به نام پروردگار یگانه و یکتا

آنالیز عددی ۱

پدیدآورنده : رضا مختاری

ویرایش دهم : تابستان و پاییز ۱۴۰۰

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

دی رفت و باز نیاید

فردا را اعتماد نشاید

حال را غنیمــت دان

که دیــــر نپایـــــد

خواجه عبدا... انصاری

در این فصل پس از ارایه تاریخچه‌ای از آنالیز عددی، مفاهیم، تعاریف و قضایایی که در ادامه کار به آن‌ها نیاز داریم را مرور می‌کنیم.

۱.۱ تاریخچه آنالیز(محاسبات) عددی

آن چه در ادامه می‌آید و از آن به عنوان تاریخچه آنالیز(محاسبات) عددی یاد شده، وقایعی است که بی‌شک با آنالیز عددی در ارتباط بوده و در گسترش آن بی‌تاثیر نبوده‌اند. بخش عمده این تاریخچه از مرجع [۲] استخراج شده است. خواننده علاقمند می‌تواند تاریخچه کامل را در کتاب‌های تاریخ ریاضیات دنبال کند.

۱. تهیه نتایج به صورت اعداد (بشر اولیه!؟)

۲. کارهای بابلی‌ها و مصری‌ها در رابطه با نجوم و مهندسی راه و ساختمان

- لوح بابلی حدود ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد (مجذور اعداد صحیح از ۱ تا ۶۰)
- ثبت کسوف و خسوف از حدود ۷۵۰ سال قبل از میلاد
- توجه مصریان به کسر و ابداع روش نابجایی

۳. کارهای ارشمیدس در حدود ۲۲۰ سال قبل از میلاد ($۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$)

۴. ابداع روش تکراری محاسبه $\sqrt{a}$ توسط هِرون در حدود ۱۰۰ سال قبل از میلاد

۵. کارهای فیثاغورسیان در رابطه با مجموع عددی سری‌ها

۶. روش دیوفانتوس برای حل معادله درجه دوم در حدود سال ۲۵۰ میلادی

۷. نمادگذاری عددی عربی (هندی)

۸. ساخت جدول‌های مثلثاتی قبل از قرن ۱۰

۹. پیدایش جبر در قرن ۱۶

۱۰. قرن ۱۷

- انقلاب صنعتی (کارهای نیوتن، اویلر، لاگرانژ، گاوس و بسل)
- ساخت جدول لگاریتم توسط نپر
- اختراع خط‌کش محاسبه توسط اوترد
- اختراع ماشین‌حساب توسط پاسکال و لایب‌نیتز
- محاسبات با سری‌های نامتناهی

۱۱. پایه‌ریزی تفاضلات متناهی توسط ژاکوب استرلینگ و بروک تیلور در اوایل قرن ۱۸

۱۲. پیش‌بینی وجود و موضع سیاره نپتون توسط آدامز و لوریه در سال ۱۸۴۵ میلادی

۱۳. پیشرفت و تولید وسیع ماشین‌حساب در اواخر قرن ۱۹

۱۴. چاپ کتاب آنالیز ریاضی عددی توسط اسکاربورو [۹] در سال ۱۹۳۰ میلادی

۱۵. جنگ جهانی دوم و پیدایش رایانه در سال ۱۹۴۰ میلادی

۱۶. معرفی واژه Numerical Analysis توسط UCLA در سال ۱۹۴۷ میلادی

۲.۱ مفاهیم اساسی

در این بخش پس از بررسی چند تعریف از آنالیز عددی، مفاهیم اساسی و مرتبط با آنالیز عددی را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ ۱. *آنالیز عددی نظریه روش‌های ساخت‌یافته (سازنده)* [۱] *در آنالیز ریاضی، آنالیز تابعی، جبر، جبرخطی و غیره است [۷].*

۲. *آنالیز عددی آنالیز الگوریتم‌های پیوسته است [۱۰].*

۳. *آنالیز عددی مطالعه کمی جواب تقریبی مسائل ریاضی با توجه به خطاها و کران‌های آن‌ها است [۱۲].*

۴. *آنالیز عددی به استنتاج ریاضی، توصیف و تحلیل روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی مسائل ریاضی را تولید می‌کنند [۳].*

۵. *آنالیز عددی مطالعه روش‌های تقریبی و دقت آن‌ها است [۶].*

۶. *آنالیز عددی شامل مطالعه، توسعه و تجزیه و تحلیل الگوریتم‌ها برای به دست آوردن جواب‌های عددی مسائل مختلف ریاضی است. آنالیز عددی ریاضیات محاسبات علمی است [۸].*

۷. *آنالیز عددی مطالعه جواب تقریبی مسائل ریاضی با در نظر گرفتن حد و اندازه خطاهای ممکن است [۵].*

۸. *آنالیز عددی مطالعه الگوریتم‌ها برای مسائل ریاضیات پیوسته (متمایز از ریاضیات گسسته) است [۱۱].*

اَتکینسون [۲] آنالیز عددی‌دان معاصر، برای شناخت یک موضوع دیدگاه‌های متفاوت زیر را مطرح می‌کند.

۱. (مورد قدیمی) نظری (دیدگاه دانشمند)

۲. (مورد قدیمی) تجربی (دیدگاه مهندس)

۳. (مورد جدیـد) محاسباتی (دیدگاه متخصص آنالیز عددی)

به عبارتی وی علوم محاسباتی را به علوم نظری و علوم تجربی اضافه کرده و معتقد است این علوم به صورت زیر با هم در ارتباط هستند.

علوم نظری $\rightleftarrows$ علوم تجربی $\rightleftarrows$ علوم محاسباتی $\rightleftarrows$ علوم نظری

الگوریتم واژه‌ای است که در آنالیز (محاسبات) عددی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد و در ادامه به تعریف آن می‌پردازیم.

---

[۱] Constructive methods : روشی که علاوه بر وجود، راه رسیدن به جواب را نیز مشخص می‌کند.

[۲] K.E. Atkinson

تعریف ۲.۱ *الگوریتم در آنالیز عددی،*

- *به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مسئله ریاضی تعریف می‌شود [۳].*
- *فرآیند بدون ابهامی است که دنباله‌ای متناهی از گام‌هایی را تشریح می‌کند که با ترتیب مشخصی اجرا می‌شوند [۴].*

در آنالیز عددی فقط با الگوریتم‌های عددی سر و کار داریم. الگوریتم‌های عددی، الگوریتم‌هایی هستند که خروجی آن‌ها جواب عددی یا تقریبی یک مسئله است. الگوریتم عددی همگرا، به آن دسته از الگوریتم‌های عددی گفته می‌شود که در هر تکرار، عناصر دنباله‌ای را تولید می‌کنند که آن دنباله به جواب واقعی مسئله همگرا باشد. باید توجه داشت که ماهیت این دنباله‌ها وابسته به جواب مسئله است و ممکن است عدد، تابع، بردار، ماتریس و غیره باشد. از شبه‌کد[۳] برای توصیف الگوریتم استفاده می‌شود. شبه‌کد را می‌توان زبانی بین زبان‌های سطح بالای رایانه‌ای و زبان محاوره تلقی کرد. هنگام مواجه شدن با یک مسئله حقیقی، سه سوال بحث‌برانگیزی که برای یک متخصص آنالیز عددی مطرح می‌شود، عبارتند از

۱. آیا جواب مسئله وجود دارد؟

۲. آیا جواب یکتا است؟

۳. حساسیت جواب در برابر اختلالات جزئی (کوچک) داده‌های ورودی در چه حد است؟

مثال ۱.۱ *مسئله یافتن ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید. به وضوح داده‌های ورودی این مسئله عبارتند از اعداد حقیقی a، b و c و جواب این مسئله x است. برای $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ این مسئله دو جواب حقیقی دارد و به ازای $\Delta=۰$ این مسئله یک جواب حقیقی دارد و برای $\Delta<۰$ این مسئله جواب (حقیقی) ندارد. به دو مورد زیر توجه کنید*

$$\begin{cases} ۱/۰۰۰۱x^۲-۲x-۳=۰, & \to \quad x\simeq ۰/۹۹۹۹۸,\ ۲/۹۹۹۷۸, \\ ۱/۰۰۰۲x^۲-۲x-۳=۰, & \to \quad x\simeq ۰/۹۹۹۹۵,\ ۲/۹۹۹۵۵, \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} ۰/۰۰۰۱x^۲-۲x-۳=۰, & \to \quad x\simeq -۱/۴۹۹۹,\ ۲۰۰۰۲, \\ ۰/۰۰۰۲x^۲-۲x-۳=۰, & \to \quad x\simeq -۱/۴۹۹۸,\ ۱۰۰۰۲. \end{cases}$$

در مورد دوم حساسیت جواب در برابر تغییرات کوچک داده‌های ورودی زیاد است. $\triangle$

تعریف زیر از مرجع [۳] برگرفته شده است.

تعریف ۳.۱ *فرض کنید d و $S(d)$ به ترتیب بیان‌گر داده‌های ورودی و جواب متناظر با داده‌ها، برای مسئله‌ای دلخواه باشند[۴]. هم‌چنین فرض کنید $d+\delta d$ داده‌های ورودی اختلال‌یافته (تغییرداده‌شده) و $S(d+\delta d)$ جواب نظیر آن باشد. معیار اندازه‌گیری تغییرات اعمال شده در داده‌ها و اختلاف جواب‌های متناظر را به ترتیب با $\|\delta d\|$ و $\|S(d+\delta d)-S(d)\|$ که اعداد نامنفی هستند، نشان می‌دهیم. به ازای داده‌های مفروض d، مسئله خوش‌طرح[۵] نامیده می‌شود اگر دو شرط زیر برقرار باشد*

---

[۳] Pseudocode

[۴] ماهیت d و $S(d)$ بر حسب نوع مسئله، ممکن است عدد، تابع، بردار، ماتریس و غیره باشد.

[۵] Well-posed

الف) به ازای تمام داده‌های متعلق به یک همسایگی حول d جواب یکتا موجود باشد، یعنی عددی مانند $\epsilon > 0$ چنان موجود باشد که به ازای هر δd که $\|\delta d\| < \epsilon$ مقدار $S(d+\delta d)$ موجود و یکتا باشد.

ب) جواب یعنی $S(d)$ به طور پیوسته به داده‌ها یعنی d بستگی داشته باشد یعنی اگر $\|\delta d\| \to 0$ آن‌گاه $\|S(d+\delta d) - S(d)\| \to 0$.

تذکر ۱.۱ *در صورتی که به ازای مجموعه‌ای از داده‌ها، بیش از یک جواب موجود باشد، نمی‌توانیم تشخیص دهیم روش عددی ما کدام جواب را تولید می‌کند. ممکن است اطلاعات حقیقی (تجربی) پیرامون مسئله، مشخص کند که جواب مسئله، موجود و یکتا است. اگر متخصص در این مرحله به جواب نرسید، مدل ریاضی مسئله را مورد بررسی قرار داده و برای تعیین وجود و یکتایی جواب در مباحث نظری در جستجوی یافتن قضایایی است که تکلیف وجود و یکتایی جواب را روشن می‌کنند. به طور معمول با افزودن شرایطی، می‌توان جواب‌های اضافی را کنار گذاشت. به عنوان مثال، در ریشه‌یابی یک معادله جبری درجه دو یا بیشتر، می‌توان هدف را تعیین ریشه با بزرگ‌ترین اندازه قرار داد.*

تذکر ۲.۱ *اگر شرط ب برقرار نباشد، استفاده از یک الگوریتم عددی کار دشواری است، زیرا در این صورت دسته‌هایی از داده‌های بسیار نزدیک به d وجود دارند که جواب‌های متناظر آنها متمایز از $S(d)$ هستند.*

تعریف ۴.۱ *مسئله‌ای که به ازای مجموعه‌ای از داده‌ها خوش‌طرح است، خوش‌حالت[۶] نامیده می‌شود اگر هر تغییر جزئی در داده‌های ورودی منجر به تغییر کوچکی در جواب شود و در صورتی که تغییر جواب فاحش باشد، مسئله را بدحالت[۷] نامند.*

تذکر ۳.۱ *مفاهیم خوش‌طرحی (بدطرحی) و خوش‌حالت (بدحالت) بودن نسبی هستند و نه تنها به مسئله بلکه به داده‌ها نیز بستگی دارند.*

تعریف ۵.۱ *جواب یک مسئله خوش‌طرح اغلب بستگی لیپشیتس به داده‌ها دارد یعنی اعداد $L > 0$ و $\epsilon > 0$ موجود هستند به طوری که به ازای هر δd که $\|\delta d\| < \epsilon$ خواهیم داشت*

$$\|S(d+\delta d) - S(d)\| \le L\,\|\delta d\|$$

L به عدد وضعیت[۸] معروف است و اگر L خیلی بزرگ نباشد، مسئله خوش‌حالت است. برنامه ill-conditioned.nb را ببینید.

تعریف ۶.۱ *اگر هنگام به کار بردن یک الگوریتم در حل یک مسئله خوش‌حالت، اختلال کوچکی در داده‌های ورودی، منجر به تولید تغییرات بزرگی در نتایج نهایی گردد، آن الگوریتم ناپایدار[۹] و در غیر این صورت پایدار[۱۰] نامیده می‌شود. اگر الگوریتمی به ازای انتخاب مشخصی از داده‌ها پایدار گردد، آن را به طور مشروط پایدار[۱۱] نامند. برنامه stable.nb را ببینید.*

---

[۶] Well-conditioned
[۷] Ill-conditioned
[۸] Condition-number
[۹] Unstable
[۱۰] Stable
[۱۱] Conditionally stable

۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضی

در این بخش به معرفی اصطلاحات و بیان قضایای مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۷.۱ *با این فرض که $n \in \mathbb{N}$ و $X \subseteq \mathbb{R}$، فضاهایی از توابع که پرکاربرد هستند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } X \text{ در } f\}$$

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } [a,b] \text{ در } f\}$$

$$C^n(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } X \text{ در } f \text{ ام } n \text{ تا مشتق مرتبه}\}$$

$$C^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } [a,b] \text{ در } f \text{ ام } n \text{ تا مشتق مرتبه}\}$$

$$C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } X \text{ از هر مرتبه‌ای در } f \text{ مشتق}\}$$

$$C^\infty[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \text{پیوسته باشد } [a,b] \text{ از هر مرتبه‌ای در } f \text{ مشتق}\}$$

تذکر ۴.۱ *توابع چندجمله‌ای، گویا، مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی در رده $C^\infty(X)$ قرار دارند، که در آن X دامنه تعریف این توابع است.*

قضیه ۱.۱ *فرض کنید $f \in C[a,b]$. f در $[a,b]$، ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را اختیار می‌کند.*

قضیه ۲.۱ (مقدار میانی) *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و $f(a) \neq f(b)$. f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را در نقطه‌ای بین a و b به خود می‌گیرد.*

قضیه ۳.۱ *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b) = k$ آن‌گاه عدد x در (a,b) موجود است که $f'(x) = 0$. این قضیه برای $k = 0$، به قضیه رُل[12] معروف است.*

قضیه ۴.۱ (تعمیم قضیه رُل) *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و n تا مشتق مرتبه اُم f بر (a,b) موجود باشد. اگر $x_0, \dots, x_n$، $n+1$ نقطه متمایز در $[a,b]$ باشند و $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$، آن‌گاه عدد x در (a,b) موجود است به طوری که $f^{(n)}(x) = 0$.*

قضیه ۵.۱ (مقدار میانگین) *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. نقطه‌ای مانند c در (a,b) موجود است به طوری که*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

قضیه ۶.۱ (کوشی[13]) *فرض کنید $f, g \in C[a,b]$ و f و g بر (a,b) مشتق‌پذیر باشند و g' در (a,b) ناصفر باشد. نقطه‌ای مانند c در (a,b) موجود است به طوری که*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

---

[12] Rolle

[13] Cauchy

قضیه ۷.۱ (مقدار میانگین برای انتگرال) *فرض کنید $f \in C[a,b]$. نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$ موجود است به طوری که*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

قضیه ۸.۱ (مقدار میانگین تعمیم‌یافته برای انتگرال) *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و g تابعی انتگرال‌پذیر باشد که در $[a,b]$ تغییر علامت ندهد. نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$ موجود است به طوری که*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

قضیه ۹.۱ (اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. F در (a,b) مشتق‌پذیر بوده و $F'(x) = f(x)$.*

قضیه ۱۰.۱ (تیلور با باقیمانده لاگرانژ) *فرض کنید $f \in C^n[a,b]$ و $f^{(n+1)}$ بر (a,b) موجود باشد و $x_0 \in [a,b]$. در این صورت، به ازای هر $x \in [a,b]$، نقطه‌ای مانند $\xi(x)$ بین x_0 و x وجود دارد که*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x,x_0)$$

که در آن

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

و

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

در این‌جا $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور مرتبه nاُم f حول x_0 و $R_n(x,x_0)$ جمله باقی‌مانده (یا خطای برش[14]) متناظر با $P_n(x)$ نامیده می‌شود. اگر $n \to \infty$ آن‌گاه $P_n(x)$ به یک سری بی‌پایان تبدیل می‌شود که به آن سری تیلور f حول x_0 گویند. در این حالت، شرط بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بودن f در x_0 لازم است.

تذکر ۵.۱ *در قضیه ۱۰.۱ برای $x_0 = 0$ به جای واژه تیلور از واژه مکلورن استفاده می‌شود.*

تذکر ۶.۱ *سری تیلور حالت خاصی از سری توانی است و بنابراین قضایای مربوط به سری‌های توانی در مورد سری تیلور نیز صادق هستند.*

تذکر ۷.۱ *$R_n(x,x_0)$ مقدار خطا در استفاده از P_n به جای f را نشان می‌دهد. در عمل با یافتن کرانی برای جمله باقی‌مانده، در واقع برای خطای تقریب f با P_n کرانی پیدا می‌کنیم.*

[14] Truncation error

تذکر ۸.۱ *ویژگی مهم چندجمله‌ای تیلور مرتبه nاُم آن است که P_n و مشتقات تا مرتبه‌ی nاُم آن با f و مشتقات تا مرتبه nاُم آن در نقطه x_0 برابر هستند.*

تذکر ۹.۱ *برای تابع حقیقی مقدار f، اگر $f \in C^\infty[a,b]$ و $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ یعنی در نقطه x بسط تیلور به تابع همگرا است.*

تذکر ۱۰.۱ شکل دیگر (کاربردی) قضیه تیلور به صورت زیر است

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}h^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

که در آن ξ بین x و $x+h$ است. به ازای $h = x_0 - x$ می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت

$$f(x_0) = f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}h^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

مثال ۲.۱ فرض کنید $f(x) = 2 + 4x - x^3$. آن‌گاه به وضوح برای $n \geq 3$ داریم

$$P_n(x) = 2 + 4x - x^3, \qquad R_n(x, 0) = 0,$$

و برای $n = 2$ خواهیم داشت

$$P_2(x) = 2 + 4x, \qquad R_2(x, 0) = -x^3,$$

و برای $n = 1$ می‌توان نوشت

$$P_1(x) = 2 + 4x, \qquad R_1(x, 0) = -3x^2\xi(x),$$

که در آن $\xi(x)$ نقطه‌ای بین 0 و x است. △

مثال ۳.۱ درستی روابط زیر قابل بررسی است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots, \quad \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

△

قضیه ۱۱.۱ **(تیلور با باقیمانده انتگرالی)** *اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه به ازای هر $x, x_0 \in [a,b]$ داریم*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x, x_0)$$

که در آن

$$R_n(x, x_\circ) = \frac{۱}{n!} \int_{x_\circ}^{x} f^{(n+۱)}(t)(x-t)^n dt.$$

برهان. به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء به ازای هر n داریم

$$R_n(x, x_\circ) = -\frac{۱}{n!} f^n(x_\circ)(x - x_\circ)^n + R_{n-۱}(x, x_\circ).$$

با استفاده مکرر از این رابطه خواهیم داشت

$$R_n(x, x_\circ) = -\sum_{i=۱}^{n} \frac{f^{(i)}(x_\circ)}{i!}(x - x_\circ)^i + R_\circ(x, x_\circ).$$

حکم با توجه به رابطه زیر برقرار است

$$R_\circ(x, x_\circ) = \int_{x_\circ}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_\circ).$$

□

قضیه ۱۲.۱ **(تیلور توابع دومتغیره)** *اگر* $f \in C^{n+۱}([a,b] \times [c,d])$ *آن‌گاه به ازای هر نقطه* $(x+h, y+k)$ *در* $[a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^۲$ *داریم*

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=\circ}^{n} \frac{۱}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x,y) + R_n(h,k),$$

که در آن

$$R_n(h,k) = \frac{۱}{(n+۱)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+۱} f(x+\theta h, y+\theta k),$$

و θ عددی بین ∘ و ۱ است. هم‌چنین داریم

$$\begin{aligned}
&\left(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y} \right)^\circ f(x,y) = f(x,y), \\
&\left(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y} \right)^۱ f(x,y) = \left(h\tfrac{\partial f}{\partial x} + k\tfrac{\partial f}{\partial y} \right)(x,y), \\
&\left(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y} \right)^۲ f(x,y) = \left(h^۲\tfrac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + ۲hk\tfrac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} + k^۲\tfrac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} \right)(x,y), \dots.
\end{aligned}$$

تذکر ۱۱.۱ *این قضیه برای توابع چندمتغیره به سادگی تعمیم‌پذیر است.*

هنگامی که قصد داریم دو دنباله را با هم مقایسه کنیم از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۸.۱ *اگر $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دو دنباله همگرا به x باشند، آن‌گاه بنابر تعریف داریم*

$$\forall \epsilon > \circ,\ \exists N_۱ \ :\ \forall n\,(n \geq N_۱ \to |\alpha_n - x| < \epsilon),$$

$$\forall \epsilon > \circ,\ \exists N_۲ \ :\ \forall n\,(n \geq N_۲ \to |\beta_n - x| < \epsilon).$$

اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم $N_1 < N_2$، آن‌گاه $\{\alpha_n\}$ سریعتر از $\{\beta_n\}$ به x همگرا است.

متاسفانه چون یافتن N به سادگی امکان‌پذیر نیست، این تعریف بیشتر جنبه نظری دارد و در عمل نمی‌توان از آن سود برد. خوشبختانه تعریف زیر در عمل راه‌گشا است.

تعریف ۹.۱ *فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{\alpha_n\}$ دو دنباله متفاوت باشند. می‌نویسیم*

$$x_n = O(\alpha_n)$$

و می‌خوانیم x_n اُی بزرگ α_n است هرگاه ثابت‌های C و N چنان موجود باشند که داشته باشیم

$$|x_n| \le C\,|\alpha_n|, \qquad \forall n \ge N.$$

اگر برای هر n داشته باشیم $\alpha_n \neq 0$ آن‌گاه می‌توان گفت نسبت $|x_n/\alpha_n|$ کران‌دار (با کران C) باقی می‌ماند همان‌طور که $n \to \infty$. هر چند که در این تعریف $\{\alpha_n\}$ یک دنباله دلخواه است ولی در عمل، بیشتر مواقع $\alpha_n = \frac{1}{n^p}$ اختیار می‌شود که در آن $p > 0$ و بزرگ‌ترین مقدار p را جستجو می‌کنیم به طوری که داشته باشیم

$$x_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

گاهی مواقع می‌نویسیم

$$x_n = o(\alpha_n),$$

و می‌خوانیم x_n اُی کوچک α_n است هرگاه داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(x_n/\alpha_n) = 0$.

تذکر ۱۲.۱ *بیشتر مواقع دو دنباله بیان‌شده در تعریف قبل همگرا به صفر هستند و اگر در این صورت داشته باشیم $x_n = O(\alpha_n)$ آن‌گاه می‌توان گفت همگرایی x_n به صفر متناسب با همگرایی α_n به صفر است و یا همگرایی x_n به صفر مانند همگرایی α_n به صفر است در حالی که اگر داشته باشیم $x_n = o(\alpha_n)$ آن‌گاه می‌توان گفت همگرایی x_n به صفر سریعتر از همگرایی α_n به صفر است.*

مثال ۴.۱ *برای $n \in \mathbb{N}_0$ فرض کنید*

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \quad \text{و} \quad \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}.$$

اگرچه $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 = \lim_{n\to\infty}\hat{\alpha}_n$ ولی $\{\hat{\alpha}_n\}$ سریعتر از $\{\alpha_n\}$ به صفر همگرا است. به جدول زیر نگاه کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰۰
α_n	۲/۰۰۰۰۰	۰/۷۵۰۰۰	۰/۴۴۴۴۴	۰/۳۱۲۵۰	۰/۲۴۰۰۰	۰/۰۱۰۱
$\hat{\alpha}_n$	۴/۰۰۰۰۰	۰/۶۲۵۰۰	۰/۲۲۲۲۲	۰/۱۰۹۳۸	۰/۰۶۴۰۰	۰/۰۰۰۱۰۳

اگر قرار دهیم $\beta_n = ۱/n$ و $\hat{\beta}_n = ۱/n^۲$ آن‌گاه

$$|\alpha_n - ۰| = \frac{n+۱}{n^۲} \leq \frac{n+n}{n^۲} = ۲\frac{۱}{n} = ۲\beta_n,$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - ۰| = \frac{n+۳}{n^۳} \leq \frac{n+۳n}{n^۳} = ۴\frac{۱}{n^۲} = ۴\hat{\beta}_n,$$

بنابراین

$$\alpha_n = ۰ + O\left(\frac{۱}{n}\right) \quad \text{و} \quad \hat{\alpha}_n = ۰ + O\left(\frac{۱}{n^۲}\right).$$

هم‌چنین می‌توان نوشت $\hat{\alpha}_n = o(\alpha_n)$. △

مثال ۵.۱ بسط تیلور $\ln(x)$ حول $x_۰ = ۱$ به صورت زیر است

$$\ln(x) = \ln(۱ + (x-۱)) = (x-۱) - \frac{۱}{۲}(x-۱)^۲ + \frac{۱}{۳}(x-۱)^۳ - \frac{۱}{۴}(x-۱)^۴ + \cdots .$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\ln(۲) = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + (-۱)^{n-۲}\frac{۱}{n-۱} + (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}\frac{۱}{\xi^n}, \qquad ۱ < \xi < ۲$$

و یا

$$\ln ۲ - \sum_{k=۱}^{n-۱}(-۱)^{k-۱}\frac{۱}{k} = O\left(\frac{۱}{n}\right),$$

که نمونه‌ای از همگرایی خیلی کند است. به طور مشابه به کمک بسط مکلورن e^x داریم

$$e - \sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{۱}{k!} = O\left(\frac{۱}{n!}\right),$$

که مثالی از یک همگرایی خیلی تند است. △

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید f و g دو تابع دلخواه باشند. می‌نویسیم

$$f(x) = O(g(x)), \qquad (x \to +\infty),$$

هرگاه ثابت‌های C و r چنان موجود باشند که داشته باشیم

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|, \qquad \forall x \geq r.$$

به طور کلی می‌نویسیم

$$f(x) = O(g(x)), \qquad (x \to x_۰),$$

هرگاه ثابت C و یک همسایگی حول $x_\circ$ چنان موجود باشند که به ازای هر x در آن همسایگی داشته باشیم

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|\,.$$

هم‌چنین

$$f(x) = o(g(x)), \qquad (x \to x_\circ),$$

به این معنی است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)/g(x) = \circ$.

مثال ۶.۱ چون برای $x \geq ۱$ داریم $\sqrt{x^۲ + ۱} \leq \sqrt{۲}x$ پس می‌توان نوشت

$$\sqrt{x^۲ + ۱} = O(x), \qquad (x \to +\infty).$$

$\triangle$

مثال ۷.۱ با اعمال قضیه مکلورن برای تابع $\cos(x)$ خواهیم داشت

$$\cos h = ۱ - \frac{۱}{۲}h^۲ + \frac{۱}{۲۴}h^۴ \cos\xi(h),$$

که در آن $\xi(h)$ عددی بین $\circ$ و h است. در نتیجه

$$\cos h + \frac{۱}{۲}h^۲ = ۱ + \frac{۱}{۲۴}h^۴ \cos\xi(h),$$

و یا می‌توان نوشت

$$\cos h + \frac{۱}{۲}h^۲ = ۱ + O(h^۴),$$

زیرا $\left|(\cos h + \frac{۱}{۲}h^۲) - ۱\right| = \left|\frac{۱}{۲۴}\cos\xi(h)\right| h^۴ \leq \frac{۱}{۲۴}h^۴$. در نتیجه زمانی که $h \to \circ$، $\cos h + \frac{۱}{۲}h^۲$ سریع‌تر به ۱ میل می‌کند تا $h^۴$ به صفر.
$\triangle$

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x باشد و برای هر n داشته باشیم $x_n \neq x$. گوییم این دنباله به طور خطی به x همگرا است هرگاه ثابت $C \in (\circ, ۱)$ چنان وجود داشته باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+۱} - x|}{|x_n - x|} = C.$$

در این حالت C به نرخ همگرایی[۱۵] معروف است. برای $C = \circ$ ($C = ۱$) همگرایی زبرخطی[۱۶] (زیرخطی[۱۷]) نامیده می‌شود. اگر اعداد مثبت و ثابت C و $p \geq ۱$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+۱} - x|}{|x_n - x|^p} = C$$

[۱۵] rate of convergence
[۱۶] superlinear
[۱۷] sublinear

آن‌گاه گوییم مرتبه هم‌گرایی[۱۸] این دنباله p است. C به ثابت خطای مجانبی[۱۹] معروف است. اگر $p = ۲$ ($p = ۳$) هم‌گرایی مربعی (مکعبی) نامیده می‌شود ($C < ۱$ لزومی ندارد).

مثال ۸.۱ *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای با هم‌گرایی خطی به صفر با*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} = ۰/۵,$$

و $\{\hat{x}_n\}$ دنباله‌ای با هم‌گرایی مربعی به صفر با همان ثابت خطای مجانبی باشد یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\hat{x}_{n+۱}|}{|\hat{x}_n|^۲} = ۰/۵.$$

برای سادگی فرض می‌کنیم برای $n \geq N$ داریم

$$\frac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} \simeq ۰/۵, \qquad \frac{|\hat{x}_{n+۱}|}{|\hat{x}_n|^۲} \simeq ۰/۵.$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$|x_n - ۰| = |x_n| \simeq ۰/۵\, |x_{n-۱}| \simeq (۰/۵)^۲\, |x_{n-۲}| \simeq \cdots \simeq (۰/۵)^n\, |x_۰|,$$

و

$$\begin{aligned} |\hat{x}_n - ۰| = |\hat{x}_n| &\simeq ۰/۵\, |\hat{x}_{n-۱}|^۲ \simeq (۰/۵)(۰/۵\, |\hat{x}_{n-۲}|^۲)^۲ = (۰/۵)^۳\, |\hat{x}_{n-۲}|^۴ \\ &\simeq (۰/۵)^۳(۰/۵\, |\hat{x}_{n-۳}|^۲)^۴ = (۰/۵)^۷\, |\hat{x}_{n-۳}|^۸ \\ &\simeq \cdots \simeq (۰/۵)^{۲^n-۱}\, |\hat{x}_۰|^{۲^n}. \end{aligned}$$

ادامه این مثال را در برنامه oc.nb دنبال کنید. △

مثال ۹.۱ *دنباله $a_n = \frac{۱}{۲^n}$ با نرخ هم‌گرایی $\frac{۱}{۲}$، هم‌گرایی خطی به صفر دارد. هم‌گرایی دنباله $b_n = \frac{۱}{۲^{۲^n}}$ به صفر زبرخطی است. در اصل هم‌گرایی این دنباله مربعی است. دنباله $c_n = \frac{۱}{n+۱}$ هم‌گرایی زیرخطی به صفر دارد.* △

۴.۱ تمرین‌ها

۱. فرض کنید $f(x) = ۳\sin(x) - x\cos(x) - ۲x$ و $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{x^p} = C \neq ۰$ مقادیر C و p را بیابید.

۲. تابع زیر را در نظر بگیرید. ثابت کنید $f(x) = O(۱)$.

$$f(x) = \frac{x^۳ + ۵\ln x}{x^۴ + ۱}$$

[۱۸] order of convergence

[۱۹] asymptotic error constant

۳. درست و غلط بودن روابط زیر را بررسی کنید

$$\ln(1+h)-h=o(h^2), \qquad \cosh(h)-2=O(h).$$

۴. نشان دهید برای توابع f و g نامنفی رابطه زیر برقرار است

$$O(f)+O(g)=O(f+g),$$

همچنین نشان دهید $O(h^m)O(h^n)=O(h^{m+n})$.

۵. تابع $f(x,y)=e^{x+y^2+y}$ را در همسایگی نقطه $(0,0)$ با یک تابع خطی تقریب بزنید.

۶. درستی روابط زیر را بررسی کنید.

$$\tfrac{1}{n\ln n}=o\left(\tfrac{1}{n}\right),$$

$$\sin h=h-\tfrac{h^3}{6}+O(h^5), \qquad (h\to 0),$$

$$e^{-1/h}=o(h^2), \qquad (h\to\infty).$$

۷. در مورد مرتبه و نرخ همگرایی دنباله $a_n=\dfrac{1}{4^{[\frac{n}{2}]}}$ چه می‌توان گفت؟

۸. نشان دهید تعریف زیر از تعریف قبلی برای مرتبه همگرایی کامل‌تر است.

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x باشد و برای هر n داشته باشیم $x_n\neq x$. اگر اعداد مثبت و ثابت C و $p>1$ وجود داشته باشند به طوری که برای n به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم

$$|x_{n+1}-x|\leq C\,|x_n-x|^p,$$

آن‌گاه گوییم مرتبه هم‌گرایی این دنباله p است.