صورت زیر

تعریف می‌شود

$$\pi_h^k f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f(z_i) L_i(x,y). \tag{1.5}$$

شکل ۴.۵: توابع شکلی

باید توجه داشت که $\pi_h^0 f$ یک تابع قطعه‌ای ثابت و در نتیجه ناپیوسته است و به همین دلیل کمتر استفاده می‌شود در حالی که $\pi_h^1 f$ یک تابع قطعه‌ای است که روی هر المان خطی و روی رئوس مثلث پیوسته و در نتیجه در سراسر Ω پیوسته است. برای هر $T \in \tau_h$، تحدید درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای لاگرانژ حداکثر درجه k تابع f روی المان T را با $\pi_T^k f$ نمایش می‌دهیم. بنابر تعریف داریم $\pi_T^k f \in \mathbb{P}_k(T)$ و با توجه به $d_k = \dim \mathbb{P}_k(T) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ می‌توان نوشت

$$\pi_T^k f(x,y) = \sum_{m=0}^{d_k-1} f(\tilde{z}_{T,m}) L_{T,m}(x,y), \qquad \forall T \in \tau_h,$$

که در آن $\tilde{z}_{T,m}$ برای $m = 0, \dots, d_k - 1$ گره‌های درونیابی روی T هستند و $L_{T,m}(x,y)$ تحدید چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ با اندیس i در رابطه (۱.۵) روی T است به طوری که در اندیس‌گذاری سراسری، گره z_i متناظر با گره موضعی $\tilde{z}_{T,m}$ باشد. بنابراین داریم $L_{T,j}(\mathrm{x}) = \hat{L}_j \circ F_T^{-1}(\mathrm{x})$ که در آن $\hat{L}_j = \hat{L}_j(\hat{\mathrm{x}})$ برای $j = 0, \dots, d_k - 1$، jامین تابع پایه‌ای لاگرانژ برای $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ تولیدشده روی عنصر مرجع $\hat{T}$ است. اگر $k = 0$ آنگاه $d_0 = 1$ یعنی فقط یک گره درونیابی موضعی (مرکز ثقل مثلث T) وجود دارد حال آن که اگر $k = 1$ آنگاه $d_1 = 3$ یعنی سه گره درونیابی موضعی منطبق بر سه راس T وجود دارد (به شکل ۵.۵ نگاه کنید). توزیع نقاط به گونه‌ای است که ثابت می‌شود درونیاب یکتا است. برای $k \geq 3$ به مراجع روش عناصر متناهی[6] مانند [۱۹] مراجعه کنید.

شکل ۵.۵: گره‌های درونیابی

[6] Finite element method

مثال ۴.۵ *برای درونیابی دوخطی یعنی برای $k = ۱$ و $d_۱ = ۳$ داریم*

$$\hat{L}_۰(\hat{x},\hat{y}) = ۱ - \hat{x} - \hat{y}, \qquad \hat{L}_۱(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}, \qquad \hat{L}_۲(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y},$$

برای درونیابی درجه دو یعنی برای $k = ۲$ و $d_۲ = ۶$ داریم

$$\hat{L}_۰(\hat{x},\hat{y}) = (۱ - \hat{x} - \hat{y})(۱ - ۲\hat{x} - ۲\hat{y}), \qquad \hat{L}_۱(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y}(۲\hat{y} - ۱), \qquad \hat{L}_۲(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}(۲\hat{x} - ۱),$$
$$\hat{L}_۳(\hat{x},\hat{y}) = ۴\hat{x}(۱ - \hat{x} - \hat{y}), \qquad \hat{L}_۴(\hat{x},\hat{y}) = ۴\hat{x}\hat{y}, \qquad \hat{L}_۵(\hat{x},\hat{y}) = ۴\hat{y}(۱ - \hat{x} - \hat{y}).$$

$\triangle$

به شکل ۶.۵ نگاه کنید.

شکل ۶.۵: درونیابی موضعی

اگر برای $T \in \tau_h$ بزرگترین طول یال T را با h_T نمایش دهیم، ثابت می‌شود

$$\left\|f - \pi_T^k f\right\|_{\infty,T} \le C h_T^{k+۱} \left\|f^{(k+۱)}\right\|_{\infty,T},$$

که در آن نرم بینهایت روی مثلث T حساب می‌شود و C ثابتی مستقل از h_T و f است و اگر مثلث‌سازی منظم باشد یعنی ثابت σ چنان وجود داشته باشد که $\forall T : \frac{h_T}{\rho_T} \ge \sigma$ که در آن برای هر T، ρ_T قطر دایره محاطی T است، آنگاه به شرط همواری f به اندازه کافی می‌توان نوشت

$$\left\|f - \pi_h^k f\right\|_{\infty,\Omega} \le C h^{k+۱} \left\|f^{(k+۱)}\right\|_{\infty,\Omega}.$$

فصل ۶

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱.۶ مشتق‌گیری عددی

در این بخش یا با یک تابع مواجه هستیم که ترجیح می‌دهیم به طور مستقیم از ضابطه آن مشتق نگیریم و یا ممکن است با جدولی از مقدارهای یک تابع مشتق‌پذیر روبرو باشیم و قصد داشته باشیم مشتق‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم و برای این منظور می‌توان از چندجمله‌ای درون‌یاب، بسط تیلور و روش گاوس استفاده کرد و به کمک فن برون‌یابی ریچاردسون تقریب بهتری به دست آورد.

۱.۱.۶ استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب

چندجمله‌ای درون‌یاب تقریب دقیقی (خوبی) از تابع در نقاط درون‌یابی به دست می‌دهد و امیدواریم مشتق چندجمله‌ای درون‌یاب نیز تقریب خوبی از مشتق تابع در نقاط درون‌یابی باشد، به شکل ۱.۶ توجه کنید.

شکل ۱.۶: بررسی مشتق چندجمله‌ای درون‌یاب

فرض کنید $\{x_0, \dots, x_n\}$، $n+1$ نقطه متمایز در بازه I بوده و $f \in C^{n+1}(I)$. بنابر قضیه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب

داریم

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)}_{P(x)}+\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

که در آن $\xi(x)\in I$. با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k L'_k(x)+\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right)f^{(n+1)}(\xi(x))+\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\frac{df^{(n+1)}(\xi(x))}{dx}}_{t_n(x)}.$$

از این رابطه می‌توان برای تقریب $f'(x)$ به ازای هر $x\in I$ استفاده نمود ولی مشکل اصلی، تعیین جمله خطای برشی[1] $t_n(x)$ است زیرا از $f^{(n+1)}(\xi(x))$ اطلاع کافی در دسترس نیست. اما اگر x یکی از نقاط درون‌یابی مانند x_j باشد خواهیم داشت

$$f'(x_j)=\sum_{k=0}^{n} f_k L'_k(x_j)+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}\prod_{j\neq k=0}^{n}(x_j-x_k)}_{t_n(x_j)}.$$

این عبارت یک رابطه $n+1$ نقطه‌ای برای تقریب مشتق است. در ادامه طرح‌های دو، سه و پنج نقطه‌ای معرفی می‌شوند که در مشتق‌گیری عددی پرکاربرد هستند.

با توجه به درون‌یابی در نقاط x_{i-1}، x_i و x_{i+1} می‌توان نوشت $L_{i-1}(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$ بنابراین

$$L'_{i-1}(x)=\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$$

و به طور مشابه داریم

$$L'_i(x)=\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})},\qquad L'_{i+1}(x)=\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

در نتیجه برای $j=i-1,i,i+1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}f'(x_j)=f(x_{i-1})\frac{2x_j-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+f(x_i)\frac{2x_j-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+\\ f(x_{i+1})\frac{2x_j-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}+\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_j)\prod_{j\neq k=i-1}^{i+1}(x_j-x_k)\end{aligned}$$

که در آن ξ_j وابسته به x_j است. اگر نقاط هم فاصله باشند یعنی برای $k=i-1,i$ داشته باشیم $x_{k+1}-x_k=h$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}f'(x_{i-1})&=f'_{i-1}=\frac{-3f_{i-1}+4f_i-f_{i+1}}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_{i-1})\\ f'(x_i)&=f'_i=\frac{-f_{i-1}+f_{i+1}}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_i)\\ f'(x_{i+1})&=f'_{i+1}=\frac{f_{i-1}-4f_i+3f_{i+1}}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_{i+1})\end{aligned}$$

---
[1] Truncation error

و با تغییر اندیس خواهیم داشت

$$f_i' = f'(x_i) = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_1), \quad x_i < \xi_1 < x_{i+2} \quad \text{(پیشرو سه نقطه‌ای)}$$
$$f_i' = f'(x_i) = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_2), \quad x_{i-1} < \xi_2 < x_{i+1} \quad \text{(مرکزی سه نقطه‌ای)}$$
$$f_i' = f'(x_i) = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_3), \quad x_{i-2} < \xi_3 < x_i \quad \text{(پسرو سه نقطه‌ای)}$$

تذکر ۱.۶ *در مقایسه با طرح‌های سه نقطه‌ای، رابطه‌های دو نقطه‌ای زیر از دقت کمتری برخوردار هستند*

$$f_i' = f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad \text{پیشرو دو نقطه‌ای}$$
$$f_i' = f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{پسرو دو نقطه‌ای}$$

در حالتی که نقاط هم‌فاصله باشند می‌توان از رابطه‌های درون‌یابی پیشرو (پسرو) نیوتن استفاده نمود. به عنوان مثال چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن در نقاط هم‌فاصله $x_i, \dots, x_{i+k}$ عبارت است از

$$p(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}$$

و با توجه به این که $f(x) \simeq p(x)$ قرار می‌دهیم $f'(x) \simeq p'(x)$ و در نتیجه

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h} \left(\Delta f_i + (\theta - \frac{1}{2}) \Delta^2 f_i + (\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}) \Delta^3 f_i + \cdots \right)$$

(توجه داریم که $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dp}{d\theta}$). حال اگر $x = x_i$ ($\theta = 0$)، خواهیم داشت

$$f'(x_i) = f_i' \simeq \frac{1}{h} \left(\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i + \frac{1}{3} \Delta^3 f_i - \frac{1}{4} \Delta^4 f_i + \cdots \right)$$

که با انتخاب یک یا دو یا چند جمله از عبارت داخل پرانتز می‌توان رابطه‌های تقریبی متفاوتی به دست آورد، به عنوان مثال

$$f_i' \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \qquad f_i' \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i) = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}, \qquad \cdots$$

تمرین ۱.۶ *با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن رابطه‌هایی به صورت پسرو برای مشتق به دست آورید.*

تذکر ۲.۶ *با انتخاب* $x = x_i + \frac{h}{2}$ $(\theta = \frac{1}{2})$ *رابطه زیر به دست می‌آید*

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \cdots)$$

و از آن‌جا خواهیم داشت

$$f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{\Delta f_i}{h}, \qquad f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i), \quad \cdots.$$

تمرین ۲.۶ *با استفاده از بسط تیلور $f(x_i+h)$ و $f(x_i+\frac{h}{۲})$ نشان دهید $\frac{\Delta f_i}{h}$ برای تقریب $f'_{i+\frac{۱}{۲}}$ دقیق‌تر است تا برای تقریب f'_i، به عبارت دیگر داریم*

$$f'_i=\frac{\Delta f_i}{h}+O(h),\qquad f'_{i+\frac{۱}{۲}}=\frac{\Delta f_i}{h}+O(h^۲).$$

۲.۱.۶ استفاده از بسط تیلور

برای به دست آوردن رابطه‌های تقریبی مشتق می‌توان از بسط تیلور توابع

$$\dots,f(x-۲h),f(x-h),f(x+h),f(x+۲h),\dots$$

استفاده کرده و یک ترکیب خطی از آن‌ها به گونه‌ای ساخت که خطا از مرتبه $O(h^p)$ باشد.

مثال ۱.۶ به کمک *رابطه‌های*

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\tfrac{h^۲}{۲!}f''(x)+\tfrac{h^۳}{۳!}f'''(x)+\cdots$$
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\tfrac{h^۲}{۲!}f''(x)-\tfrac{h^۳}{۳!}f'''(x)+\cdots$$

طرح‌های $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h)$، $f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h)$ و $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{۲h}+O(h^۲)$ *به دست می‌آیند. هم‌چنین به کمک بسط تیلور*

$$f(x\pm ۲h)=f(x)\pm ۲hf'(x)+\frac{(۲h)^۲}{۲!}f''(x)\pm\frac{(۲h)^۳}{۳!}f'''(x)+\cdots$$

و ساختن ترکیب خطی $f(x-۲h)-۸f(x-h)+۸f(x+h)-f(x+۲h)$ *به رابطه*

$$f'(x)=\frac{۱}{۱۲h}(f(x-۲h)-۸f(x-h)+۸f(x+h)-f(x+۲h))+\frac{h^۴}{۳۰}f^{(۵)}(\xi)$$

خواهیم رسید که یک رابطه پنج نقطه‌ای با خطای برشی $O(h^۴)$ است و در آن $x-۲h\le\xi\le x+۲h$. △

تمرین ۳.۶ به کمک روش بسط تیلور، *رابطه پنج نقطه‌ای پیشرو یعنی*

$$f'(x)=\frac{۱}{۱۲h}(-۲۵f(x)+۴۸f(x+h)-۳۶f(x+۲h)+۱۶f(x+۳h)-۳f(x+۴h))+\frac{h^۴}{۵}f^{(۵)}(\xi)$$

را استخراج کنید که در آن $x\le\xi\le x+۴h$. *سپس با تبدیل h به $-h$ شکل پسروی آن را نیز به دست آورید.*

۳.۱.۶ روش گاوس

تعریف ۱.۶ گوییم مرتبه دقت (صحت) *یک عبارت تقریبی n است اگر آن رابطه برای چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n دقیق باشد. به عنوان مثال اگر ضریب h^p در یک رابطه با خطای $O(h^p)$ برابر $f^{(p+۱)}(\xi)$ باشد آن‌گاه مرتبه دقت آن روش به وضوح p خواهد بود.*

با یک نگاه به رابطه‌های تقریبی مشتق، می‌توان همه آن‌ها را به صورت کلی زیر معرفی کرد

$$f'(x_i) = \sum_{k=n_1}^{n_2} w_k f(x_k) + E$$

که در آن $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. برای ساختن یک عبارت n نقطه‌ای برای تقریب مشتق، ابتدا اگر بخواهیم به صورت پیشرو عمل کنیم، قرار می‌دهیم $n_1 = i$ و $n_2 = i+n-1$ و اگر بخواهیم به صورت پسرو عمل نماییم، قرار می‌دهیم $n_1 = i-n+1$ و $n_2 = i$ و اگر بخواهیم به صورت مرکزی عمل کنیم، قرار می‌دهیم $n_1 = i - \frac{n-1}{2}$ و $n_2 = i + \frac{n-1}{2}$. سپس ضرایب w_kها را به گونه‌ای به دست می‌آوریم که مرتبه دقت رابطه $n-1$ باشد.

مثال ۲.۶ *رابطه پنج نقطه‌ای پسرو برای تقریب مشتق مرتبه اول را با روش گاوس بسازید.*
ابتدا قرار می‌دهیم

$$f'(x_i) = w_{i-4}f_{i-4} + w_{i-3}f_{i-3} + w_{i-2}f_{i-2} + w_{i-1}f_{i-1} + w_i f_i + E$$

و سپس به ازای $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$ *قرار می‌دهیم* $E = 0$ *و دستگاه معادله‌های زیر را می‌سازیم*

$$\begin{cases} 0 = w_{i-4} + w_{i-3} + w_{i-2} + w_{i-1} + w_i \\ 1 = w_{i-4}x_{i-4} + w_{i-3}x_{i-3} + w_{i-2}x_{i-2} + w_{i-1}x_{i-1} + w_i x_i \\ 2x_i = w_{i-4}x_{i-4}^2 + w_{i-3}x_{i-3}^2 + w_{i-2}x_{i-2}^2 + w_{i-1}x_{i-1}^2 + w_i x_i^2 \\ 3x_i^2 = w_{i-4}x_{i-4}^3 + w_{i-3}x_{i-3}^3 + w_{i-2}x_{i-2}^3 + w_{i-1}x_{i-1}^3 + w_i x_i^3 \\ 4x_i^3 = w_{i-4}x_{i-4}^4 + w_{i-3}x_{i-3}^4 + w_{i-2}x_{i-2}^4 + w_{i-1}x_{i-1}^4 + w_i x_i^4 \end{cases}$$

و از حل آن خواهیم داشت

$$w_{i-4} = \frac{1}{4h},\ w_{i-3} = \frac{-4}{3h},\ w_{i-2} = \frac{3}{h},\ w_{i-1} = \frac{-4}{h},\ w_i = \frac{25}{12h}.$$

با انتخاب $f(x) = x^5$ *می‌توان جمله خطا را به دست آورد.* △

۴.۱.۶ فن برون‌یابی ریچاردسون

فن برون‌یابی ریچاردسون کاربرد وسیعی در بسیاری از مباحث آنالیز عددی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی دارد و در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم. فرض کنید به ازای عدد مخالف صفر h (به عنوان مثال h اندازه گام است) رابطه $N(h)$ تقریبی برای کمیت M باشد و خطای مرتکب شده به صورت زیر قابل ارایه باشد

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots \qquad (1.6)$$

که در آن $K_۱, K_۲, \ldots$ کمیت‌های ثابتی هستند. چون رابطه (۱.۶) به ازای هر h برقرار است با تبدیل h به $\frac{h}{۲}$ در آن خواهیم داشت

$$M = N(\frac{h}{۲}) + K_۱\frac{h}{۲} + K_۲\frac{h^۲}{۴} + K_۳\frac{h^۳}{۸} + \cdots \tag{۲.۶}$$

اگر رابطه (۱.۶) را از دو برابر رابطه (۲.۶) کم کنیم می‌توان نوشت

$$M = (۲N(\frac{h}{۲}) - N(h)) + (\frac{۱}{۲} - ۱)K_۲h^۲ + (\frac{۱}{۴} - ۱)K_۳h^۳ + (\frac{۱}{۸} - ۱)K_۴h^۴ + \cdots$$

یعنی به‌کمک تقریب کم دقت $M = N(h) + O(h)$ به تقریب دقیق‌تر $M = (۲N(\frac{h}{۲}) - N(h)) + O(h^۲)$ دست یافتیم.
حال با فرض $N_۱(h) = N(h)$ و $N_۲(h) = (۲N_۱(\frac{h}{۲}) - N_۱(h))$ می‌توان نوشت

$$M = N_۲(h) - \frac{K_۲}{۲}h^۲ - \frac{۳K_۳}{۴}h^۳ - \frac{۷K_۴}{۸}h^۴ - \cdots. \tag{۳.۶}$$

با تبدیل h به $\frac{h}{۲}$ در رابطه (۳.۶) به رابطه زیر می‌رسیم

$$M = N_۲(\frac{h}{۲}) - \frac{K_۲}{۸}h^۲ - \frac{۳K_۳}{۳۲}h^۳ - \frac{۷K_۴}{۱۲۸}h^۴ - \cdots. \tag{۴.۶}$$

اگر رابطه (۳.۶) را از چهار برابر رابطه (۴.۶) کم کنیم خواهیم داشت

$$M = \frac{۴N_۲(\frac{h}{۲}) - N_۲(h)}{۳} + (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸})K_۳h^۳ + (\frac{۷}{۲۴} - \frac{۷}{۹۶})K_۴h^۴ + \cdots$$

و با فرض $N_۳(h) = \frac{۴N_۲(\frac{h}{۲}) - N_۲(h)}{۳}$، از تقریب کم دقت $M = N_۲(h) + O(h^۲)$ به تقریب دقیق‌تر $M = N_۳(h) + O(h^۳)$ رسیدیم و با یک روند استقرایی به ازای $j = ۲, ۳, \ldots$ به نتیجه زیر دست می‌یابیم

$$M = N_j(h) + O(h^j)$$

که در آن

$$N_j(h) = \frac{۲^{j-۱}N_{j-۱}(\frac{h}{۲}) - N_{j-۱}(h)}{۲^{j-۱} - ۱}.$$

مثال ۳.۶ *با استفاده از بسط تیلور، رابطه سه نقطه‌ای مرکزی برای تقریب مشتق به صورت زیر به دست می‌آید*

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h} - \frac{h^۲}{۶}f'''(x_i) - \frac{h^۴}{۱۲۰}f^{(۵)}(x_i) - \cdots.$$

با فرض $M = f'(x_i)$ و $N(h) = N_۱(h) = \frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h} = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{۲h}$، از تکرار فن برون‌یابی ریچاردسون به ازای $j = ۲, ۳, \ldots$ خواهیم داشت

$$f'(x_i) = N_j(h) + O(h^{۲j})$$

N_1	N_2	N_3
$N_1(0/2) = 22/414160$		
$N_1(0/1) = 22/228786$	$N_2(0/2) = 22/166995$	
$N_1(0/05) = 22/182564$	$N_2(0/1) = 22/167157$	$N_3(0/2) = 22/167168$

جدول ۱.۶: جدول برون‌یابی ریچاردسون برای مشتق‌گیری عددی

که در آن

$$N_j(h) = \frac{4^{j-1} N_{j-1}(\frac{h}{2}) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}.$$

با انتخاب $f(x) = xe^x$، $x_i = 2/0$ و $h = 0/2$ جدول ۱.۶ به دست می‌آید. از مقایسه $N_3(0/2)$ با مقدار دقیق $f'(2/0) = 3/0e^{2/0} = 22/167168$ نتیجه می‌گیریم تمام ارقام با معنای $N_3(0/2)$ درست هستند. $\triangle$

تذکر ۳.۶ با استفاده از طرح‌های مشتق‌گیری عددی، می‌توان رابطه‌هایی برای تقریب مشتق‌های مراتب بالاتر یک تابع نیز به دست آورد. به عنوان مثال با دوبار مشتق‌گیری از چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن خواهیم داشت

$$f''(x) \simeq \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_i + (\theta - 1)\Delta^3 f_i + \cdots)$$

و با انتخاب $x = x_i$ ($\theta = 0$) رابطه‌های

$$f''(x_i) = f''_i \simeq \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}, \qquad f''_i \simeq \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i), \qquad \cdots$$

نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین خطای برشی این طرح‌ها را به دست آورید.

تمرین ۴.۶ از تابع $y = f(x)$ در بازه $[0, 1]$، داده‌های جدول زیر در دسترس است.

x	0	$0/25$	$0/375$	$0/5$	$0/625$	$0/75$	1
$f(x)$	0	$0/13506$	$0/16061$	$0/16887$	$0/16552$	$0/15490$	$0/12385$

آ- مقدار تقریبی $f'(0)$، $f'(0/5)$ و $f'(1)$ را به چند روش حساب کنید.

ب- مقدار تقریبی $f''(0)$، $f''(0/5)$ و $f''(1)$ را به چند روش حساب کنید.

پ- در صورت امکان، به کمک فن برونیابی ریچاردسون جواب‌های دقیق‌تری برای دو قسمت قبل به دست آورید.

تذکر ۴.۶ در حالت کلی رابطه‌های مشتق دارای خطایی از مرتبه $O(h^p)$ هستند که بستگی به تعداد نقاط درون‌یابی دارد. در ظاهر یا باید p بزرگ باشد که منجر به افزایش محاسبات (فراخوانی تابع) و رشد خطای گرد کردن می‌شود و یا باید h کوچک باشد که این نیز ممکن است مشکل‌ساز باشد، به عنوان نمونه در محاسبه $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ اگر h کوچک باشد f_i و f_{i+1} به هم نزدیک خواهند بود و تفاضل دو عدد نزدیک به هم باعث از بین رفتن ارقام بامعنا خواهد شد که منجر به تولید خطا می‌شود و این خطا به عدد کوچکی (h) تقسیم می‌شود که خطای تولید شده را بزرگ خواهد کرد. از طرف دیگر اگر p تقریب خوبی برای f باشد دلیلی ندارد p' نیز تقریب خوبی برای f' باشد. به همین دلیل سعی می‌شود مشتق‌گیری عددی با احتیاط انجام شود.

۲.۶ انتگرال‌گیری عددی

محاسبه $\int_a^b x(t)dt$ زمانی که تابع اولیه x در دسترس نیست یا محاسبه تابع اولیه به سادگی امکان‌پذیر نیست و یا وقتی که از x فقط داده‌های جدولی در دسترس است از مسایل اساسی انتگرال‌گیری است. برای حل این مسئله، در این فصل قصد داریم انتگرال‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم. به عنوان مثال می‌توان به انتگرال‌های $\int_a^b e^{-t^2}\, dt$، $\int_{-a}^{a} \sqrt[n]{1+t^n}dt$ و $\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$ اشاره کرد. در واقع یکی از مسایل مستقیم مهم و پرکاربرد، انتگرال‌گیری عددی است. در اینجا با مسئله مستقیم $y = Lx$ مواجه هستیم که $L : X \to Y$ (X و Y فضاهای خطی نرم‌دار هستند) یک عملگر خطی و کران‌دار است.

تمرین ۵.۶ *اگر* $Lx = \int_a^b x(t)dt$ *و* $X = C[a, b]$ *همراه با نرم بینهایت در نظر گرفته شود نشان دهید* $\|L\| = b - a$.

بیشتر مواقع محاسبه Lx به سادگی امکان‌پذیر نیست و y را به طور تقریبی به دست می‌آوریم. به همین منظور دو راه‌کار پیشنهاد می‌شود که عبارتند از

۱. تقریب x با x_n و سپس محاسبه $y_n = Lx_n$ به عنوان تقریبی از y.

۲. تقریب L با L_n و سپس محاسبه $y_n = L_nx$ به عنوان تقریبی از y.

زمانی که راه‌کار اول را دنبال کنیم قضیه زیر قابل بررسی است.

قضیه ۱.۶ *اگر x_n به x با مرتبه p همگرا باشد آنگاه y_n به y حداقل با مرتبه p همگرا می‌شود.*

برهان. بنابر تعریف و ویژگی‌های بیان‌شده داریم

$$\|y - y_n\| = \|L(x - x_n)\| \leq \|L\| \, \|x - x_n\| \leq C \, \|L\| \, n^{-p}.$$

□ دنبال کردن راه‌کار دوم به سادگی راه‌کار اول نیست. با توجه به نابرابری

$$\|y - y_n\| = \|(L - L_n)x\| \leq \|L - L_n\| \, \|x\| \,,$$

اگر داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \|L - L_n\| = 0,$$

آنگاه همگرایی y_n به y نتیجه می‌شود.

مثال ۴.۶ *فرض کنید* $Lx = \int_0^1 x(t)dt$ *و جمع ریمان* $L_nx = h\sum_{i=0}^{n-1} x(ih)$ *را برای* $h = 1/n$ *در نظر بگیرید. اگر عملگرهای L و L_n را روی فضای* $X = C[0, 1]$ *همراه با نرم بینهایت در نظر بگیریم آنگاه*

$$\lim_{n\to\infty} \|L - L_n\| \neq 0.$$

برای نشان دادن این نابرابری، n را ثابت گرفته و ϕ_n را تابع پیوسته قطعه‌ای چندجمله‌ای درجه یک به صورت زیر در

نظر بگیرید

$$\phi_n(ih) = 0, \qquad i = 0, \ldots, n,$$
$$\phi_n((i+1/2)h) = 1, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

به وضوح $L\phi_n = 1/2$ و $L_n\phi_n = 0$ و بنابراین

$$\|L - L_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(L-L_n)x\| \geq 1/2, \qquad \forall n.$$

$\triangle$

زمانی که راه‌کار دوم را دنبال کنیم قضیه ارزشمند زیر را داریم.

قضیه ۲.۶ *فرض کنید $\phi_1, \phi_2, \ldots$ یک پایه برای فضای خطی نرم‌دار X باشد و $X_n = \mathrm{Span}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. اگر $\{L_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی کران‌دار یکنواخت باشند که روی X_n دقیق بوده (یعنی $L_nx_n = Lx_n$ برای هر $x_n \in X_n$) و داشته باشیم $\sup_n \|L_n\| \leq l$، آنگاه $y_n = L_nx \to Lx = y$ و داریم $\|y - y_n\| \leq (\|L\| + l)\epsilon_n$ که در آن $\epsilon_n = \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|$.*

برهان. برای هر n داریم

$$\|y - y_n\| = \|(L - L_n)x\| = \|Lx - Lx_n + Lx_n - L_nx_n + L_nx_n - L_nx\| \leq \|L(x - x_n)\| + \|L_n(x - x_n)\|,$$

و از آنجا برای هر $x_n \in X_n$ خواهیم داشت $\|y - y_n\| \leq (\|L\| + l)\,\|x - x_n\| \leq (\|L\| + l)\epsilon_n$. چون $\phi_1, \phi_2, \ldots$ یک پایه برای X تشکیل می‌دهد، یک دنباله از $x_n \in X_n$ چنان وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \|y - y_n\| = 0$. $\square$

تذکر ۵.۶ *اگر $Lx = \int_a^b x(t)dt$ آنگاه قواعد انتگرال‌گیری نیوتن-کاتس[۲] مبتنی بر درونیابی بوده و از ایده اول پیروی می‌کنند حال آن که قواعد گاوس[۳] بر اساس ایده دوم پایه‌ریزی شده‌اند.*

۱.۲.۶ قواعد نیوتن-کاتس

ایده اصلی این قواعد استفاده از تقریب $I = \int_a^b x(t)dt \simeq \int_a^b p_n(t)dt$ است که در آن p_n چندجمله‌ای درونیاب x است. این قواعد به دو دسته بسته و باز تقسیم‌بندی می‌شوند. در نوع بسته برای عدد صحیح $n > 0$ فرض می‌شود $h = (b-a)/n$ و چندجمله‌ای درونیاب درجه n تابع x یعنی p_n روی نقاط $t_i = a + ih$ برای $i = 0, \ldots, n$ ساخته می‌شود. پس

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} x_iL_i(t), \qquad L_i(t) = \prod_{i \neq k = 0}^{n} (t - t_k)/(t_i - t_k),$$

[۲] Newton-Cotes
[۳] Gauss rules

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
α_0	۲	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{55}{24}$	$\frac{66}{20}$	$\frac{4277}{1440}$
α_1	۰	۰	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{84}{20}$	$-\frac{3171}{1440}$
α_2	۰	۰	۰	۰	$\frac{156}{20}$	$\frac{3934}{1440}$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
α_0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{41}{140}$
α_1	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{375}{288}$	$\frac{216}{140}$
α_2	۰	۰	۰	$\frac{24}{45}$	$\frac{250}{288}$	$\frac{27}{140}$
α_3	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{272}{140}$

جدول ۲.۶: ضرایب قواعد نیوتن‌ـکاتس بسته (چپ) و باز (راست)

که با تغییر متغیر $t = a + hs$ داریم $L_i(t) = \phi_i(s) = \prod_{i\neq k=0}^{n}(s-k)/(i-k)$ و در نتیجه

$$I_n = \int_a^b p_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n} x_i \int_a^b L_i(t)dt = h\sum_{i=0}^{n} x_i \int_0^n \phi_i(s)ds = h\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i,$$

که در آن وزن‌های $\alpha_i = \int_0^n \phi_i(s)ds$ فقط به n بستگی دارند و به a، b و حتی x وابسته نیستند. در قواعد باز برای عدد صحیح $n \geq 0$ فرض می‌شود $h = (b-a)/(n+2)$ و $t_{-1} = a$، $t_{n+1} = b$ و برای $i = 0, \dots, n$، $t_i = a + (i+1)h$ و مشابه قواعد بسته خواهیم داشت

$$I_n = h\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i, \qquad \alpha_i = \int_{-1}^{n+1}\phi_i(s)ds.$$

کافی است ضرایب قواعد $n+1$ نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس را یک بار حساب کرده و جدولی مانند جدول ۲.۶ ساخت و بارها از آن استفاده کرد. در این جدول برای قواعد بسته به ازای $i = 0, \dots, n-1$ داریم $\alpha_i = \alpha_{n-i}$ و برای قواعد باز به ازای $i = 0, \dots, n$ داریم $\alpha_i = \alpha_{n-i}$.

قضیه ۳.۶ *در قواعد $n+1$ نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس با n زوج به شرط آن که $x \in C^{n+2}[a,b]$ داریم*

$$E_n = I - I_n = \frac{M_n}{(n+2)!}h^{n+3}x^{(n+2)}(\xi),$$

و برای n فرد به شرط آن که $x \in C^{n+1}[a,b]$ داریم

$$E_n = \frac{M_n}{(n+1)!}h^{n+2}x^{(n+1)}(\xi).$$

$\xi \in (a,b)$ و

$$M_n = \int_c^d t^m \prod_{i=0}^{n}(t-i)dt,$$

که در آن برای قواعد بسته $c = 0,\ d = n$ و برای قواعد باز $c = -1,\ d = n+1$ و برای n زوج $m = 1$ و برای n فرد $m = 0$.

برهان. به صفحه 314-308 مرجع [۱۳] مراجعه کنید. □

تذکر ۶.۶ *قواعد نیوتن‌ـکاتس $n+1$ نقطه‌ای با n زوج خطایی از مرتبه $O(h^{n+3})$ داشته و برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $n+1$ دقیق هستند (درجه دقت آنها $n+1$ است) حال آن که برای n فرد خطایی از مرتبه $O(h^{n+2})$ داشته و*

برای چندجمله‌ای‌های تا درجه n دقیق هستند (درجه دقت آنها n است).

تذکر ۷.۶ *چون از یک طرف با بزرگ شدن n وزن‌ها افزایش می‌یابند و از طرف دیگر برای $n > ۶$ برای قواعد بسته ضرایب منفی تولید می‌شوند (جهت جلوگیری از پدیده از بین رفتن ارقام بامعنا ناشی از تفاضل دو عدد نزدیک به هم) قواعدی مقبول‌تر هستند که ضرایب منفی تولید نکنند و بنابراین جهت جلوگیری از رشد خطا قواعد نیوتن-کاتس با nهای بزرگ کمتر استفاده می‌شوند.*

تذکر ۸.۶ *برای محاسبه انتگرال‌هایی مانند $\int_{-۱}^{۱} \frac{dt}{t\sqrt{۱-t^۲}}$ قواعد بسته کارایی ندارند و بهتر است از قواعد باز استفاده کرد.*

برای به دست آوردن قواعد دقیق‌تر بهتر است از قواعد مرکب[۴] استفاده کرد. به همین منظور ابتدا بازه $[a,b]$ را به m (عدد طبیعی) زیربازه $T_j = [t_j, t_{j+۱}]$ که در آن $t_j = a + jH$ به طوری که $H = (b-a)/m$ تقسیم کرده و روی هر زیربازه از یک قاعده $n+۱$ نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. اگر $t_j = t_۰^{(j)} < t_۱^{(j)} < \cdots < t_n^{(j)} = t_{j+۱}$ نقاط هم‌فاصله با اندازه گام h و $\alpha_i^{(j)}$ برای $i = ۰, \ldots, n$ وزن‌های نظیر باشند، آنگاه

$$I = \int_a^b x(t)dt = \sum_{j=۰}^{m-۱} \int_{T_j} x(t)dt \simeq I_{n,m} = h \sum_{j=۰}^{m-۱} \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i^{(j)} x(t_i^{(j)}).$$

قضیه ۴.۶ *در قواعد نیوتن-کاتس مرکب با n زوج به شرط آن که $x \in C^{n+۲}[a,b]$ داریم*

$$E_{n,m} = I - I_{n,m} = \frac{(b-a)M_n}{(n+۲)!(n+۲)^{n+۳}} H^{n+۲} x^{(n+۲)}(\xi),$$

و برای n فرد به شرط آن که $x \in C^{n+۱}[a,b]$ داریم

$$E_{n,m} = \frac{(b-a)M_n}{(n+۱)!n^{n+۲}} H^{n+۱} x^{(n+۱)}(\xi).$$

$\xi \in (a,b)$ و M_n همانند قضیه ۳.۶ تعریف می‌شود.

برهان. به عنوان تمرین. □

تذکر ۹.۶ *درجه دقت قواعد مرکب همان درجه دقت قواعد ساده است ولی مرتبه خطای قواعد مرکب یک واحد کمتر از مرتبه خطای قواعد ساده است.*

تعریف ۲.۶ *هنگ (مدول) پیوستگی[۵] تابع $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ که با $\delta(x;H)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از*

$$\delta(x;H) = \sup \left\{ |x(t) - x(s)|,\ t,s \in [a,b],\ s \neq t,\ ۰ < |t-s| \leq H \right\}.$$

ثابت می‌شود هنگ پیوستگی x به صفر میل می‌کند (هرگاه $H \to ۰$) اگر و فقط اگر x پیوسته یکنواخت باشد.

---
[۴] Composite
[۵] Modulus of continuity

قضیه ۵.۶ *اگر $x \in C[a,b]$ و ضرایب $\alpha_i^{(j)}$ نامنفی باشند، آنگاه*

$$\lim_{m\to\infty} I_{n,m} = \int_a^b x(t)dt, \qquad \forall n \geq ۰.$$

به علاوه

$$\left|\int_a^b x(t)dt - I_{n,m}\right| \leq ۲(b-a)\delta(x;H).$$

برهان. به صفحه 343-341 مرجع [۱۳] مراجعه کنید. $\square$ برای به دست آوردن قواعد دقیق‌تر، به نظر می‌رسد بهتر است درونیاب را تقویت کرد. به همین منظور از درونیاب هرمیت استفاده می‌کنیم. برای سادگی فرض کنید $۲n+۲$ مقدار $x(t_i)$ و $x'(t_i)$ برای $i = ۰,\ldots,n$ در دسترس باشند. درونیاب هرمیت ساده x به صورت زیر ساخته می‌شود

$$p_{۲n+۱}(t) = \sum_{i=۰}^{n}\left(x(t_i)\left(۱ - \frac{w''_{n+۱}(t_i)}{w'_{n+۱}(t_i)}(t-t_i)\right) + x'(t_i)(t-t_i)\right)L_i^۲(t),$$

که در آن L_i همان چندجمله‌ای iام درجه n لاگرانژ در نقاط $t_۰,\ldots,t_n$ است و $w_{n+۱}(t) = (t-t_۰)\cdots(t-t_n)$. با انتگرال‌گیری از درونیاب داریم

$$I_n = \sum_{i=۰}^{n}\alpha_i x(t_i) + \sum_{i=۰}^{n}\beta_i x'(t_i),$$

که در آن

$$\alpha_i = \int_a^b\left(۱ - \frac{w''_{n+۱}(t_i)}{w'_{n+۱}(t_i)}(t-t_i)\right)L_i^۲(t)dt, \qquad \beta_i = \int_a^b (t-t_i)L_i^۲(t)dt.$$

ثابت می‌شود درجه دقت این قاعده $۲n+۱$ است. برای $n=۱$ این قاعده به صورت زیر در می آید

$$I_۱^{gt} = \frac{b-a}{۲}\left(x(a)+x(b)\right) + \frac{(b-a)^۲}{۱۲}\left(x'(a)-x'(b)\right),$$

و به قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته (اصلاح‌شده) معروف است و اگر $x \in C^۴[a,b]$ خواهیم داشت

$$E_۱^{gt} = I - I_۱^{gt} = \frac{(b-a)^۵}{۷۲۰}x^{(۴)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b),$$

یعنی خطایی مشابه قاعده سیمسون. به سادگی می‌توان قاعده مرکب نظیر را به صورت زیر به دست آورد

$$I_{۱,m}^{gt} = \frac{b-a}{۲m}\left(x(a) + ۲\sum_{i=۱}^{m-۱}x(t_i) + x(b)\right) + \frac{(b-a)^۲}{۱۲m^۲}(x'(a)-x'(b)),$$

و $E_{۱,m}^{gt} = \frac{b-a}{۷۲۰}h^۴x^{(۴)}(\xi)$ که در آن $\xi \in (a,b)$ و h اندازه گام نقاط هم‌فاصله است. بنابراین قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته مرکب با حجم عملیات کم، به خوبی با قاعده سیمسون مرکب رقابت می‌کند (هر دو با خطایی از مرتبه $O(h^۴)$ و درجه دقت سه). قاعده ذوزنقه مرکب برای توابعی که $x'(a) = x'(b)$ (به عنوان مثال توابع متناوب) خطایی در حد و اندازه روش سیمسون مرکب دارد و محدودیت آن را ندارد (نیاز به n زوج). تنها ایراد وارد بر قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته نیاز به مشتق در دو انتها است که به کمک تقریب‌های تفاضلی پیشرو/پسرو برطرف می‌شود. به کمک درونیاب هرمیت

تعمیم‌یافته می‌توان قواعد انتگرال‌گیری کلی‌تری به دست آورد که دارای شکل کلی زیر هستند

$$I_n[x] = \sum_{k=0}^{m_0} a_{k0}x(t_{k0}) + \sum_{k=0}^{m_1} a_{k1}x'(t_{k1}) + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} a_{kn}x^{(n)}(t_{kn}).$$

بنابراین خطای قاعده انتگرال‌گیری عبارت است از $R[x] = I_n[x] - \int_a^b x(t)dt$. به وضوح R یک عملگر خطی روی یک فضای برداری مناسب مانند $\mathbb{P}_n$ یا $C^n[a,b]$ است ($R[\alpha x + \beta y] = \alpha R[x] + \beta R[y]$). به کمک قضیه زیر که به نمایش خطای پئانو[۶] معروف است می‌توان خطای قواعد انتگرال‌گیری مبتنی بر درونیابی را به دست آورد.

قضیه ۶.۶ *اگر برای هر $p \in \mathbb{P}_n$ داشته باشیم $R[p] = 0$، یعنی قاعده انتگرال‌گیری برای هر چندجمله‌ای حداکثر درجه n دقیق باشد (درجه دقت قاعده n باشد)، آنگاه*

$$R[x] = \int_a^b x^{(n+1)}(s)K(s)ds, \qquad \forall x \in C^{n+1}[a,b],$$

که در آن $K(s) = \frac{1}{n!}R[(t-s)_+^n]$ به هسته[۷] پئانو معروف است.

برهان. با نوشتن بسط تیلور تابع x حول $t_0 = a$، داریم

$$x(t) = x(a) + x'(a)(t-a) + \cdots + \frac{x^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + r_n(t), \tag{۵.۶}$$

که در آن

$$r_n(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s)^n ds = \frac{1}{n!}\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds.$$

با اعمال عملگر R بر رابطه (۵.۶) و با توجه به درجه دقت n داریم

$$R[x] = R[r_n] = \frac{1}{n!}R\left[\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right].$$

ابتدا نشان می‌دهیم

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) = \int_a^b x^{(n+1)}(s)\frac{d^k}{dt^k}\left((t-s)_+^n\right)ds, \qquad 1 \le k \le n. \tag{۶.۶}$$

چون تابع $(t-s)_+^n$، $n-1$ بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر است رابطه (۶.۶) به وضوح برای $1 \le k < n$ برقرار است و برای $k = n-1$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) &= \int_a^b x^{(n+1)}(s)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left((t-s)_+^n\right)ds \\ &= n!\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+ ds = n!\int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s)ds.\end{aligned}$$

---

[۶] Peano's error representation

[۷] Kernel

انتگرال آخر به عنوان تابعی از t مشتق‌پذیر است زیرا انتگرال‌ده آن به عنوان تابعی از s,t پیوسته است و در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) &= \frac{d}{dt}\left(n!\int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s)ds\right)\\ &= n!\frac{d}{dt}\left(t\int_a^t x^{(n+1)}(s)ds - \int_a^t sx^{(n+1)}(s)ds\right)\\ &= n!\left(\int_a^t x^{(n+1)}(s)ds + tx^{(n+1)}(t) - tx^{(n+1)}(t)\right)\\ &= \int_a^t x^{(n+1)}(s)n!ds = \int_a^b x^{(n+1)}(s)\frac{d^n}{dt^n}\left((t-s)_+^n\right)ds.\end{aligned}$$

از طرف دیگر چون $x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n$ تابعی پیوسته است

$$\int_a^b\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right)dt = \int_a^b x^{(n+1)}(s)\left(\int_a^b (t-s)_+^n dt\right)ds,$$

و بنابراین $R[x] = \frac{1}{n!}\int_a^b x^{(n+1)}(s)R\left[(t-s)_+^n\right]ds$. □

تذکر ۱۰.۶ *برای بسیاری از قواعد انتگرال‌گیری هسته پئانو تغییر علامت نمی‌دهد و بنابر قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته نقطه $\xi\in(a,b)$ چنان وجود دارد که*

$$R[x] = x^{(n+1)}(\xi)\int_a^b K(s)ds.$$

این رابطه برای هر تابع x برقرار است و به ویژه برای $x(t)=t^{n+1}$ داریم

$$\int_a^b K(s)ds = \frac{R[t^{n+1}]}{(n+1)!},$$

و در نتیجه

$$R[x] = \frac{R[t^{n+1}]}{(n+1)!}x^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi\in(a,b).$$

مثال ۵.۶ *قاعده سیمسون را در نظر بگیرید*

$$R[x] = \frac{1}{3}x(-1) + \frac{4}{3}x(0) + \frac{1}{3}x(1) - \int_{-1}^{1} x(t)dt.$$

این قاعده برای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه سه دقیق است زیرا

$$\begin{aligned} &R[1] = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-2=0, \quad && R[t] = \frac{-1}{3}+\frac{1}{3}-0=0,\\ &R[t^2] = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0, && R[t^3] = \frac{-1}{3}+\frac{1}{3}-0=0.\end{aligned}$$

بنابراین $n = 3$ و در نتیجه

$$K(s) = \frac{1}{6}R[(t-s)_+^3] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}(-1-s)_+^3 + \frac{4}{3}(0-s)_+^3 + \frac{1}{3}(1-s)_+^3 - \int_{-1}^{1}(t-s)_+^3 dt\right)$$

و از آنجا داریم

$$K(s) = \frac{1}{6}\left(0 + \frac{4}{3}\begin{cases} 0 & s \geq 0 \\ -s^3 & s < 0 \end{cases} + \frac{1}{3}(1-s)^3 - \int_{s}^{1}(t-s)^3 dt\right) = \begin{cases} \frac{1}{72}(1-s)^3(1+3s) & 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{1}{72}(1+s)^3(1-3s) & -1 \leq s \leq 0 \end{cases}$$

برای هر $s \in [-1, 1]$ به وضوح $K(s) \geq 0$ و چون $\frac{R[t^4]}{4!} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \int_{-1}^{1} t^4 dt\right) = \frac{1}{90}$ پس

$$\frac{1}{3}x(-1) + \frac{4}{3}x(0) + \frac{1}{3}x(1) - \int_{-1}^{1} x(t)dt = \frac{x^{(4)}(\xi)}{90}, \qquad \xi \in (-1, 1).$$

△

تمرین ۶.۶ *خطای قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته را به دست آورید.*

تذکر ۱۱.۶ *قواعد نیوتن_کاتس $n+1$ نقطه‌ای برای n زوج دارای درجه دقت $n+1$ و برای n فرد دارای درجه دقت n هستند و ثابت می‌شود هسته پئانو برای آنها تغییر علامت نمی‌دهد و در نتیجه*

$$R[x] = \frac{R[t^{n+m}]}{(n+m)!}x^{(n+m)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b),$$

که در آن برای n فرد $m = 1$ و برای n زوج $m = 2$.

پروژه ۱.۶ *برنامه‌ای بنویسید که n را دریافت کرده و قاعده ساده و مرکب نیوتن_کاتس $n+1$ نقطه‌ای باز (بسته) را همراه با جمله خطای آن بسازد.*

۳.۶ استفاده از فن برونیابی

قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته حالت خاصی ($m = 1$) از برابری زیر است

$$\int_{0}^{1} x(t)dt = \frac{x(0)}{2} + \frac{x(1)}{2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(x^{(2l-1)}(0) - x^{(2l-1)}(1)\right) - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}g^{(2m+2)}(\xi),$$

که در آن $m \in \mathbb{N}$، $\xi \in (0, 1)$، $x \in C^{2m+2}[0, 1]$ و

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = \frac{-1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = \frac{-1}{30},\ \ldots,$$

به اعداد برنولی معروف هستند (برای اثبات این برابری به صفحه 157-159 مرجع [۲۲] مراجعه کنید). برابری بیان‌شده در اصل یک قاعده انتگرال‌گیری است که قاعده مرکب نظیر آن به صورت زیر به دست می‌آید (بررسی کنید)

$$\frac{x(0)}{2}+x(1)+\cdots+x(n-1)+\frac{x(n)}{2}=\int_0^n x(t)dt+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(x^{(2l-1)}(n)-x^{(2l-1)}(0)\right)+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}nx^{(2m+2)}(\xi),$$

که در آن $x\in C^{2m+2}[0,n]$ و $\xi\in(0,n)$. این رابطه به فرمول جمعی اویلر_مکلورن[8] معروف است.

مثال ۶.۶ *نشان دهید* $\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

به کمک فرمول جمعی اویلر_مکلورن و با انتخاب $x(t)=t^3$ *داریم*

$$\frac{0}{2}+1+2^3+\cdots+(n-1)^3+\frac{n^3}{2}-\frac{B_2}{2}3n^2=\int_0^n t^3dt,$$

و در نتیجه

$$\sum_{k=0}^{n}k^3=\int_0^n t^3dt+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$\triangle$

اگر $x\in C^{2m+2}[a,b]$، به کمک تغییر متغیر $s=\frac{b-a}{n}t+a$ و استفاده از فرمول جمعی اویلر_مکلورن با انتخاب $h=(b-a)/n$ خواهیم داشت

$$T(h)=\tau_0+\tau_1h^2+\tau_2h^4+\cdots+\tau_mh^{2m}+\alpha_{m+1}(h)h^{2m+2}, \qquad (7.6)$$

که در آن $T(h)=h\left(\frac{x(s_0)}{2}+x(s_1)+\cdots+x(s_{n-1})+\frac{x(s_n)}{2}\right)$ (به طوری که $s_i=a+ih,\ i=0,\dots,n$) همان قاعده ذوزنقه مرکب است، $\tau_0=\int_a^b x(s)ds$،

$$\tau_k=\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(x^{(2k-1)}(b)-x^{(2k-1)}(a)\right),\qquad k=1,\dots,m,$$

و

$$\alpha_{m+1}(h)=\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)x^{(2m+2)}(\xi(h)),$$

که در آن $\xi(h)\in(a,b)$. به وضوح ثابت M_{m+1} چنان وجود دارد که $|\alpha_{m+1}(h)|\le M_{m+1}$. در نتیجه چون τ_k برای $k\le m$ به h بستگی ندارد پس سمت راست (۷.۶) یک بسط مجانبی است. بنابراین با کاهش h (افزایش n) جمله آخر در سمت راست رابطه (۷.۶) نسبت به سایر جملات کاهش بیشتری دارد و در نتیجه سمت راست این رابطه مانند یک چندجمله‌ای بر حسب h^2 رفتار کرده که برای $h=0$ مقدار τ_0 یعنی مقدار انتگرال را به دست می‌دهد. حال کافی است ابتدا دنباله‌ای از اندازه گام‌ها به صورت زیر انتخاب کنیم

$$h_0=\frac{b-a}{n_0},\ h_1=\frac{h_0}{n_1},\ \dots\ ,h_m=\frac{h_0}{n_m},$$

[8] Euler-Maclaurin summation formula

که در آن $n_۱,\dots,n_m$ اعداد طبیعی صعودی اکید هستند و بیشتر اوقات $n_\circ = ۱$. سپس مقادیر

$$T_{i\circ} = T(h_i), \qquad i = \circ,\dots,m,$$

را حساب کرده و سعی می‌کنیم چندجمله‌ای $p_{۲m}(h) = a_\circ + a_۱h^۲ + \cdots + a_mh^{۲m}$ را طوری به دست آوریم که برای $i = \circ,\dots,m$ داشته باشیم $p_{۲m}(h) = T_{i\circ}$. سپس با برونیابی $p_{۲m}(\circ)$ می‌توان تقریب مناسبی برای $\tau_\circ$ به دست آورد. اگر از درونیاب نویل (با انتخاب $t_i = h_i$) استفاده کنیم، رابطه بازگشتی (۳.۳) به صورت زیر ساده می‌شود

$$T_{ik} = T_{i,k-۱} + \frac{T_{i,k-۱} - T_{i-۱,k-۱}}{(h_{i-k}/h_i)^۲ - ۱} = \frac{(h_{i-k}/h_i)^۲ T_{i,k-۱} - T_{i-۱,k-۱}}{(h_{i-k}/h_i)^۲ - ۱}, \qquad ۱ \le k \le i \le m,$$

و اگر $x \in C^{۲k+۲}[a,b]$ ثابت می‌شود (بخش 3.5 مرجع [۲۲] را ببینید)

$$T_{ik} - \int_a^b x(s)ds = (b-a)h_{i-k}^۲ h_{i-k+۱}^۲ \cdots h_i^۲ \frac{(-۱)^k B_{۲k+۲}}{(۲k+۲)!} x^{(۲k+۲)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b).$$

در عمل کافی است از رابطه بازگشتی به دست آمده استفاده کرده و جدول نویل را بسازیم. در این جدول از چپ به راست با افزایش مرتبه خطا مواجه هستیم و از بالا به پایین قاعده مرکب‌تر می‌شود (کاهش h) و در نتیجه بهترین شرط توقف عبارت است از $|T_{kk} - T_{k-۱,k-۱}| < \epsilon$.

تذکر ۱۲.۶ *روش انتگرال‌گیری رامبرگ*[۹] *که در سال 1955 ارائه شد همان قاعده ذوزنقه است که فن برونیابی (ریچاردسون) بر روی آن اعمال شده باشد و در آن*

$$h_\circ = b-a, \qquad h_i = \frac{h_{i-۱}}{۲}, \quad i = ۱,۲,\dots.$$

مثال ۷.۶ *مقدار تقریبی* $\int_\circ^{\frac{\pi}{۴}} \sec t dt$ *را با روش رامبرگ به دست آورید.*
به وضوح رابطه بازگشتی نویل به صورت زیر در می‌آید

$$T_{ik} = \frac{۴^k T_{i,k-۱} - T_{i-۱,k-۱}}{۴^k - ۱}, \qquad ۱ \le k \le i \le m.$$

پس از محاسبه $T_{i\circ}$ به کمک قاعده ذوزنقه، جدول نویل را به صورت زیر می‌سازیم

h_i	$T_{i\circ}$	$T_{i۱}$	$T_{i۲}$	$T_{i۳}$
$\frac{\pi}{۴}$	۰/۹۴۸۰۶			
$\frac{\pi}{۸}$	۰/۸۹۹۰۸	۰/۸۸۲۷۶		
$\frac{\pi}{۱۶}$	۰/۸۸۵۸۹	۰/۸۸۱۴۹	۰/۸۸۱۴۰	
$\frac{\pi}{۳۲}$	۰/۸۸۲۵۱	۰/۸۸۱۳۸	۰/۸۸۱۳۷	۰/۸۸۱۳۷
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[۹] Romberg

داریم

$$|T_{33} - T_{22}| = |0/88137 - 0/88140| = 0/3 \times 10^{-4} < 0/5 \times 10^{-4},$$

و با مقایسه با مقدار واقعی

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt = (\ln(\sec t + \tan t))_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1) = 0/881373587,$$

در می‌یابیم که

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt - 0/88137\right| < 0/4 \times 10^{-5}.$$

$\triangle$

تذکر ۱۳.۶ *برخی از قواعد نیوتن-کاتس در جدول رامبرگ به دست می‌آیند. به عنوان نمونه T_{11} قاعده سیمسون و T_{22} قاعده میلن (قاعده پنج نقطه‌ای نیوتن-کاتس) است ولی T_{33} با هیچ یک از قواعد نیوتن-کاتس برابر نیست (بررسی کنید).*

تذکر ۱۴.۶ *در روش رامبرگ پس از نصف کردن اندازه گام، تعداد بازه‌ها دو برابر می‌شود و در نتیجه تعداد ارزیابی تابع دو برابر می‌شود که در اصل نیمی از ارزیابی‌ها در مرحله قبل به دست آمده‌اند و نیازی به محاسبه مجدد آنها نیست. در واقع داریم*

$$T(h_{i+1}) = T(\frac{h_i}{2}) = \frac{1}{2}T(h_i) + h_{i+1}(x(a+h_{i+1}) + x(a+3h_{i+1}) + \cdots + x(b-h_{i+1})).$$

بولیرش[10] و همکاران در سال 1964 دنباله

$$h_0 = b-a,\ h_1 = \frac{h_0}{2},\ h_2 = \frac{h_0}{3}, \qquad h_i = \frac{h_{i-1}}{2}, \quad i = 3, 4, \ldots,$$

را پیشنهاد دادند که حجم محاسبات آن از یک سطر به سطر بعد به اندازه روش رامبرگ افزایش نمی‌یابد (دو برابر نمی‌شود).

تذکر ۱۵.۶ *هر زمان که یک بسط مجانبی وجود داشته باشد می‌توان از ایده برونیابی استفاده کرد. به عنوان نمونه برای برخی دیگر از قواعد نیوتن-کاتس مانند قاعده سیمسون نیز بسط مجانبی وجود دارد و می‌توان روشی مشابه روش رامبرگ ساخت. این ایده نه تنها در انتگرال‌گیری عددی بلکه در مشتق‌گیری عددی و حل عددی معادلات دیفرانسیل نیز قابل پیاده‌سازی است.*

تذکر ۱۶.۶ *به جای اینکه از درونیابی چندجمله‌ای استفاده کنیم می‌توان از سایر درونیاب‌ها مانند درونیابی گویا نیز استفاده کرد و پس از ساختن عبارت درونیاب، تقریبی از مقدار انتگرال را با برونیابی در صفر به دست آورد.*

---

[10] Bulirsch

پروژه ۲.۶ *برنامه‌ای بنویسد که برای یک قاعده انتگرال‌گیری که دارای بسط مجانبی است، جدول نویل را برای دنباله دلخواه از اندازه گام‌ها بسازد و تقریب‌های بهتری برای یک انتگرال داده‌شده به دست آورد.*

۴.۶ قواعد گاوس

در این بخش قصد داریم مقدار تقریبی انتگرال $I = \int_a^b w(t)x(t)dt$ را به دست آوریم. $[a,b]$ یک بازه متناهی یا یک سر متناهی یا حتی دو سر نامتناهی است و w یک تابع وزن است که باید در سه شرط زیر صدق کند

- w یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی بازه $[a,b]$ باشد،
- گشتاورهای $\mu_k = \int_a^b t^k w(t)dt$ برای $k = ۰, ۱, \ldots$ موجود (متناهی) باشند،
- اگر برای چندجمله‌ای s که روی بازه $[a,b]$ نامنفی است، داشته باشیم $\int_a^b w(t)s(t)dt = ۰$ آنگاه $s(t) = ۰$.

شرایط بیان‌شده شرایط سنگینی نیستند. به عنوان نمونه اگر بازه $[a,b]$ متناهی باشد کافی است w تابعی پیوسته و مثبت روی بازه باشد. شرط سوم معادل است با اینکه $\int_a^b w(t)dt > ۰$ (نشان دهید).

تعریف ۳.۶ *فضای توابع*

$$L_w^۲[a,b] := \left\{ x : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \ : \ \int_a^b w(t)x^۲(t)dt < \infty \right\},$$

یک فضای ضرب داخلی است با ضرب داخلی $(x,y) := \int_a^b w(t)x(t)y(t)dt$ *و نرم القائی* $\|x\|^۲ = \displaystyle\int_a^b w(t)x^۲(t)dt$.
توابع x و y نسبت به وزن w متعامد نامیده می‌شوند هرگاه $(x,y) = ۰$.

قرارداد ۱.۶ منظور از $\bar{\mathbb{P}}_n$، *فضای چندجمله‌ای‌های درجه n با جمله پیشرو t^n است.*

قضیه ۷.۶ *چندجمله‌ای‌های $p_j \in \bar{\mathbb{P}}_j$ برای $j = ۰, ۱, \ldots$ چنان وجود دارند که برای $i \neq k$ داشته باشیم $(p_i, p_k) = ۰$. این چندجمله‌ای‌ها به طور یکتا از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند*

$$p_{i+۱}(t) = (t - \delta_{i+۱})p_i(t) - \gamma_{i+۱}^۲ p_{i-۱}(t), \quad i = ۰, ۱, \ldots, \tag{۸.۶}$$

که در آن $p_{-۱}(t) := ۰,\ p_۰(t) = ۱$ *و برای* $i \geq ۰$ *داریم* $\delta_{i+۱} = \dfrac{(tp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}$ *و برای* $i \geq ۱$ *داریم* $\gamma_{i+۱}^۲ = \dfrac{(p_i, p_i)}{(p_{i-۱}, p_{i-۱})}$.

برهان. چندجمله‌ای‌های متعامد را می‌توان به کمک فرایند گرام‌ـاشمیت (چندجمله‌ای‌های $۱, t, t^۲, \ldots$ را به عنوان ورودی در نظر می‌گیریم) ساخت. به وضوح $p_۰(t) = ۱$. فرض کنید $p_j \in \bar{\mathbb{P}}_j$ برای $۰ \leq j \leq i$ چندجمله‌ای‌های متعامد ساخته‌شده به کمک فرایند باشند که در رابطه بازگشتی (۸.۶) صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم چندجمله‌ای یکتای $p_{i+۱} \in \bar{\mathbb{P}}_{i+۱}$ چنان وجود دارد که

$$(p_{i+۱}, p_j) = ۰, \qquad ۰ \leq j \leq i, \tag{۹.۶}$$

و در رابطه بازگشتی داده‌شده صدق می‌کنند. به وضوح هر چندجمله‌ای $p_{i+1} \in \bar{\mathbb{P}}_{i+1}$ را می‌توان به صورت یکتای زیر نوشت

$$p_{i+1}(t) = (t - \delta_{i+1})p_i(t) + c_{i-1}p_{i-1}(t) + \cdots + c_0 p_0(t).$$

چون برای $j, k \le i$ که $k \ne j$ داریم $(p_j, p_k) = 0$، برای آن که (۹.۶) برقرار باشد لازم و کافی است داشته باشیم

$$(p_{i+1}, p_i) = (tp_i, p_i) - \delta_{i+1}(p_i, p_i) = 0, \tag{۱۰.۶}$$

$$(p_{i+1}, p_{j-1}) = (tp_{j-1}, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = 0, \quad j \le i. \tag{۱۱.۶}$$

(p_i, p_i) و (p_{j-1}, p_{j-1}) صفر نیستند زیرا در غیر این صورت (بنابر شرط سوم تابع وزن) باید داشته باشیم $p_k = 0$ برای $0 \le k \le i$ که تناقضی آشکار است. بنابراین با حل معادله (۱۰.۶)، δ_{i+1} به دست می‌آید و با حل (۱۱.۶) خواهیم داشت

$$c_{j-1} = -\frac{(tp_{j-1}, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})},$$

که با جای‌گذاری $p_j(t) = (t - \delta_j)p_{j-1}(t) - \gamma_j^2 p_{j-2}(t)$ (بنابر فرض استقرا) در آن داریم

$$c_{j-1} = -\frac{(p_j + \delta_j p_{j-1} + \gamma_j^2 p_{j-2}, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})},$$

که از آنجا بنابر فرض استقرا $c_{j-1} = 0$ برای $j < i$ و $c_{i-1} = -\dfrac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})} := -\gamma_{i+1}^2$. □

تذکر ۱۷.۶ *با انتخاب یک تابع وزن می‌توان چندجمله‌ای‌های متعامدی به دست آورد که در یک رابطه بازگشتی مرتبه دو صدق می‌کنند.*

تذکر ۱۸.۶ *واضح است که* $\mathbb{P}_n = \operatorname{Span}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ *و* $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$.

قضیه ۸.۶ p_n *برای* $n > 0$ *دارای* n *ریشه حقیقی ساده در بازه* (a, b) *است.*

برهان. اگر p_n در بازه (a, b) ریشه نداشته باشد پس در این بازه تغییر علامت نمی‌دهد و $\int_a^b w(t)p_n(t)dt = (p_0, p_n) = 0$ نتیجه می‌دهد (بنابر شرط سوم تابع وزن) $p_n = 0$ که تناقضی آشکار است. حال فرض کنید ریشه‌هایی از p_n که در بازه (a, b) بوده و مرتبه فرد دارند به صورت $a < t_1 < \cdots < t_l < b$ مرتب شده باشند. اگر برای چندجمله‌ای $q(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - t_j) \in \bar{\mathbb{P}}_l$ داشته باشیم $(q, p_n) = \int_a^b w(t)q(t)p_n(t)dt = 0$، چون چندجمله‌ای $p_n q$ در $[a, b]$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین (بنابر شرط سوم تابع وزن) $qp_n = 0$ که غیرممکن است و در نتیجه باید داشته باشیم $l = n$.
□

گزاره ۱.۶ *برای نقاط متمایز* $t_1, \ldots, t_n$ *ماتریس* $A = [p_{i-1}(t_j)]_{n \times n}$ *وارون‌پذیر است.*

برهان. اگر A وارون‌پذیر نباشد بردار ناصفر $c^T = [c_0 \ \cdots \ c_{n-1}]$ چنان وجود دارد که $c^T A = 0$ و بنابراین چندجمله‌ای $q(t) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(t)$ با درجه کمتر از n دارای n ریشه $t_1, \ldots, t_n$ است و باید متحد صفر باشد و چون $p_0, \ldots, p_{n-1}$ مستقل خطی هستند (زیرا متعامدند) باید داشته باشیم $c = 0$ که تناقضی آشکار است. □

تذکر ۱۹.۶ *بنابر گزاره بیان‌شده p_iها در شرط هار صدق کرده و یک دستگاه چبیشف تشکیل می‌دهند.*

قضیه ۹.۶ *آـ اگر $t_1,\dots,t_n$ ریشه‌های p_n باشند و $w_1,\dots,w_n$ جواب دستگاه خطی (وارون‌پذیر)*

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(t_i)w_i = \begin{cases} (p_0,p_0), & k=0,\\ 0, & k=1,\dots,n-1, \end{cases} \tag{12.6}$$

باشند آنگاه w_iها مثبت بوده و برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ خواهیم داشت

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p(t_i). \tag{13.6}$$

بـ برعکس اگر نقاط t_i و ضرایب w_i به گونه‌ای باشند که رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ برقرار باشد آنگاه نقاط، ریشه‌های چندجمله‌ای p_n بوده و ضرایب، جواب دستگاه خطی داده‌شده در قسمت آ هستند.
پـ نقاط و ضرایب را نمی‌توان طوری به دست آورد که رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n}$ برقرار باشد.

برهان. آـ چون p_n، n ریشه حقیقی و ساده در بازه (a,b) دارد بنابر گزاره ۱.۶ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} p_0(t_1) & \cdots & p_0(t_n)\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n-1}(t_1) & \cdots & p_{n-1}(t_n) \end{bmatrix},$$

وارون‌پذیر بوده و در نتیجه دستگاه (۱۲.۶) جواب یکتا دارد. هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$p(t) = p_n(t)q(t) + r(t), \tag{14.6}$$

که در آن $q,r\in\mathbb{P}_{n-1}$ و بنابر تذکر ۱۸.۶ می‌توان نوشت

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(t), \qquad r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(t).$$

بنابراین با توجه به تعامد چندجمله‌ای‌ها خواهیم داشت

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \int_a^b w(t)(p_n(t)q(t)+r(t))dt = (p_n,q)+(r,p_0) = \beta_0(p_0,p_0).$$

از طرف دیگر چون t_iها ریشه‌های p_n هستند

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p(t_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i r(t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{n} p_k(t_i)w_i\right) = \beta_0(p_0,p_0).$$

پس رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ برقرار است. برای هر $k = 1, \dots, n$ با توجه به چندجمله‌ای

$$\bar{p}_k(t) = \prod_{k \neq j = 1}^{n} (t - t_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2},$$

(بنابر شرط سوم تابع وزن) داریم

$$0 < \int_a^b w(t)\bar{p}_k(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{p}_k(t_i) = w_k \prod_{k \neq j = 1}^{n} (t_k - t_j)^2,$$

که دلالت بر آن دارد که w_kها مثبت هستند.

پ_ اگر رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p \in \mathbb{P}_{2n}$ برقرار باشد، برای چندجمله‌ای

$$\bar{p}(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - t_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n},$$

(بنابر شرط سوم تابع وزن) داریم

$$0 < \int_a^b w(t)\bar{p}(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{p}(t_i) = 0,$$

که تناقضی آشکار است.

ب_ نقاط t_i دو به دو متمایز هستند چه در غیر این صورت با بازنویسی مجدد قاعده انتگرال‌گیری (۱۳.۶)، با قسمت قبل به تناقض می‌رسیم. با به کار بردن قاعده (۱۳.۶) بر روی چندجمله‌ای‌های $p = p_k$ برای $k = 0, \dots, n-1$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p_k(t_i) = \int_a^b w(t)p_k(t)dt = (p_k, p_0) = \begin{cases} (p_0, p_0), & k = 0, \\ 0, & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

یعنی ضرایب $w_1, \dots, w_n$ جواب دستگاه خطی (۱۲.۶) هستند. با به کار بردن قاعده (۱۳.۶) بر روی چندجمله‌ای‌های $p = p_n p_k$ برای $k = 0, \dots, n-1$ داریم

$$0 = (p_n, p_k) = \int_a^b w(t)p_n(t)p_k(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p_n(t_i) p_k(t_i), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

به بیان دیگر بردار $c^T = [w_1 p_n(t_1) \ \cdots \ w_n p_n(t_n)]$ جواب دستگاه همگن $Ac = 0$ است و چون نقاط متمایز هستند بنابر گزاره ۱.۶ ماتریس A وارون‌پذیر است و در نتیجه $c = 0$. یعنی $w_i p_n(t_i) = 0$ برای $i = 1, \dots, n$. چون ثابت شد w_iها مثبت هستند پس باید داشته باشیم $p_n(t_i) = 0$ برای $i = 1, \dots, n$. □

$[a, b]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[0, \infty]$	$[-\infty, \infty]$
$w(t)$	1	$1/\sqrt{1-t^2}$	$\sqrt{1-t^2}$	$t^\alpha e^{-t}$	e^{-t^2}
چندجمله‌ای‌های متعامد	$p_n(t)$	$T_n(t)$	$U_n(t)$	$L_n^{(\alpha)}(t)$	$H_n(t)$

انتخاب‌های پرکاربرد تابع وزن و چندجمله‌ای‌های نظیر در جدول قبلی آمده است که در آن p_n، T_n، U_n، $L_n^{(\alpha)}$ و H_n به ترتیب بیانگر چندجمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف نوع اول، چبیشف نوع دوم، لاگور[11] مرتبه $\alpha > -۱$ و هرمیت است. انتخاب رایج تابع وزن $w(t) = ۱$ روی بازه $[-۱, ۱]$ به گاوس منسوب است و چندجمله‌ای‌های متعامدی که به دست می‌آیند عبارتند از

$$p_k(t) = \frac{k!}{(۲k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^۲ - ۱)^k, \qquad k = ۰, ۱, \ldots,$$

که تنها تفاوت آنها با چندجمله‌ای‌های لژاندر در یک ضریب است و به همین دلیل قواعد ساخته‌شده به قواعد گاوس‌ـلژاندر معروف شده‌اند. قاعده n نقطه‌ای گاوس‌ـلژاندر عبارت است از

$$\int_{-۱}^{۱} x(t)dt \simeq \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i),$$

که بنابر قضیه بیان‌شده دارای درجه دقت $۲n - ۱$ است و در آن t_iها ریشه‌های چندجمله‌ای درجه n لژاندر هستند. این چندجمله‌ای‌ها از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند

$$p_{k+۱}(t) = \frac{۲k + ۱}{k + ۱}tp_k(t) - \frac{k}{k + ۱}p_{k-۱}(t), \qquad k = ۱, ۲, \ldots,$$

که در آن $p_۰(t) = ۱,\ p_۱(t) = t$. ضرایب w_i را می‌توان از حل دستگاه خطی (۱۲.۶) به دست آورد. همچنین ثابت می‌شود

$$w_i = \int_{-۱}^{۱} \frac{p_n(t)}{(t - t_i)p'_n(t)}dt = \frac{۲(۱ - t_i^۲)}{n^۲(p_{n-۱}(t_i))^۲}, \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

در عمل کافی است یک بار نقاط و ضرایب را به دست آورد و بارها از آنها استفاده کرد. در قاعده دو نقطه‌ای گاوس‌ـلژاندر $w_۱ = w_۲ = ۱$ و $t_۲ = -t_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و در قاعده سه نقطه‌ای آن داریم $w_۱ = w_۳ = \frac{۵}{۹},\ w_۲ = \frac{۸}{۹}$ و $t_۳ = -t_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۵}},\ t_۲ = ۰$. فرمول صریحی برای نقاط و ضرایب قواعد n نقطه‌ای گاوس‌ـلژاندر برای $n > ۳$ وجود ندارد و باید به کمک نرم‌افزارها تقریب با دقتی از آنها را به دست آوریم. ثابت می‌شود ضرایب و نقاط نسبت به مبدا متقارن هستند و $۰ < w_i \leq ۱$ و در نتیجه بر خلاف قواعد نیوتن‌ـکاتس، قواعد گاوس‌ـلژاندر را می‌توان برای nهای بزرگ نیز به کار برد و انتظار نتایج دقیق‌تری داشت، البته به شرط آن که نقاط و ضرایب با دقت خوبی به دست آمده باشند.

تذکر ۲۰.۶ *انتگرال روی بازه $[a, b]$ را می‌توان با تغییر متغیر $s = ۲\frac{t-a}{b-a} - ۱$ به بازه $[-۱, ۱]$ انتقال داد.*

در حالت کلی خطای قواعد انتگرال‌گیری بیان‌شده در این بخش به کمک قضیه زیر مشخص می‌شوند.

قضیه ۱۰.۶ *اگر $x \in C^{۲n}[a, b]$ آنگاه*

$$\int_a^b w(t)x(t)dt - \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i) = \frac{x^{(۲n)}(\xi)}{(۲n)!}(p_n, p_n), \qquad \xi \in (a, b).$$

برهان. فرض کنید $p \in \mathbb{P}_{۲n-۱}$ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت ساده تابع x در نقاط $t_۱, \ldots, t_n$ باشد یعنی داشته باشیم

$$p(t_i) = x(t_i), \quad p'(t_i) = x'(t_i), \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

[11] Laguerre

چون درجه p حداکثر $۲n-۱$ است پس قاعده n نقطه‌ای برای آن دقیق است، یعنی

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \sum_{i=۱}^{n} w_i p(t_i) = \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i),$$

و در نتیجه

$$\int_a^b w(t)x(t)dt - \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i) = \int_a^b w(t)(x(t)-p(t))dt.$$

حال با توجه به خطای درونیاب هرمیت و اینکه t_iها ریشه‌های p_n هستند

$$x(t)-p(t) = \frac{x^{(۲n)}(\eta)}{(۲n)!}(t-t_۱)^۲\cdots(t-t_n)^۲ = \frac{x^{(۲n)}(\eta)}{(۲n)!}p_n^۲(t),$$

که در آن $\eta=\eta(t)$ به بازه $[a,b]$ تعلق دارد. اما تابع $\frac{x^{(۲n)}(\eta)}{(۲n)!} = \frac{x(t)-p(t)}{p_n^۲(t)}$ روی $[a,b]$ پیوسته است و $w(t)p_n^۲(t)$ در این بازه تغییر علامت نمی‌دهد و در نتیجه به کمک قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته برای انتگرال داریم

$$\int_a^b w(t)(x(t)-p(t))dt = \frac{۱}{(۲n)!}\int_a^b w(t)x^{(۲n)}(\eta(t))p_n^۲(t)dt = \frac{x^{(۲n)}(\xi)}{(۲n)!}(p_n,p_n).$$

□

قضیه ۱۱.۶ *اگر بازه $[a,b]$ متناهی باشد و $x\in C[a,b]$، آنگاه قاعده n نقطه‌ای گاوس به $\int_a^b w(t)x(t)dt$ همگرا است.*

برهان. به کمک قضیه تقریب وایرشتراس به سادگی قابل بررسی است. □ اگر ضرایب رابطه بازگشتی (۸.۶) در دسترس باشند برای ساختن قاعده n نقطه‌ای، ابتدا ماتریس سه‌قطری

$$J_n = \begin{bmatrix} \delta_۱ & \gamma_۲ & & & 0 \\ \gamma_۲ & \delta_۲ & \gamma_۳ & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{n-۱} & \delta_{n-۱} & \gamma_n \\ 0 & & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix},$$

را ساخته و سپس از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۶ *نقاط $t_۱,\dots,t_n$ ویژه‌مقدارهای ماتریس J_n هستند و اگر $v^{(۱)},\dots,v^{(n)}$ ویژه‌بردارهای نظیر باشند ($J_n v^{(i)} = t_i v^{(i)}$) به گونه‌ای که $v^{(i)T}v^{(i)} = (p_۰,p_۰) = \int_a^b w(t)dt$ برای $i=۱,\dots,n$ آنگاه داریم $w_i = (v_۱^{(i)})^۲$.*

برهان. به صفحه 179 مرجع [۲۲] مراجعه کنید. □

تذکر ۲۱.۶ *الگوریتم QR در جبرخطی عددی یک الگوریتم کارا برای یافتن ویژه‌مقدارهای یک ماتریس سه‌قطری است که در آن $v_۱^{(i)}$ نیز به دست می‌آید.*

تذکر ۲۲.۶ *از بین فرمول‌های نیوتن-کاتس، روش‌های مبتنی بر درونیابی و قواعد گاوس، اگر حجم محاسبات یکسان باشد قواعد گاوس نتایج دقیق‌تری به دست می‌دهند. اگر بخواهیم n را طوری بیابیم که مقدار انتگرال داده‌شده را با دقت*

معینی به دست آوریم باز هم روش گاوس موفق‌تر از سایر روش‌ها است. البته خطای قاعده گاوس در این حالت کمکی نمی‌کند زیرا یافتن کرانی برای مشتق مرتبه $2n$ ام یک تابع به سادگی مقدور نیست. کافی است برای $n = 2, 3, \ldots$ مقدار انتگرال را به دست آورده و مقایسه کرده و اگر دقت خواسته‌شده به دست آمد، روند را متوقف کنیم. متاسفانه مقادیر محاسبه‌شده تابع در n نقطه برای محاسبه تابع در $n+1$ نقطه به کار نمی‌آیند و در نتیجه روش‌های مبتنی بر برونیابی نسبت به قواعد گاوس بهتر عمل می‌کنند. البته برای برطرف کردن این ضعف قواعد گاوسی، تلاش‌هایی نیز انجام شده است.

تذکر ۲۳.۶ *چندجمله‌ای‌های متعامد ژاکوبی که با $p^{(\alpha,\beta)}$ نمایش داده می‌شوند، روی بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن*

$$w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \qquad \alpha, \beta > -1,$$

ساخته می‌شوند و به کمک آنها می‌توان قواعد انتگرال‌گیری گاوس-ژاکوبی ساخت. قواعد گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف نوع اول و گاوس-چبیشف نوع دوم حالت خاصی از قواعد گاوس-ژاکوبی هستند که به ترتیب به ازای $\alpha = \beta = 0$، $\alpha = \beta = -1/2$ و $\alpha = \beta = 1/2$ به دست می‌آیند. برای جزئیات بیشتر (مانند ضرایب δ_{i+1} و γ_{i+1}^2) در مورد چندجمله‌ای‌های متعامد به مرجع سودمند [10] مراجعه کنید.

پروژه ۳.۶ *برنامه‌ای بنویسید که n را دریافت کرده و قاعده n نقطه‌ای گاوس را همراه با جمله خطای آن بسازد.*

۵.۶ مطالب تکمیلی

در پایان این فصل ابتدا فن انتگرال‌گیری ضربی[12] را بیان کرده و سپس به بررسی انتگرال‌های تکین[13] می‌پردازیم.

۱.۵.۶ انتگرال‌گیری ضربی

در محاسبه $\int_a^b x(t)dt$ ممکن است x تابعی انتگرال‌پذیر ولی در نقطه‌ای (نقاطی) در بازه $[a, b]$ بیکران باشد یا x روی بازه $[a, b]$ به سرعت نوسان کند. متاسفانه در این مواقع نتایج قواعد انتگرال‌گیری که تا به حال مطرح شدند رضایت‌بخش نیستند و پیشنهاد می‌شود از فن انتگرال‌گیری ضربی استفاده شود. انتگرال داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$I = \int_a^b p(t)g(t)dt,$$

که در آن g بخش خوش‌رفتار بوده و p شامل بخشی است که دردسرآفرین است. حال کافی است g را با تابع ساده‌تر (مانند چندجمله‌ای) g_n تقریب زده و قرار دهیم

$$I_n = \int_a^b p(t)g_n(t)dt.$$

[12] Product integration
[13] Singular integrals

البته برای آن که بتوان این انتگرال را به سادگی حساب کرد لازم است p تا حد ممکن ساختار ساده‌ای داشته باشد. خوشبختانه بیشتر اوقات می‌توان به کمک این روش تقریبی از انتگرال توابع بدرفتار به دست آورد.

تذکر ۲۴.۶ *اگر*

$$L[\,] = \int_a^b p(t)[\,]dt,$$

آنگاه

$$|I - I_n| \le \|L\| \, \|g - g_n\| \,,$$

که در آن $\|L\| \le \int_a^b |p(t)|\,dt$ *(مشروط بر آن که از نرم ماکزیمم استفاده کنیم).*

برای فهم بهتر فن انتگرال‌گیری ضربی، به دو مثالی که در ادامه می‌آیند توجه کنید.

مثال ۸.۶ *انتگرال*

$$I = \int_0^1 \frac{g(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

را در نظر بگیرید که در آن $g \in C^2[0,1]$*. برای عدد طبیعی* n*، اگر* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ *یک افراز منظم (*$t_i = ih$ *برای* $i = 0,\ldots,n$ *که در آن* $h = (b-a)/n$*) روی بازه* $[0,1]$ *باشد و* g *را با درونیاب قطعه‌ای خطی تعریف‌شده روی این افراز تقریب بزنیم، آنگاه*

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{t_{i+1} - t}{h} g(t_i) + \frac{t - t_i}{h} g(t_{i+1}) \right) dt,$$

که پس از ساده‌سازی می‌توان ضرایب $w_0,\ldots,w_n$ *را چنان به دست آورد که*

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i).$$

قاعده به دست آمده به قاعده ذوزنقه ضربی مرکب[۱۴] *معروف است و با توجه به*

$$\|L\| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2,$$

خطایی به صورت زیر دارد

$$|I - I_n| \le \frac{h^2}{4} M_2,$$

که در آن $M_2 = \max_{t\in[0,1]} |g''(t)|$ *(جزئیات را بررسی کنید).* △

مثال ۹.۶ به نظر می‌رسد محاسبه انتگرال فوریه

$$I = \int_a^b \cos(wt) g(t) dt,$$

[۱۴] Composite product trapezoidal rule

به کمک قواعد استاندارد مشکلی نداشته باشد ولی اگر w عدد بزرگی باشد نوسانات انتگرالده زیاد است و نتایج خوبی به دست نمی‌آید. برای رفع این مشکل، به سراغ انتگرال‌گیری ضربی می‌رویم. به همین منظور کافی است تابع g را روی زیربازه‌های به طول $۲\pi/w$ با چندجمله‌ای‌های درجه دو تقریب زده و انتگرال‌گیری کنیم. قاعده ضربی که به این صورت به دست می‌آید به روش فیلون[۱۵] معروف است. اگر

$$L[\,] = \int_a^b \cos(wt)[\,]dt,$$

به وضوح $\|L\|_\infty \leq (b-a)$ و ثابت می‌شود روش فیلون مرکب خطایی حداقل از مرتبه سه دارد. برای جزئیات بیشتر به صفحه 59-66 مرجع [۹] مراجعه کنید. $\triangle$

۲.۵.۶ انتگرال‌های تکین

در محاسبه تقریبی $I = \int_a^b x(t)dt$ به کمک روش‌های بیان‌شده، بیشتر مواقع باید تابع x به اندازه کافی هموار (مشتق‌پذیر) باشد. متاسفانه در بسیاری از مسایل کاربردی تابع x در نقاط انتهایی بازه $[a,b]$ و یا در نقطه (نقاطی) از بازه مشتق‌پذیر نیست و به کار بردن مستقیم قواعد متداول، به نتایج رضایت‌بخشی منجر نمی‌شود. در ادامه این بخش چند راه‌کار ارائه می‌شود.

- ایجاد یک افراز مناسب روی بازه $[a,b]$ و شکستن انتگرال به مجموع چند انتگرال روی زیربازه‌ها و استفاده از قواعد متداول روی زیربازه‌ها بیشتر مواقع راه‌گشا است،

- بعضی مواقع تغییر متغیر مشکل انتگرالده را برطرف می‌کند. به عنوان مثال تغییر متغیر $\sqrt{t} =: s$، مشکل مشتق‌ناپذیری تابع $x(t) = \sqrt{t}\sin t$ در $t = ۰$ را برطرف می‌کند،

$$\int_۰^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^{\sqrt{b}} ۲s^۲ \sin s^۲ ds,$$

- بعضی مواقع استفاده از بسط تیلور انتگرالده یا بخشی از آن و ساده‌سازی انتگرال سودمند است. به عنوان نمونه برای مثالی که در قسمت قبل بیان شد داریم

$$\int_۰^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^\epsilon \sqrt{t}\sin t dt + \int_\epsilon^b \sqrt{t}\sin t dt, \qquad \epsilon > ۰.$$

برای محاسبه انتگرال دوم مشکلی نیست و برای انتگرال اول داریم

$$\int_۰^\epsilon \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^\epsilon \sqrt{t}\left(t - \frac{t^۳}{۳!} + \frac{t^۵}{۵!} - + \cdots\right) dt = \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{\epsilon^{۲k+۵/۲}}{(۲k+۱)!(۲k+۵/۲)}.$$

باید ϵ را با احتیاط انتخاب کرد زیرا هرچه ϵ کوچک‌تر باشد جملات کمتری از سری به دست آمده نیاز است حال آن که همگرایی انتگرال دوم از دست می‌رود (انتگرال دوم به تکینگی نزدیک می‌شود)،

[۱۵] Filon's method

- بعضی مواقع با اضافه و کم کردن یک تابع مناسب (تابعی که تابع اولیه آن به راحتی به دست آید) می‌توان همواری (مشتق‌پذیری) انتگرالده را بالا برد. همان مثال قبل را در نظر بگیرید

$$\int_0^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_0^b (\sqrt{t}\sin t - t\sqrt{t})dt + \int_0^b t\sqrt{t}dt = \int_0^b \sqrt{t}(\sin t - t)dt + \frac{2}{5}b^{5/2}.$$

انتگرال به دست آمده دارای انتگرالده به طور پیوسته مشتق‌پذیر تا مرتبه سه است و نسبت به انتگرالده اصلی همواری بیشتری دارد. برای محاسبه انتگرال جدید با یک قاعده انتگرال‌گیری مناسب، ممکن است پدیده از بین رفتن ارقام با معنا (به دلیل تفاضل دو عدد نزدیک به هم) اتفاق افتد که می‌توان آن را به کمک بسط تیلور مهار کرد،

$$\sqrt{t}(\sin t - t) = \sqrt{t}(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \cdots - t) = -t^{7/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+3)!}t^{2k},$$

- در محاسبه انتگرال $\int_a^b t^\alpha x(t)dt$ که در آن $1 > \alpha > 0$، ممکن است انتگرالده به اندازه کافی مشتق‌پذیر نباشد (حتی اگر x به اندازه کافی مشتق‌پذیر باشد) و در نتیجه بسط مجانبی (۷.۶) برقرار نیست. ثابت می‌شود

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^{\gamma_1} + \tau_2 h^{\gamma_2} + \cdots,$$

که در آن $\{\gamma_i\} = \{1+\alpha, 2, 2+\alpha, 4, 4+\alpha, 6, 6+\alpha, \ldots\}$. با انتخاب مناسب یک دنباله از اندازه گام‌ها می‌توان از برونیابی استفاده کرد. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۲۲] مراجعه کنید،

- زمانی که تابع x در نقطه $t = a$ به اندازه کافی مشتق‌پذیر نیست، با تعریف

$$a_j := a + \frac{b-a}{j}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

و محاسبه (به کمک روش‌های متداول) $I_j = \displaystyle\int_{a_{j+1}}^{a_j} x(t)dt$ قرار می‌دهیم $I = I_1 + I_2 + \cdots$. این روش برای محاسبه انتگرال ناسره $\int_a^\infty x(t)dt$ نیز کاربرد دارد،

- بسیاری از انتگرال‌های ناسره را می‌توان به کمک تغییر متغیر به انتگرال سره تبدیل کرد. به عنوان نمونه

$$\int_1^\infty x(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{s^2}x(1/s)ds.$$

- تقریبی از انتگرال‌های ناسره $\int_0^\infty x(t)dt$ و $\int_{-\infty}^\infty x(t)dt$ را می‌توان به ترتیب به کمک قواعد گاوس‌ـلاگر و گاوس‌ـهرمیت به دست آورد.

سمینار ۱.۶ *انتگرال‌گیری تطبیقی (وفقی)*[۱۶].

سمینار ۲.۶ *انتگرال‌های چندگانه*.

---
[۱۶] Adaptive integration

کتاب‌نامه

[۱] بهفروز غلامحسین و میرنیا میرکمال، نظریه و کاربرد آنالیز عددی، نوشته تیلور و دیگران (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳.

[۲] عالم‌زاده علی اکبر، بابلیان اسماعیل و امیدوار محمدرضا، آنالیز عددی، نوشته بردن و دیگران (ترجمه)، انتشارات منصوری، ۱۳۶۸.

[3] American Heritage Dictionary, 1992.

[4] Bauer F. L., Computational graphs and rounding error, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 87-96.

[5] Blum E. K., Trefethen L. N., Barycentric Lagrange interpolation, SIAM Review 46 (2004) 501-517.

[6] Chambers 20th Century Dictionary, 1983.

[7] Cheney K., Approximation theory, 2000.

[8] Davis P. J., Interpolation and Approximation, Blaisedell, New York, 1963.

[9] Davis P. J., Rabinowitz, Numerical Integration, Blaisedell, Waltham, MA, 1967.

[10] Gautschi W., Orthogonal Polynomials Computation and Approximation, Oxford University Press, 2004.

[11] Higham N. J., The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation, IMA J. Numer. Anal. 24 (2004) 547-556.

[12] Henrichi P., Elements of numerical analysis, 1964.

[13] Isaacson E. and Keller H. B., Analysis of Numerical Methods, Wiley, New York, 1966.

[14] Kincaid D. and Cheney E. W., Numerical analysis, Mathematics of scientific computing, 1991.

[15] Linz P., Theoretical of Numerical Analysis, 1987.

[16] Prenter P.M., Splines and Vriational Methods,Wiley-Interscience, New York, 1975.

[17] Quarteroni, Numerical Mathematics, 2007.

[18] Moore R. E., Interval Arithmetic.

[19] Reddy J. N., Introduction to Finite Element Method.

[20] Rivlin T., Approximation and interpolation.

[21] Scarborough J.B., Numerical Mathematical Analysis, 1930.

[22] Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Analysis, 3rd edition, 2003.

[23] Traub J., Communications of the ACM, 1972.

[24] Trefethen L. N., SIAM News, November 1992.

[25] Webster's New Collegiate Dictionary, 1973.