فصل ۲

توابع برداری و خم‌های فضایی

در این فصل توابعی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که دارای مقادیر برداری می باشند، یعنی برد آنها زیر مجموعه‌ای از R^n است. توابع برداری را برای توصیف خم‌های فضایی و همچنین بررسی حرکت اشیاء بکار می بریم.

تعریف ۱.۱ یک تابع برداری عبارت است از تابعی که دامنهٔ آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و برد آن یک مجموعه از بردارها می باشد.

با توجه به اینکه فضای واقعی سه بعدی است، علاقمند هستیم توابع برداری مانند $r: D_r \subseteq R \to R^3$ را مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین برای هر عدد حقیقی t در دامنهٔ r، برداری در R^3 مانند V وجود دارد به طوری که $r(t)=V$. اگر $f(t)$، $g(t)$ و $h(t)$ مولفه‌های $r(t)$ در R^3 باشند، آن‌گاه f ، g و h توابع حقیقی‌اند. می‌نویسیم

$$r(t)=\langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)i+g(t)j+h(t)k$$

بکار بردن متغیر t در دامنهٔ f بخاطر این است که در بسیاری از مسائل کاربردی متغیر مستقل نشان دهندهٔ زمان است.

مثال ۲.۱ فرض کنید

$$r(t)=\left\langle t^3, \ln(t-1), \sqrt{t}\right\rangle$$

دامنهٔ $\mathbf{r}$ شامل تمام t هایی است که هر یک از مولفه‌های $f(t)$، $g(t)$ و $h(t)$ تعریف شده باشند، یعنی $D_{\mathbf{r}} = D_f \cap D_g \cap D_h$.

در مثال فوق

$$D_f = R, \quad D_g = \{t:\ t > 1\}, \quad D_h = \{t:\ t \geq 0\}$$

لذا

$$D_r = D_f \cap D_g \cap D_h = \{t:\ t > 1\}$$

۱-۱ حد و پیوستگی

اگر $\mathbf{r}: D_r \subseteq R \to R^3$ تعریف شده باشد و $a \in R$ نقطه‌ای باشد که هر بازهٔ $(a-\delta, a+\delta)$ شامل نقطه‌ای غیر از a در دامنه $\mathbf{r}$ باشد، آن‌گاه حد $r(t)$ وقتی t به سمت a میل می‌کند را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱ .۳ اگر $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$، آن‌گاه $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد هریک از مولفه‌های $\mathbf{r}$ در a موجود باشد. در این‌صورت می‌نویسیم

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \rangle$$

مثال ۱ .۴ $\lim_{t\to 0} r(t)$ را وقتی که $\mathbf{r}(t) = \left\langle 1+t^3, te^{-t}, \frac{\sin t}{t} \right\rangle$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} r(t) &= \left[\lim_{t\to 0}(1+t^3)\right]i + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]j + \left[\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\right]k \\ &= i + k = (1,0,1)\end{aligned}$$

چون برای محاسبهٔ حد یک تابع برداری لازم است حد هریک از مولفه‌های آن را محاسبه کنیم. لذا اثبات قضیهٔ زیر با توجه به خواص مشابه برای توابع حقیقی و اعمال تعریف روی توابع برداری ساده می‌باشد.

قضیه ۱ .۵ فرض کنیم $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ توابع برداری و f یک تابع حقیقی باشد به طوری که $\lim_{t\to a} r_1(t)=l_1$ ، $\lim_{t\to a} r_2(t)=l_2$ و $\lim_{t\to a} f(t)=\alpha$. در این صورت

۱. $\lim_{t\to a}[r_1+r_2](t)=l_1+l_2$

۲. $\lim_{t\to a}[r_1-r_2](t)=l_1-l_2$

۳. $\lim_{t\to a}\langle r_1,r_2\rangle(t)=\langle l_1,l_2\rangle$

۴. $\lim_{t\to a}(f\cdot r_1)(t)=\alpha\cdot l_1$

۵. $\lim_{t\to a}(r_1\times r_2)(t)=l_1\times l_2$

تعریف ۱ .۶ تابع برداری r در نقطهٔ $a\in D_r$ پیوسته است اگر

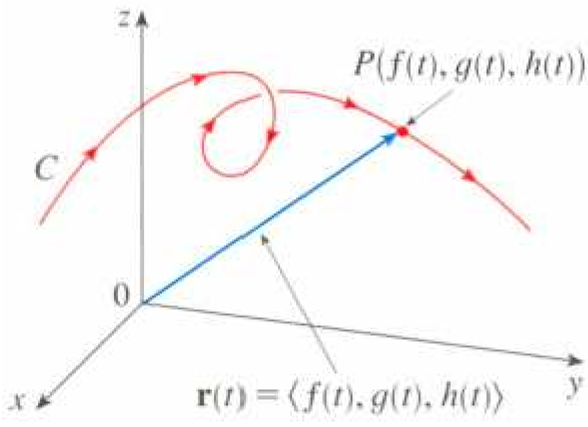
$$\lim_{t\to a} r(t)=r(a)$$

با توجه به تعریف حد می‌توان گفت: تابع برداری r در a پیوسته است اگر و تنها اگر هریک از مولفه‌های آن در a پیوسته باشند. اگر توابع حقیقی f ، g و h روی بازهٔ I پیوسته باشند، آن‌گاه مجموعهٔ

$$C=\{(x,y,z):\ x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t),\quad t\in I\}$$

یک منحنی فضایی نامیده می‌شود. معادلات $x=f(t)$ ، $y=g(t)$ و $z=h(t)$ را معادلات پارامتری C و t را پارامتر C می‌نامیم.

فرض کنید $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$. می‌توان $r(t)$ را به عنوان بردار موضع نقطهٔ $P(f(t),g(t),h(t))$ روی خم C در نظر گرفت. بنابراین C انتهای بردارهای موضع $r(t)$ وقتی $t\in I$ است، می‌باشد.



رسم نمودار یک تابع برداری توسط یکی از روش‌های زیر امکان‌پذیر است.

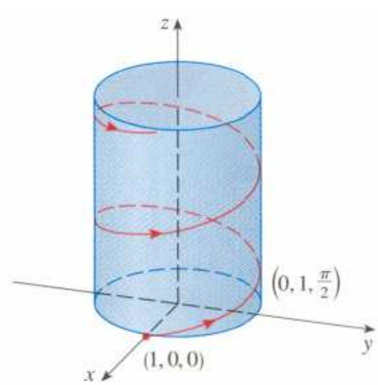
روش اول: فرض کنید $r(t)=\langle f(t), g(t)\rangle$ که f و g توابع حقیقی پیوسته‌اند. قرار می‌دهیم $x=f(t)$ و $y=g(t)$ و سعی می‌کنیم با حذف t از دو معادله به یک معادله بر اساس x و y برسیم، یعنی $F(x,y)=c$. نمودار تابع $F(x,y)$ را در دستگاه xy رسم می‌کنیم.

مثال ۱ .۷ منحنی C مشخص شده توسط تابع $\mathbf{r}(t)=\langle ۲\cos t, ۳\sin t\rangle$ را در صفحهٔ xy رسم کنید.

حل. قرار می‌دهیم $x=۲\cos t$ و $y=۳\sin t$. در این صورت

$$\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$$

بنابراین منحنی C یک بیضی به صورت نمایش داده شده در شکل خواهد بود.



از این روش برای رسم منحنی C در $R^۳$ نیز استفاده می‌شود. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۱ .۸ منحنی C داده شده توسط $r(t)=\langle \cos t, \sin t, t\rangle$ را رسم کنید.

حل. قرار می‌دهیم $x=\cos t$، $y=\sin t$ و $z=t$. چون $x^۲+y^۲=۱$ لذا منحنی C روی استوانهٔ $x^۲+y^۲=۱$ قرار دارد. نقطهٔ (x,y,z) دقیقاً بالای نقطهٔ $(x,y,۰)$ قرار می‌گیرد و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. از آنجا که $z=t$ است لذا منحنی C به صورت مارپیچ روی استوانه بالا می‌رود.

روش دوم: در این روش سعی می‌کنیم از حذف متغیر t بین مولفه‌های x، y و z دو معادله شامل x، y و z داشته باشیم. هر یک از این معادلات یک رویه در $R^۳$ مشخص می‌کند. منحنی حاصل تا فصل مشترک دو رویه است.

مثال ۱ .۹ منحنی C داده شده توسط $\mathbf{r}(t)=\left\langle \cos t, \sqrt{۲}\sin t, \cos t\right\rangle$ را رسم کنید.

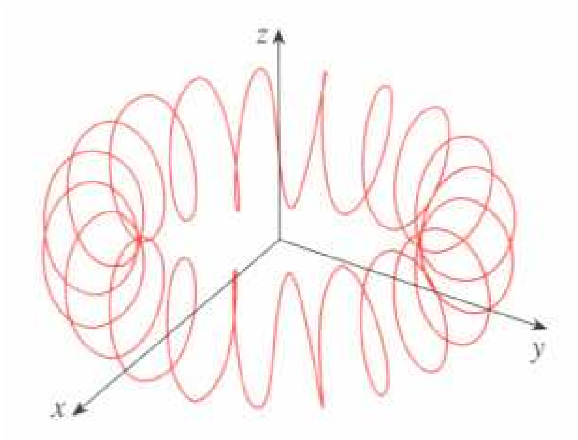
حل. قرار می‌دهیم $x=\cos t$، $y=\sqrt{۲}\sin t$ و $z=\cos t$. در این صورت $z=x$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ بنابراین منحنی C فصل مشترک کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ و صفحهٔ $z=x$ است.

روش سوم: استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری مانند MATLAB و MAPLE و غیره می‌باشد. این روش برای رسم همهٔ منحنی‌ها بکار می‌رود.

مثال ۱ .۱۰ منحنی داده شده توسط

$$r(t)=\langle(۴+\sin ۲۰t)\cos t,(۴+\sin ۲۰t)\sin t,\cos ۲۰t\rangle$$

با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری به صورت نمایش داده شده در شکل مشخص شده است.



۱-۲ مشتق تابع برداری

در انتهای این فصل، توابع برداری را برای توصیف حرکت یک متحرک در فضا بکار خواهیم برد. لذا برای این منظور نیاز داریم تا مفاهیم مشتق و انتگرال توابع برداری را مورد بررسی قرار دهیم.

فرض کنیم $r : D_r \subseteq R \to R^n$ یک تابع برداری باشد. مشتق تابع **r** را تعریف می‌کنیم:

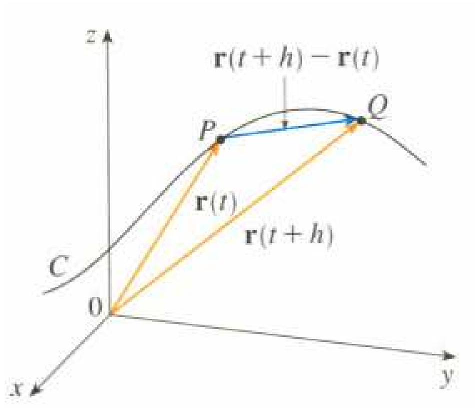
تعریف ۱ .۱۱ اگر $\lim_{h\to ۰} \dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}$ موجود باشد، آن‌گاه مقدار حد را مشتق r در نقطهٔ t نامیده و با $r'(t)$ یا $\dfrac{dr}{dt}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

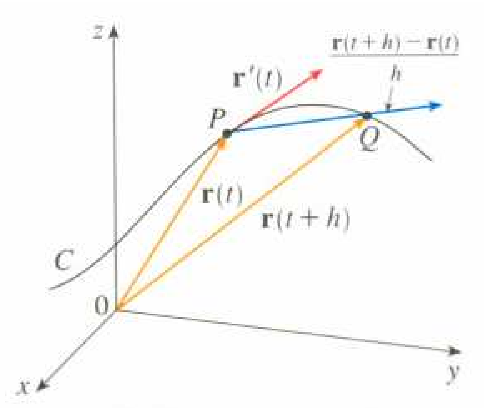
$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h\to ۰} \frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

تعبیر هندسی مشتق $r(t)$ وقتی که $n = ۳$ باشد در شکل زیر نشان داده شده است.

فرض کنیم خم C منحنی نظیر تابع برداری $r(t)$ باشد. اگر P و Q نقاطی با بردارهای موضع $r(t)$ و $r(t+h)$ روی C باشند، آن گاه بردار $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با $r(t+h)-r(t)$. اگر $۰<h<۱$ ، آنگاه بردار $(۱/h)(r(t+h)-r(t))$ هم جهت با $r(t+h)-r(t)$ است. هنگامی که h به صفر میل می کند، نقطه ی Q روی C به سمت P حرکت می کند. بنابراین بردار $(۱/h)(r(t+h)-r(t))$ به سمت برداری

روی خط مماس بر منحنی C در نقطهٔ P میل می کند. به این دلیل است که بردار $r'(t)$ ، بردار مماس بر منحنی C در نقطهٔ P است در صورتی که $r'(t)$ موجود و مخالف صفر باشد.





تعریف ۱ .۱۲ اگر $r'(t)\neq ۰$ باشد، آن گاه خط مماس بر منحنی C در نقطهٔ P خطی است که بردار هادی آن $r'(t)$ است و از نقطهٔ P می گذرد. بنابراین معادله ی پارامتری خط مماس به

$$\langle x, y, ۲\rangle = r(t)+r'(t)\alpha$$

تعریف ۱ .۱۳ اگر $r'(t)\neq ۰$ باشد، آن گاه بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطه ی P با بردار موضع $r(t)$ به صورت

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

است.

قضیه زیر بیان می کند که برای محاسبه ی $r'(t)$ کافی است مشتق هر یک از مولفه های آن را محاسبه کنیم.

قضیه ۱ .۱۴ اگر $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ ، آن گاه $r(t)$ مشتق پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از توابع حقیقی f ، g و h مشتق پذیر باشند. در این صورت داریم

$$r'(t)=\langle f'(t),g'(t),h'(t)\rangle = f'(t)i+g'(t)j+h'(t)k$$

برهان.

$$\begin{aligned}
r'(t)&=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{۱}{\Delta t}\left[r(t+\Delta t)-r(t)\right]\\
&=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{۱}{\Delta t}\left[\langle f(t+\Delta t),g(t+\Delta t),h(t+\Delta t)\rangle-\langle f(t),g(t),h(t)\rangle\right]\\
&=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{۱}{\Delta t}\langle f(t+\Delta t)-f(t),g(t+\Delta t)-g(t),h(t+\Delta t)-h(t)\rangle\\
&=\left\langle \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right\rangle\\
&=\langle f'(t),g'(t),h'(t)\rangle
\end{aligned}$$

مثال ۱ .۱۵ فرض کنید $r(t)=\left(۱+t^{۳}\right)i+te^{-t}j+\sin ۲t\,k$ و C خم نظیر آن در $R^{۳}$ باشد.

الف) مطلوبست محاسبه ی $r'(t)$.

ب) بردار یکانی مماس بر خم C نظیر $r(t)$ در نقطهٔ $P=(۱,۰,۰)$ واقع بر خم را محاسبه کنید.

ج) معادله ی خط مماس بر خم C در $P=(۱,۰,۰)$ را بیابید.

حل. الف) $\qquad r'(t)=۳t^{۲}\,i+(۱-t)e^{-t}j+۲\cos ۲t\,k$

ب) ابتدا لازم است نقطهٔ $t_۰$ را به گونه ای بیابیم که $P=\mathbf{r}(t_۰)$. قرار می دهیم

$$(۱,۰,۰)=\left(۱+t_۰^{۳},t_۰e^{-t_۰},\sin ۲t_۰\right)$$

بدست می آوریم $t_۰=۰$. بنابراین

$$T(۰)=\frac{r'(۰)}{|r'(۰)|}=\frac{j+۲k}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}j+\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}k$$

ج) معادله ی خط مماس بر C در P

از آنجا که $r(۰)=(۱,۰,۰)$ و $r'(۰)=\langle ۰\,,\,۱\,,\,۲\rangle$ لذا داریم

$$\begin{aligned}\langle x,y,z\rangle &= r(t_۰)+r'(t_۰)\alpha=r(۰)+r'(۰)\alpha\\ &=\langle ۱\,,\,۰\,,\,۰\rangle+\langle ۰\,,\,۱\,,\,۲\rangle\alpha\end{aligned}$$

بنابراین $x=۱$، $y=\alpha$ و $z=۲\alpha$ معادلات پارامتری خط مماس خواهند بود.

همانند توابع حقیقی، مشتقات مراتب بالاتر برای توابع برداری قابل تعریف می باشد. به عنوان مثال مشتق دوم تابع برداری r که با نماد r'' نشان داده می شود و به صورت زیر است

$$r''(t)=(r'(t))'$$

تعریف ۱ .۱۶ خم C داده شده توسط تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ روی بازه ی هموار I نامیده می شود اگر r' در هر نقطه از بازۀ I (به جز احتمالاً در نقاط ابتدا و انتهای I) مخالف صفر و پیوسته باشد.

مثال ۱ .۱۷ خم مارپیچ $r(t)=\langle\cos t\,,\sin t,t\rangle$ هموار است. چون

$$r'(t)=\langle-\sin t\,,cos\,t,۱\rangle$$

و لذا $r'(t)$ همواره مخالف صفر و پیوسته است.

مثال ۱ .۱۸ خم C نظیر تابع برداری $r(t)=\left\langle ۱+t^۳,\,t^۲\right\rangle$ هموار نمی باشد. زیرا

$$r'(t)=\langle ۳\,t^۲,\,۲\,t\rangle$$

لذا $r'(۰)=\langle ۰\,,\,۰\rangle$. نقطه ی نظیر $t=۰$ روی خم C ، یعنی $(۱,۰)$ را نقطۀ تیز یا بازگشتی منحنی می نامیم.

تعریف ۱ .۱۹ خم C را روی بازه ی I قطعه ای هموار می نامیم اگر حداکثر تعداد متناهی نقطه ی تیز یا بازگشتی داشته باشد.

خم ذکر شده در مثال قبل یک خم قطعه ای هموار است.

قضیه زیر، مشابه فرمول های مشتق گیری توابع حقیقی برای توابع برداری نیز بیان شده است. لازم به ذکر است که اثبات این فرمول ها با توجه به تعریف اعمال ذکر شده روی توابع برداری، قضیهٔ ۱ .۱۴ و فرمول های مربوط به توابع حقیقی می باشد.

قضیه ۱ .۲۰ فرض کنید u و v توابع برداری مشتق پذیر، α یک عدد حقیقی و f یک تابع حقیقی مشتق پذیر باشد. در این صورت

۱. $[u(t)+v(t)]' = u'(t)+v'(t)$

۲. $[(\alpha u)(t)]' = \alpha u'(t)$

۳. $[(f \cdot u)(t)]' = f'(t)u(t)+ f(t)u'(t)$

۴. $[(u \cdot v)(t)]' = u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t)$

۵. $[(u\times v)(t)]' = u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

۶. $[(u \circ f)(t)]' = f'(t)\cdot u'(f(t))$ (قاعده ی زنجیره ای)

مثال ۱ .۲۱ نشان دهید اگر $|r(t)| = c$ که در آن c یک عدد ثابت است، آن گاه $r'(t)$ بر $r(t)$ عمود است.

حل. چون

$$r(t)\cdot r'(t) = |r(t)|^{۲} = c^{۲}$$

با توجه به رابطه ی (۴) در قضیه ی قبل و مشتق گیری از طرفین رابطه ی بالا داریم

$$\circ = [r(t)\cdot r(t)]' = r'(t)\cdot r(t)+r(t)\cdot r'(t) = ۲\, r'(t)\cdot r(t)$$

بنابراین $r'(t)\cdot r(t)=0$، یعنی $r'(t)\perp r(t)$.

انتگرال یک تابع برداری

فرض کنیم $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ باشد. با توجه به مشتق توابع برداری تابع اولیه یا انتگرال $r(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\int r(t)\,dt=\langle \int f(t)\,dt,\int g(t)\,dt,\int h(t)\,dt\rangle$$

همچنین، انتگرال معین تابع برداری پیوسته $r(t)$ روی بازهٔ $[a,b]$

$$\int_a^b r(t)\,dt=\langle \int_a^b f(t)\,dt,\int_a^b g(t)\,dt,\int_a^b h(t)\,dt\rangle$$

واضح است که تابع اولیه $r(t)$ یک تابع برداری و انتگرال معین $r(t)$ روی بازهٔ $[a,b]$ یک بردار می باشد. با توجه به تعریف فوق بسیاری از قضایای مربوط به محاسبه انتگرال توابع حقیقی برای محاسبه توابع برداری نیز برقرار است. از جمله

$$\int_a^b r(t)\,dt=R(t)\big]_a^b=R(b)-R(a)$$

که در آن $R'(t)=r(t)$ است.

مثال ۱ . ۲۲ اگر $r(t)=\cos t\, i+2\sin t\, j+e^t k$ باشد، آنگاه

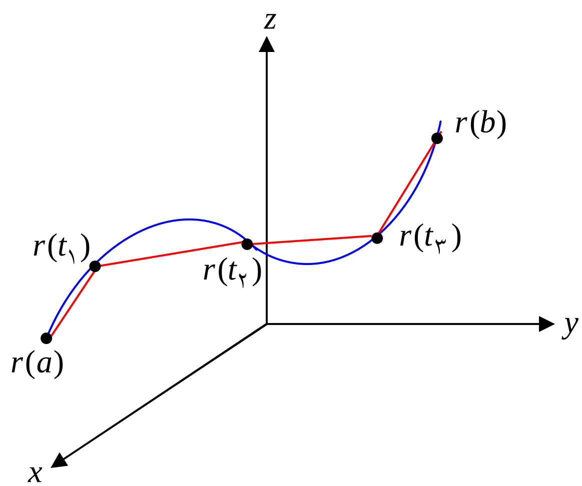
$$\begin{aligned}\int r(t)dt&=\left(\int\cos t\,dt\right)i+\left(\int 2\sin t\,dt\right)j+\left(\int e^t\,dt\right)k\\&=\sin t\, i-2\cos t\, j+e^t\, k+C\end{aligned}$$

که در آن C یک بردار ثابت است. همچنین

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)\,dt&=\left[\sin t\, i-2\cos t\, j+e^t k\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=i+2j+(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\,k\end{aligned}$$

۳ - ۱ طول و انحناء یک خم فضایی

فرض کنیم C خم نظیر تابع برداری $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ باشد. یک سؤال طبیعی این است که طول این منحنی روی یک بازهٔ معین مانند $I=[a,b]$ چقدر است؟



اگر $p=\{t_۰=a<t_۱<\cdots<t_n=b\}$ افزاری دلخواه برای I باشد، آنگاه نقاطی با بردارهای موضع $r(t_i)$ که $۰\le i\le n$ است را روی C در نظر می گیریم. مطابق شکل زیر ($n=۳$ فرض شده است.)

بردارهای $r(t_i)-r(t_{i-۱})$ $(۱\le i\le n)$ را در نظر می گیریم. مجموع ریمانی تابع برداری $r(t)$ نسبت به افزار p را به صورت $S(p,r)=\sum_{i=۱}^{n}|r(t_i)-r(t_{i-۱})|$ تعریف می کنیم.

در حقیقت $S(p,r)$ مجموع طول پاره خط های مشخص شده در شکل است.

قرار می دهیم

$$\|p\|=Max\{t_i-t_{i-۱}=\Delta t_i\ i=۱,۲,\ldots,n\}$$

می توان تصور کرد که اگر $\|p\|\to ۰$، آنگاه مجموع طول پاره خط ها به سمت طول خم میل می کند.

بنابراین اگر $L=\lim\limits_{\|p\|\to 0} s(p,r)$ موجود و متناهی باشد مقدار حد را طول قوس خم C روی I نامیده و

با L نشان می دهیم.

برای به دست آوردن فرمولی برای محاسبه ی طول قوس خم C به صورت زیر عمل می کنیم.

فرض کنیم $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ که در آن f, f', g, g', h و h' روی $[a,b]$ پیوسته

می باشند. قرار می دهیم $s_i=\left|r(t_i)-r(t_{i-1})\right|$ $(1\le i\le n)$ در این صورت داریم

$$S(p,r)=\sum_{i=1}^{n} s_i$$

قضیه ی مقدار میانگین را برای توابع f, g و h روی هر یک از بازه های $[t_{i-1},t_i]$ به کار می بریم. لذا

داریم

$$\begin{aligned}
f(t_i)-f(t_{i-1}) &= f'(a_i)(t_i-t_{i-1}) = f'(a_i)\Delta t_i\,,\\
g(t_i)-g(t_{i-1}) &= g'(b_i)(t_i-t_{i-1}) = g'(b_i)\Delta t_i\,,\\
h(t_i)-h(t_{i-1}) &= h'(c_i)(t_i-t_{i-1}) = h'(c_i)\Delta t_i\,,
\end{aligned}$$

که در آن a_i, b_i و c_i نقاطی در بازه ی (t_{i-1},t_i) می باشند.

بنابراین

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{\left(f(t_i)-f(t_{i-1})\right)^2+\left(g(t_i)-g(t_{i-1})\right)^2+\left(h(t_i)-h(t_{i-1})\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(f'(a_i)\Delta t_i\right)^2+\left(g'(b_i)\Delta t_i\right)^2+\left(h'(c_i)\Delta t_i\right)^2}\\
&= \sqrt{f'(a_i)+g'(b_i)+h'(c_i)}.\Delta t_i
\end{aligned}$$

حال اگر $\|p\|\to 0$، آنگاه نقاط a_i, b_i و c_i بر هم منطبق شده و لذا می توانیم بنویسیم

$$L = \lim_{\| p \| \to \cdot} s(p, r)$$
$$= \lim_{\| p \| \to \cdot} \sum_{i=١}^{n} \sqrt{f'(a_i) + g'(a_i) + h'(a_i)}.\Delta t_i$$
$$= \lim_{\| p \| \to \cdot} \sum_{i=١}^{n} | r'(a_i) |.\Delta t_i \,.$$

با توجه به تعریف انتگرال معین توابع حقیقی داریم

$$L = \int_a^b | r'(t) | dt$$
$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^٢ + g'(t)^٢ + h'(t)^٢}\, dt$$

مثال ۱ .۲۳ طول خم مارپیچ $r(t) = cos\ t\ i + sin\ t\ j + t\ k$ را از نقطه ی $(١,٠,٠)$ تا نقطه ی $(١,٠,٢\pi)$ به دست آورید.

حل. فرض کنیم p نقطه ای به مختصات $(١,٠,٠)$ و Q نقطه ای به مختصات $(١,٠,٢\pi)$ باشند. در این صورت

$$P = r(\cdot)\,,\, Q = r(٢\pi)$$

بنابراین $a = ٠$ و $b = ٢\pi$.

$$r'(t) = -sin\ t\ i + cos\ t\ j + k$$
$$L = \int_{\cdot}^{٢\pi} | r'(t) |\, dt = \int_{\cdot}^{٢\pi} \sqrt{٢}\ dt = ٢\sqrt{٢}\pi \,.$$

نکته: اگر C یک خم قطعه ای هموار روی بازه ی I باشد، آنگاه می توانیم C را به صورت اجتماع تعداد متناهی از خم های هموار بنویسیم. لذا طول C برابر مجموع طول های تعداد متناهی خم هموار است.

اگر خم C نظیر تابع برداری $r(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ $(a\leq t\leq b)$ یک خم قطعه ای هموار باشد،

آنگاه تابع طول قوس S را به صورت $S(t)=\int_a^t |r'(u)|\, du$ تعریف می کنیم.

در حقیقت $s(t)$ طول قسمتی از خم C بین $r(a)$ و $r(t)$ می باشد. چون طول قوس فقط وابسته به شکل خم C است لذا در بسیاری از مسائل لازم است که تابع برداری وابسته به خم C را بر اساس طول قوس پارامتری کنیم. توجه به معادله ی (۱)، $s(t)$ تابعی از پارامتر t خواهد بود. می توانیم t را از این تابع براساس S به دست آوریم، یعنی اگر $S(t)=K(t)$ آنگاه $t=K^{-1}(S)$.

با جایگذاری $K^{-1}(S)$ به جای t در فرمول $r(t)$، تابع برداری براساس S پارامتری می شود.

مثال ۱ . ۲۴ تابع برداری $r(t)=\langle \sin t,\cos t,t\rangle$ که در آن $t\geq 0$ را براساس طول قوس خم نظیر آن پارامتری کنید.

حل.

$$r'(t)=\langle \cos t,\sin t,1\rangle$$

در نتیجه، $|r'(t)|=\sqrt{2}$. بنابراین

$$S(t)=\int_0^t |r'(u)|\, du=\int_0^t \sqrt{2}\, du=\sqrt{2}\, t$$

پس $t=\frac{S}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}S$. فرم پارامتری تابع $r(t)$ براساس طول قوس به صورت $r(t(S))=\langle \sin\frac{\sqrt{2}}{2}S,\cos\frac{\sqrt{2}}{2}S,\frac{\sqrt{2}}{2}S\rangle$ است.

۱ – ۴ انحناء

اگر C یک خم هموار تعریف شده با تابع برداری $r(t)$ باشد، آنگاه $r'(t) \neq ۰$ و بردار یکانی مماس بر آن $T(t) = \frac{|r'(t)|}{|r(t)|}$ می باشد. از آنجایی که T مشخص کننده ی جهت منحنی می باشد اندازه ی تغییرات T نسبت به طول قوس را انحناء می نامیم.

تعریف ۱ . ۲۵ انحناء خم C با نماد k نشان داده می شود و به صورت

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

است.

برای محاسبه ی انحناء ساده ترین راه این است که بتوانیم آن را براساس پارامتر t بیان کنیم.

با توجه به تعریف تابع طول قوس داریم

$$\frac{dS}{dt} = |r'(t)| \qquad (۱)$$

بنابراین، با استفاده از قاعده ی زنجیره ای می توانیم بنویسیم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad , \quad k = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT/dt}{dS/dt} \right|$$

در نتیجه با توجه به معادله ی (۱) داریم

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} \qquad (۲)$$

مثال ۱ . ۲۶ نشان دهید انحناء یک دایره به شعاع a برابر $\frac{۱}{a}$ است.

حل. دایره ای به شعاع a نظیر تابع برداری

$$r(t) = \langle a \cos t, a \sin t \rangle \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

است.

بنابراین $r'(t)=\langle -a\ \sin t, a\ \cos t\rangle$ و $|r'(t)|=a$.

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\langle -\sin t, \cos t\rangle$$

و

$$T'(t)=\langle -\cos t, \sin t\rangle$$

در نتیجه

$$k(t)=\frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}=\frac{۱}{a}$$

اگر چه معادله ی (۲) برای محاسبه ی انحناء مفید است ولی در قضیه ی زیر فرمول ساده تری را برای محاسبه ی انحناء معرفی می کنیم.

قضیه ی ۱ . ۲۷ انحناء خم C داده شده توسط تابع برداری $r(t)$ برابر است با

$$k(t)=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^{۳}}$$

برهان. چون $T=\frac{r'}{|r'|}$ و $|r'|=\frac{dS}{dt}$، داریم

$$r'=|r'|\,T=\frac{ds}{dt}\,T$$

در نتیجه

$$r''=\frac{d^{۲}S}{dt^{۲}}\,T+\frac{dS}{dt}\,T'$$

از آنجا که $T\times T=۰$ می توانیم بنویسیم

$$r' \times r'' = (\frac{ds}{dt})^{2} \left(T \times T' \right)$$

چون $|T| = 1$ پس $T \perp T'$. بنابراین

$$|r' \times r''| = (\frac{ds}{dt})^{2} \; |T \times T'| = (\frac{ds}{dt})^{2} \; |T| \, |T'|$$

$$|T'| = \frac{|r' \times r''|}{(ds/dt)^{2}} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^{2}}$$

در نهایت داریم

$$k = \frac{|T'|}{|r'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^{3}}$$

مثال ۱ . ۲۸ انحناء خم C نظیر تابع برداری $r(t) = \langle t, t^{2}, t^{3} \rangle$ در نقطه ی $(0,0,0)$ واقع بر C را محاسبه کنید.

حل. ابتدا روابط مورد نیاز را محاسبه می کنیم:

$$r'(t) = \langle 1, 2t, 3t^{2} \rangle \quad , \quad r''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

لذا داریم

$$r'(0) = \langle 1,0,0 \rangle \quad , \quad r''(0) = \langle 0,2,0 \rangle$$
$$k(0) = \frac{|r'(0) \times r''(0)|}{|r'(0)|^{3}} = \frac{2}{1} = 2$$

در حالت خاص اگر خم C توسط $y = f(x)$ در R^{2} تولید شده باشد، آنگاه می توان فرم پارامتری C را به صورت $r(x) = \langle x, f(x) \rangle$ نوشت. در این صورت $r'(x) = \langle 1, f'(x) \rangle$ و $r''(x) = \langle 0, f''(x) \rangle$.

بنابراین

$$k(x)=\frac{|f''(x)|}{\left[1+f'(x)^2\right]^{3/2}}$$

مثال ۱ . ۲۹ انحناء سهمی $y=x^2$ را در نقطه ی $(2,4)$ واقع بر آن محاسبه کنید.

حل. از آنجا که $y=x^2$ پس $y'=2x$ و $y''=2$. بنابراین

$$k(x)=\frac{|y''|}{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}=\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}} \quad , \quad k(2)=\frac{2}{(17)^{3/2}}$$

۱– ۵ بردار قائم اصلی و قائم دوم

در یک نقطه واقع برخم هموار C تعداد زیادی بردار وجود دارند که بر بردار یکانی مماس در این نقطه عمود می باشند. از بین این بردارها دو بردار خاص N و B را در نظر می گیریم. چون $|T|=1$ پس $T\perp T'$. توجه کنید که T' بردار یکانی نمی باشد، اما اگر r' نیز معرف یک خم هموار باشد، آنگاه بردار قائم اصلی (یا به طور خلاصه قائم) را با N نشان می دهیم و به صورت

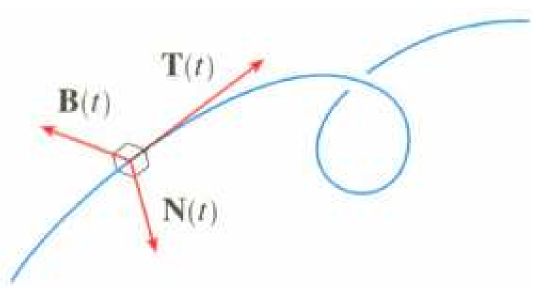
$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

تعریف می کنیم.

بردار $B(t)=T(t)\times N(t)$ را بردار قائم دوم می نامیم. واضح است که این بردار بر بردارهای

T و N عمود است.

سه بردار $T(t)$،$N(t)$ و $B(t)$ یک دستگاه تشکیل می دهند که دستگاه TNB یا کنج فرنه نامیده می شود.



مثال ۱ . ۳۰ بردارهای قائم اصلی و قائم دوم بر خم داده شده توسط $r(t)=\langle t,\sin t,\cos t\rangle$ را برای نقطه ی دلخواه روی C محاسبه کنید.

حل.

$$r'(t)=\langle ۱,\cos t,-\sin t\rangle$$
$$|r'(t)|=\sqrt{۲}$$
$$T(t)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\langle ۱,\cos t,-\sin t\rangle$$
$$T'(t)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\langle ۰,-\sin t,-\cos t\rangle \qquad |T'(t)|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$
$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=\langle ۰,-\sin t,-\cos t\rangle$$
$$B(t)=T(t)\times N(t)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & ۱ \\ -\cos t & -\sin t & ۰ \end{vmatrix}$$
$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\langle \sin t,-\cos t,۱\rangle$$

تعریف ۱ . ۳۱ صفحه ای که توسط بردارهای قائم $N(t)$ و $B(t)$ تولید می شود صفحه ی قائم بر خم C در نقطه ی P واقع بر آن با بردار موضع $r(t)$ می باشد. واضح است که بردار نرمال صفحه ی قائم، بردار T می باشد. صفحه ای که توسط بردارهای T و N تولید می شود صفحه ی بوسان خم C در نقطه ی P نامیده می شود. واضح است که بردار نرمال صفحه ی بوسان بردار B می باشد.

تعریف. شعاع انحناء خم C در نقطه ی P برابر است با $\rho=\frac{۱}{K}$ و مرکز انحناء در نقطه ی P که با O نشان داده می شود به صورت

$$O(t)=r(t)+\rho N(t)$$

است.

کره ای به مرکز $o(t)$ و شعاع انحناء ρ را کره ی انحناء می نامیم. فصل مشترک کره ی انحناء و صفحه ی بوسان، دایره ی انحناء نامیده می شود.

مثال ۱ . ۳۲ معادله صفحه بوسان، صفحه نرمال و کره بوسان خم C داده شده توسط $r(t)=\langle t,t^{۲},t^{۳}\rangle$ را در نقطه ی $(۰,۰,۰)$ واقع بر آن را محاسبه کنید.

حل. داریم $r(t)=\langle t,t^{۲},t^{۳}\rangle=(۰,۰,۰)$ در نتیجه $t=۰$.

$$r'(t)=\langle ۱,۲t,۳t^{۲}\rangle \quad , \quad r'(۰)=\langle ۱,۰,۰\rangle$$

$$T=\frac{۱}{\sqrt{۱+۴t^{۲}+۹t^{۴}}}\langle ۱,۲t,۳t^{۲}\rangle$$

$$T'=\frac{۸t+۳۶t^{۳}}{۲\sqrt{۱+۴t^{۲}+۹t^{۴}}}\langle ۱,۲t,۳t^{۲}\rangle+\frac{۱}{۲\sqrt{۱+۴t^{۲}+۹t^{۴}}}\langle ۰,۲,۶t\rangle$$

$$T(۰)=\langle ۱,۰,۰\rangle \quad , \quad T'(۰)=\langle ۰,۲,۰\rangle$$

$$N(۰)=\frac{۱}{۲}\langle ۰,۲,۰\rangle=\langle ۰,۱,۰\rangle$$

$$B(۰)=T(۰)\times N(۰)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\langle ۰,۰,۱\rangle$$

بنابراین صفحه ی نرمال $x=۰$، یعنی صفحه ی yz است. صفحه ی بوسان $z=۰$، یعنی صفحه ی xy است.

$$r''(t)=\langle ۰,۲,۶t\rangle \quad , \quad r''(۰)=\langle ۰,۲,۰\rangle$$

$$k(۰)=\frac{|r'(۰)\times r''(۰)|}{|r'(۰)|^{۳}}=\frac{|\langle ۰,۰,۲\rangle|}{۱}=۲ \quad , \quad \rho(۰)=\frac{۱}{k(۰)}=\frac{۱}{۲}$$

مرکز انحناء در نقطه $(۰,۰,۰)$

$$=(۰,۰,۰)+\rho(۰)\,.\,N(۰)$$

$$=(۰,۰,۰)+\frac{۱}{۲}(۰,۱,۰)$$

$$=(۰,\frac{۱}{۲},۰)$$

بنابراین معادله ی کره ی بوسان در نقطه ی $(۰,۰,۰)$ روی C برابر است با

$$x^{۲}+(y-\frac{۱}{۲})^{۲}+z^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

فرمول های ارائه شده برای محاسبه ی T, N, B و k را به صورت

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|} \qquad N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad B(t)=T(t)\times N(t)$$
$$k=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^{۳}}$$

بیان می کنیم.

۱- ۶ حرکت در فضا: سرعت وشتاب

در این بخش نشان می دهیم که چگونه می توان مفاهیم بردار مماس، بردار قائم و انحناء را درفیزیک برای مطالعه ی حرکت یک شیء در فضا بکار برد.

فرض کنیم تابع برداری $r(t)$ مشخص کننده ی حرکت یک شیء در فضا باشد. اگر $r(t)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $r'(t)$ بردار سرعت و $|r'(t)|$ سرعت متحرک نامیده می شود. همچنین، تابع طول قوس مشخص کننده ی مسافت طی شده توسط متحرک پس از سپری شدن زمان t می باشد. اگر $r'(t)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه بردار $r''(t)$ را بردار شتاب متحرک نامیده و با $a(t)$ نشان می دهیم. $|a(t)|$ شتاب متحرک می باشد.

مثال ۱ . ۳۳ یک متحرک از نقطه ی $r(۰)=\langle ۱,۰,۰\rangle$ با سرعت اولیه ی $v(۰)=\langle -۱,-۱,۱\rangle$ شروع به حرکت می کند. اگر شتاب این متحرک $a(t)=\langle ۴t,۶t,۱\rangle$ باشد، سرعت متحرک و بردار موضع آن را در زمان t محاسبه کنید.

حل. چون $a(t)=v'(t)$ پس

$$v(t)=\int a(t)\,dt=\int (۴t\ i+۶t\ j+k)\,dt$$
$$=۲t^{۲}\ i+۳t^{۲}\ j+t\ k+C$$

برای مشخص شدن بردار ثابت C، از سرعت اولیه، یعنی $v(\cdot) = -i - j + k$ استفاده می کنیم

$$v(\cdot) = C = -i - j + k$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v(t) &= ۲t^{۲}\, i + ۳t^{۲}\, j + t\, k - i - j + k \\ &= (۲t^{۲} - ۱)\, i + (۳t^{۲} - ۱)\, j + (t + ۱)\, k \end{aligned}$$

از آنجا که $v(t) = r'(t)$، لذا داریم

$$\begin{aligned} r(t) &= \int v(t)\, dt \\ &= \int \left[(۲t^{۲} - ۱)\, i + (۳t^{۲} - ۱)\, j + (t + ۱)\, k \right] dt \\ &= (\frac{۲}{۳} t^{۳} - t)\, i + (t^{۳} - t)\, j + (\frac{۱}{۲} t^{۲} + t)\, k + D \end{aligned}$$

با قرار دادن $t = ۰$ ، بردار ثابت D قابل محاسبه است.

$$D = r(\cdot) = i$$

بنابراین

$$r(t) = (\frac{۲}{۳} t^{۳} + t + ۱)\, i + (t^{۳} - t)\, j + (\frac{۱}{۲} t^{۲} + t)\, k$$

در حالت کلی انتگرال گیری از توابع برداری به ما این امکان را می دهد با استفاده از شتاب، سرعت و با استفاده از سرعت، موقعیت یک متحرک را توسط فرمول های

$$v(t) = v(t_{\cdot}) + \int_{t_{\cdot}}^{t} a(u)\, du \qquad r(t) = r(t_{\cdot}) + \int_{t_{\cdot}}^{t} v(u)\, du$$

محاسبه کنیم.

اگر نیروی وارد شده بر یک جسم که باعث حرکت آن می شود معلوم باشد، آنگاه شتاب متحرک توسط قوانین حرکت نیوتن محاسبه می شود. فرم برداری این قوانین بیان می کند: اگر نیرویی مانند

$F(t)$ به یک جسم به جرم m در زمان t وارد شود و باعث حرکت جسم با شتاب $a(t)$ شود، آنگاه

$$F(t)=m\ .\ a(t)$$

برای مطالعه ی حرکت یک متحرک در بسیاری موارد مفید است که بردار شتاب را به دو مؤلفه، یکی در راستای بردار مماس و دیگری در راستای بردار قائم تجزیه می کنیم.

می دانیم سرعت، یعنی υ برابر با $|v|$ است. لذا داریم

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{v(t)}{|v(t)|}=\frac{v}{\upsilon}$$

بنابراین

$$v=\upsilon\ .\ T$$

با مشتق گیری از طرفین داریم

$$a=v'=\upsilon'\ .\ T+\upsilon\ .\ T'$$

همچنین داریم

$$k=\frac{|T'|}{|r'|}=\frac{|T'|}{\upsilon}$$

در نتیجه $|T'|=K\upsilon$.

بنابراین با توجه به تعریف بردار یکانی قائم N داریم

$$T'=|T'|\ .\ N=k\upsilon N$$

در نتیجه

$$a = \upsilon' T + k\upsilon^{۲} N \qquad (۱)$$

با قراردادن $a_T = \upsilon'$ و $a_N = kv^{۲}$ داریم

$$a = a_T T + a_N N$$

a_T را مؤلفه ی مماس شتاب و a_N را مؤلفه ی قائم شتاب می نامیم.

با استفاده از خواص ضرب داخلی و معادله(۱) می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} v \,.\, a &= \upsilon T \,.\, (\upsilon' T + k\upsilon^{۲} N) \\ &= \upsilon\upsilon' T \,.\, T + k\upsilon^{۳} T \,.\, N \\ &= \upsilon\upsilon' \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_T = \upsilon' = \frac{v \,.\, a}{\upsilon} = \frac{r'(t) \,.\, r''(t)}{|r'(t)|} \qquad (۲)$$

همچنین با استفاده از فرمول مربوط به انحناء داریم

$$a_N = k\upsilon^{۲} = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^{۳}} |r'(t)|^{۲} = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|} \qquad (۳)$$

مثال ۱ . ۳۴ فرض کنید $r(t) = \langle e^t, e^{-t}, e^t \rangle$ معادله ی حرکت یک متحرک باشد. مطلوب است محاسبه ی مؤلفه مماس و قائم شتاب متحرک.

حل.

$$\begin{aligned} r(t) &= e^t\, i + e^{-t}\, j + e^t k \\ r'(t) &= e^t\, i - e^{-t}\, j + e^t k \\ r''(t) &= e^t\, i + e^{-t}\, j + e^t k \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به معادله ی (۲) داریم

$$a_T = \frac{r'(t)\,.\,r''(t)}{\left|r'(t)\right|} = \frac{۲e^{۴t} - ۱}{\sqrt{۱ + ۲e^{۴t}}}$$

از آنجا که $r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^{t} & -e^{-t} & e^{t} \\ e^{t} & e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = \langle -۲,۰,۲ \rangle$ با توجه به معادله ی (۳) داریم

$$a_N = \frac{\left|r'(t) \times r''(t)\right|}{\left|r'(t)\right|} \; \frac{۲\sqrt{۲}e^{۲t}}{\sqrt{۱ + ۲e^{۴t}}}$$