باسمه تعالی

پاسخ سوالات امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲

نیمسال اول ۹۵-۹۴

۱. فرض کنید
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

الف) نشان دهید f در مبداء پیوسته است. (۳ نمره)

ب) مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را بیابید. (۳ نمره)

ج) اگر $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار یکانی باشد (یعنی $a^2+b^2=1$)، مطلوبست محاسبه مقدار $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ (مشتق سویی از f در نقطه $(0,0)$ و در سوی $\mathbf{u}$) و مقدار $\nabla f(0,0).\mathbf{u}$. (۳ نمره)

د) ثابت کنید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست (می‌توانید از قسمت (ج) استفاده کنید). (۳ نمره)

پاسخ الف. راه اول. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|&\leq\left|\frac{(x+y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x+y||x^2-y^2|}{x^2+y^2}\leq|x+y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\\&\leq|x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

با قرار دادن $\delta=\epsilon/2$، داریم

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x,y)-f(0,0)|\leq 2\delta=\epsilon.$$

بنابراین f در مبدا پیوسته است.

راه دوم. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$\left|\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

با توجه به اینکه $\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ کران‌دار است و $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$، بنابراین طبق قضیه $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. پس f در مبدا پیوسته است.

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\sin(h^2)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin h^2}{h^2}=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\sin(-h^2)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin h^2}{h^2}=-1.$$

پاسخ ج. طبق قسمت ب داریم $\nabla f(۰,۰) = (۱,-۱)$. بنابراین $\nabla f(۰,۰).\mathbf{u} = a-b$. از طرفی

$$D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) = \lim_{t\to ۰} = \frac{f(at,bt)-f(۰,۰)}{t} = \lim_{t\to ۰}\frac{\frac{(a+b)t\sin((a^۲-b^۲)t^۲)}{(a^۲+b^۲)t^۲}-۰}{t}$$
$$= \lim_{t\to ۰}\frac{(a+b)\sin((a^۲-b^۲)t^۲)}{t^۲} = (a+b)(a^۲-b^۲).$$

پاسخ د. اگر f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه برای هر بردار یکانی $\mathbf{u}$ $D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) = \nabla f(۰,۰).\mathbf{u}$. اما به ازای بردار $\mathbf{u} = (\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})$ داریم

$$D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) = -\frac{۴۹}{۱۲۵},\quad \nabla f(۰,۰).\mathbf{u} = -\frac{۱}{۵}.$$

پس f در مبدا مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید رویه $S_۱$ به معادله $z = ۲x^۲-۴x-۳y^۲+۶$ و رویه $S_۲$ به معادله $e^{x^۲y}-z-(y-۱)z^۲ = e-۱$ داده شده است.

الف) رویه $S_۱$ را توصیف نمایید و نوع آن را تعیین کنید. (۲ نمره)

ب) ثابت کنید که از نقطه $(۱,۱,۱)$ واقع بر رویه $S_۱$ دو خط راست متقاطع می‌گذرند که تماماً بر رویه $S_۱$ قرار دارند. معادلات این دو خط را بنویسید. (۵ نمره)

ج) معادله خط مماس در نقطه $(۱,۱,۱)$ بر خم C که از تلاقی دو رویه $S_۱$ و $S_۲$ حاصل می‌شود را بنویسید. (۶ نمره)

پاسخ الف. ابتدا رویه $S_۱$ بصورت استاندارد می‌نویسیم:

$$z = ۲(x-۱)^۲-۳y^۲+۴.$$

تلاقی رویه با صفحه $z=c$ هذلولی $(x-۱)^۲-۳y^۲ = c-۴$ است. تلاقی رویه با صفحه $x=c$، سهمی $z = -۳y^۲+۲(c-۱)^۲+۴$ با سر رو به پایین است و تلاقی رویه با صفحه $y=c$، سهمی $z = ۲(x-۱)^۲-۳c^۲+۴$ با سر رو به بالا است. بنابراین نوع رویه سهمی‌گون هذلولوی (یا زین اسبی) است.

پاسخ ب. معادله خط راست با بردار هادی (a,b,c) که از نقطه $(۱,۱,۱)$ می‌گذرد به صورت زیر است.

$$x(t) = at+۱,\quad y(t) = bt+۱,\quad z(t) = ct+۱.$$

برای اینکه خط تماماً روی رویه $S_۱$ قرار گیرد، باید نقطه $(x(t),y(t),z(t))$ به ازای هر t در رویه صدق کند. پس

$$\forall t,\quad ct+۱ = ۲(at+۱)^۲-۴(at+۱)-۳(bt+۱)^۲+۶.$$

با ساده کردن داریم

$$\forall t,\quad (۲a^۲-۳b^۲)t^۲-(۶b+c)t = ۰.$$

بنابراین ضریب $t^۲$ و ضریب t برابر صفر است.

$$۶b+c = ۰, ۲a^۲-۳b^۲ = ۰.$$

یعنی

$$c=-6b,a=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b.$$

پس بردار هادی خط بصورت $(a,b,c)=(\frac{\sqrt{6}}{2},1,-6)$ یا $(a,b,c)=(-\frac{\sqrt{6}}{2},1,-6)$ است که دو خط زیر را بدست می‌دهد.

$$l_1:\ \ x(t)=\frac{\sqrt{6}}{2}t+1,\ \ y(t)=t+1,\ \ z(t)=-6t+1.$$

$$l_2:\ \ x(t)=-\frac{\sqrt{6}}{2}t+1,\ \ y(t)=t+1,\ \ z(t)=-6t+1.$$

پاسخ ج. بردار نرمال صفحات مماس بر رویه‌ها در نقطه $(1,1,1)$ بر خم C عمودند. بنابراین بردار هادی خط مماس بر خم C در این نقطه در راستای $n_1\times n_2$ است که n_i بردار نرمال صفحه مماس بر رویه S_i در نقطه $(1,1,1)$ است. اما رویه S_1 دارای معادله $f(x,y,z)=2x^2-4x-3y^2+6-z=0$ و رویه S_2 دارای معادله $g(x,y,z)=e^{x^2y}-z-(y-1)z^2-e+1=0$ است. پس

$$\nabla f=(4x-4,-6y,-1),\ \ \nabla g=(2xye^{x^2y},x^2e^{x^2y}-z^2,-1-2(y-1)z).$$

$$n_1=\nabla f(1,1,1)=(0,-6,-1),\ \ n_2=\nabla g(1,1,1)=(2e,e-1,-1).$$

لذا بردار هادی خط مماس از رابطه زیر بدست می‌آید

$$n_1\times n_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&-6&-1\\2e&e-1&-1\end{vmatrix}=(6-e+1)\mathbf{i}-2e\mathbf{j}+12e\mathbf{k}.$$

چون خط مماس از نقطه $(1,1,1)$ می‌گذرد، معادله خط مماس بصورت زیر است.

$$x(t)=(7-e)t+1,\ \ y(t)=-2et+1,\ \ z(t)=12et+1.$$

---

۳. فرض کنید g تابعی سه متغیره و مشتق‌پذیر باشد و z تابعی برحسب x و y باشد که در رابطه ضمنی $g(zx^2+e^{xy},x^2y+\ln z,2x+z^2)=0$ صدق می‌کند و داریم $z(0,0)=1$.

الف) مطلوبست تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ برحسب مشتقات جزیی g. (۴ نمره)

ب) اگر $\nabla g(1,0,1)=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$. (۱ نمره)

پاسخ الف. راه اول. قرار می‌دهیم $u(x,y)=zx^2+e^{xy}$، $v(x,y)=x^2y+\ln z$ و $w(x,y)=2x+z^2$. همچنین قرار می‌دهیم $f(x,y)=g(u,v,w)=0$. با مشتق‌گیری برحسب x و استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\\&=\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x}x^2+2xz+ye^{xy})+\frac{\partial g}{\partial v}(2xy+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial g}{\partial w}(2+2\frac{\partial z}{\partial x}z)=0.\end{aligned}$$

با حل برحسب $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(-2xz-ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u}-2xy\frac{\partial g}{\partial v}-2\frac{\partial g}{\partial w}}{x^2\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial g}{\partial v}+2z\frac{\partial g}{\partial w}}. \tag{1}$$

راه دوم. قرار می‌دهیم $u(x,y)=zx^2+e^{xy}$، $v(x,y)=x^2y+\ln z$ و $w(x,y)=2x+z^2$. هم‌چنین قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=g(u,v,w)$. با توجه به فرمول مشتق ضمنی و قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}}=\frac{(-2xz-ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u}-2xy\frac{\partial g}{\partial v}-2\frac{\partial g}{\partial w}}{x^2\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial g}{\partial v}+2z\frac{\partial g}{\partial w}}.$$

پاسخ ب. با قرار دادن $x=0, y=0, z=1$ و $\dfrac{\partial g}{\partial u}=4$، $\dfrac{\partial g}{\partial v}=3$ و $\dfrac{\partial g}{\partial w}=-1$ در رابطه (۱) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{0+0+2}{0+3-2}=2.$$

موفق باشید