فصل سوم

توابع چند متغیره

تعریف: تابع $f:D_f\subseteq R^n\to R$ یک تابع چند متغیره نامیده می شود. (D_f دامنه f می باشد). یا به طور خلاصه f را n متغیره نامیم.

مثال: $f(x,y)=x^۲+xy$ یک تابع دو متغیره و $g(x,y,z)=\sqrt{xyz}+\ln(x^۲+yz)$ یک تابع یک سه متغیره است.

۳-۱ : حد و پیوستگی توابع چند متغیره

تعریف: فرض کنیم f یک تابع n متغیره با دامنه D باشد و $a\in R^n$ به طوری که هر همسایگی a شامل نقطه ای غیر از a از دامنه f باشد. گوییم حد $f(X)$ وقتی که X به a نزدیک می شود برابر L است و می نویسم:

$$\lim_{X\to a} f(X)=L$$

اگر برای هر $\varepsilon\rangle ۰$ عدد $\delta\rangle ۰$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall X\in D: ۰\langle \|X-a\|\langle \delta \quad \Rightarrow \quad |f(X)-L|\langle \varepsilon_۰$$

تعریف: تابع $f:D_f\subseteq R^n\to R$ در $a\in D_f$ پیوسته است اگر $\lim_{X\to a} f(X)=f(a)$.

قضیه: اگر f و g در تابع n متغیره ی پیوسته در نقطه a باشند آنگاه

الف: $f+g$ در a پیوسته است.

ب: $f-g$ در a پیوسته است.

ج: $f.g$ در a پیوسته است.

د: اگر $g(a)\neq ۰$ آنگاه $\frac{f}{g}$ در a پیوسته است.

قضیه: اگر $h:D_h \subseteq R \to R$ و $f:D_f \subseteq R^n \to R$ تعریف شده باشند به طوری که f در a پیوسته و h در $f(a)$ پیوسته باشد آنگاه hof در a پیوسته است.

مثال: تابع $f(x,y)=\sin(\frac{xy}{x^2+1})+e^{xy}$ در $a=(0,0)$ پیوسته است.

با توجه به قضایای فوق می توانیم نتیجه زیر را برای محاسبه حد داشته باشیم.

نتیجه: برای محاسبه ی حد تابع چند متغیره با توجه به قضایای ذکر شده کافی است نقطه a را در فرمول تابع قرار دهیم اگر حالت مبهم ایجاد نشود مقدار حاصل حد تابع f در نقطه a می باشد.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} Ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}\right)=Ln\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right)=Ln 1=0$$

در توابع چند متغیره نمی توان برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده کرد. همچنین در توابع چند متغیره حد چپ و راست معنا ندارد. چون در R^n رابطه ی کوچکتری معنا ندارد.

برای محاسبه $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وقتی که یکی از حالتهای مبهم پیش آید، حدهای مسیری را مطرح می کنیم. حدهای مسیری مشابه حد چپ و راست در توابع یک متغیره می باشند.

تعریف: یک مسیر عبارت است از یک منحنی که از نقطه ی $A=(a,b)$ می گذرد یا در حد از این نقطه می گذرد یعنی این که منحنی اگر توسط $y=g(x)$ داده شده باشد آن گاه در حد از $(0,+\infty)$ می گذرد.

$$\lim_{x\to a} g(x)=b$$

$$y=\frac{1}{x} \qquad x\to 0 \Rightarrow y\to\infty$$

قضیه : اگر $f : D_f \subseteq R^n \to R$ تعریف شده باشد و (a,b) نقطه ی حدی دامنه باشد در این صورت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ اگر و تنها اگر روی هر مسیر $y = g(x)$ حد تابع f برابر L باشد یعنی $\lim_{x\to a} f(x, g(x)) = L$

از آن جایی که تعداد مسیرهای مورد نظر بی نهایت می باشد از قضیه فوق به صورت زیر استفاده می کنیم:

چند مسیر اصلی را تعریف می کنیم. اگر حد روی یکی از این مسیرهای اصلی موجود نباشد یا روی دو مسیر حد وجود داشته باشد ولی با هم برابر نباشد در این صورت تابع f حد ندارد. اگر روی همه ی مسیرهای ذکر شده ی (اصلی) حد موجود و برابر بود نمی توانیم بگوییم حد وجود دارد ولی می توانیم مقدار حد را حدس بزنیم و سپس با استفاده از تعریف حد ثابت کنیم مقدار حد همان مقدار حدس زده شده است یا مجبوریم با روش های دیگر حد را رد کنیم.

مسیرهای اصلی :

فرض کنید $f : D \subseteq R^۲ \to R$ باشد، مسیرهای اصلی برای محاسبه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ عبارتند از :

۱- خط $x = a$

۲- خط $y = b$

۳- $y = b = m(x-a)$ (تمام خطوطی که از a و t می گذرند).

۴- $y = b = m(x-a)^r$ (منحنی هایی که از (a,b) می گذرند).

۵- مسیر خاص تابع f با توجه به عبارت های ظاهر شده در فرمول f

* نکته : در صورت مبهم بودن حد از مسیرهای اصلی استفاده می کنیم.

مثال: در وجود یا عدم وجود حد زیر بحث کنید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$ مبهم

الف) روی مسیر $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0\times y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

ب) روی مسیر $y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x(0)}{x^2+0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

پ) روی مسیر $y = mx \quad (m \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$$

چون روی دو مسیر مقدار حد متفاوت است

پس حد وجود ندارد.

$$If \quad m = 1 \quad \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

تعریف: تابع f در نقطه ی $a \in D_f$ پیوسته است اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

با توجه به این که پیوستگی تابع بستگی به وجود حد روی مسیرهای ذکر شده در مبحث حد دارد لذا مشابهتاً پیوستگی مسیری را داریم.

قضیه: تابع $f : D_f \subseteq R^2 \to R$ در a پیوسته است اگر و تنها اگر f روی هر مسیر پیوسته باشد.

مثال: آیا f در مبدأ پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \quad ?$$

بر روی مسیر $y = x$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[x=y]{}(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=0 \quad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim \frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

پس f روی مسیر $y=x$ در $(0,0)$ پیوسته نمی باشد.

تمرین ۸۱ فصل ۲: مشخص کنید آیا تابع f با ضابطه ی زیر در نقطه ی $(-1,0)$ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy+y}{x^2+y^2+2x+1} & (x,y)\neq(-1,0) \\ 0 & (x,y)=(-1,0) \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y)=\frac{0}{0}$$ مبهم

۱) $$\lim_{(x,y)\xrightarrow[x=-1]{}(-1,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y}{1+y^2-2+1}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{1+y^2-1}=\lim 0=0$$

۲) $$\lim_{(x,y)\xrightarrow[y=0]{}(-1,0)} f(x,y)=\lim_{x\to(-1)}\frac{0}{x^2+2x+1}=0=f(-1,0)$$

۳) $$y=m(x+1) \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(-1,0)\\ y=x+1}} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(-1,0)$$

نکته: اگر توابع خاص مانند $\log,\sinh,\cos,\sin$ و ... در فرمول تابع باشند از مسیرهای (۳) و (۴)

استفاده نمی کنیم زیرا در این گونه توابع یا مسیر خاص خودشان وجود دارد یا باید از قضایا استفاده کنیم.

مثال: در وجود یا عدم وجود حد زیر بحث کنید.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x.\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

می دانیم $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. اگر $x^2+y^2=t$ آنگاه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} t = 0$. در نتیجه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{Ln(\sin xy+1)}{\sin xy} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

اگر $\sin xy = t$ آنگاه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} t = 0$. لذا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\sin xy+1)}{\sin xy} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

تمرین ۷۷) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ آیا f در تمام نقاط دامنه پیوسته است؟ چرا؟

$$D_f = R^2$$

حل: f در تمام نقاط به جز $(0,0)$ پیوسته است طبق قضایای حد (صورت و مخرج چند جمله ای می باشند که همواره پیوسته و تقسیم دو تابع در نقاطی که مخرج مخالف صفر است پیوسته است)

پس کافی است پیوستگی تابع f را در $(0,0)$ بررسی کنیم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \frac{0}{0} \qquad \text{مبهم}$$

واضح است روی مسیر $x=0$ و $y=0$ حد تابع برابر صفر است و f پیوسته است

$$y = mx \qquad \lim f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{m^6 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{m^4 + m^2} = f(0,0) = 0$$

$$y = mx^a \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 mx^a}{m^6 + m^2 + m^{2a}} \qquad (*)$$

$$if \qquad \alpha = 3\ ,\ m = 1 \ \Rightarrow\ (*) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

نکته: می توان گفت در بیشتر مسائلی که فرمول توابع به صورت تقسیم دو چند جمله ای بر یکدیگر می باشد و در همه ی جملات متغیرهای x, y ظاهر شده است بهتر است برای بررسی حد و پیوستگی مستقیماً به سراغ مسیرهای $y = mx$ و $y = mx^a$ برویم معمولاً روی این مسیرها به تناقض می رسیم.

یا اگر در مسأله ای دیدیم که مقدار حد برای تمام m, α ها یکسان می باشد در بسیاری از مواقع حد وجود دارد یا تابع پیوسته است. اما مطلب در حالت کلی درست نمی باشد.

مثال: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{0}{0} \qquad , \ (x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

این مثال نشان می دهد که حدهای مکرر وجود دارند ولی تابع حد ندارد.

حال این سؤال مطرح است که اگر حد اصلی موجود باشند آیا لزوماً برابر حدهای مکرر هستند؟

تمرین ۸۳) برای تابع $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ نشان دهیدحدودمکرر $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ و $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ وجود ندارند اما $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود دارد:

حل: چون $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$ و تابع $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ کران دار می باشد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$$

$$(1)\qquad \lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = \alpha \ \Rightarrow\ (2)\qquad \sin\frac{1}{y} = \frac{(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}{(x+y)\sin\frac{1}{x}}$$

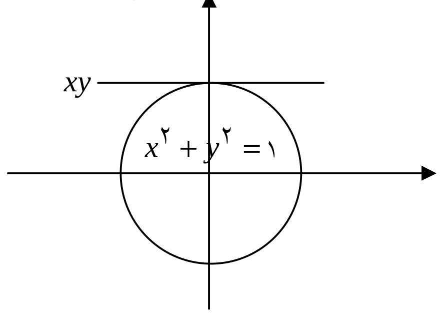
فرض خلف: اگر حد (۱) برابر α باشد آن گاه با توجه به رابطه ی (۲) لازم است حد $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$

موجود باشد و این تناقض است.

مثال) آیا تابع f در $(0,1)$ پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \le 1 \\ xy & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

f در $(0,1)$ پیوسته نمی باشد چون اگر از درون و روی دایره به $(0,1)$ نزدیک شویم



$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim x^2+y^2 = 1$$

اگر از خارج دایره واحد به $(0,1)$ نزدیک شویم

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim xy = 0$$

ب) نقاطی را روی دایره ی واحد بیابید (در صورت وجود) به طوری که f در آنها پیوسته باشد.

پاسخ: چون تمام مسیرهایی که از نقاط روی دایره می گذرند می توانند به دو دسته زیر تقسیم شوند: تمام منحنی درون یا روی دایره است یا تمام منحنی خارج دایره است پس برای پیوستگی کافی است دو ضابطه ی تابع را برابر هم قرار دهیم و سپس معادله را حل می کنیم.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^۲+y^۲=xy & (۱) \\ x^۲+y^۲=۱ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} xy=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{x} \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=۱ \Rightarrow x^۴+۱=x^۲$$

$$x^۴-x^۲+۱=۰ \Rightarrow (x^۲+\frac{۱}{۲})^۲=-\frac{۳}{۴}$$

معادله ی فوق جواب ندارد. پس f روی دایره $x^۲+y^۲=۱$ پیوسته نمی باشد.

تعریف: یک دنباله در $R^۲$ به صورت (x_n,y_n) می باشد. گوییم $(x_n,y_n)\to(a,b)$ اگر و تنها اگر $x_n\to a$ و $y_n\to b$.

تعریف: حدهای دنباله ای:

$$\lim f(x,y)=l \iff \forall\{(x_n,y_n)\}_{n\in N}\subseteq R^۲,$$
$$(x_n,y_n)\to(a,b) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=l$$

مثال) نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \sin\frac{۱}{x}\sin\frac{۱}{y}$ وجود ندارد.

حل: دنباله های زیر را در نظر می گیریم:

$$x_n=y_n=\frac{۱}{n\pi} \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi)^۲=۰ \qquad (۱$$

$$x'_n=y'_n=\frac{۲}{(۱n+۱)\pi} \quad : \quad \lim f(x'_n,y'_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{(۲n+۱)\pi}{۲})^۲=۱ \qquad (۲$$

از جمله قضایای مهم برای توابع حقیقی پیوسته، قضیه ی مقدار میانی و اکسترمم است. نظیر یک فاصله ی بسته در R^n یک گوی بسته داریم و دو قضیه ی زیر برقرار می باشد.

قضیه ۱ : فرض کنید B یک گوی بسته به مرکز a و شعاع r در R^n باشد یعنی

$$B=\{x:\|x-a\|\le r\}=\{x:\|x-a\|\le r\}.$$

اگر تابع f روی B پیوسته باشد و a_1, a_2 نقاطی در این گوی باشند به طوری که $f(a_1) < \lambda < f(a_2)$ ، آن گاه نقطه ی x_0 در این گوی وجود دارد به طوری که

$$f(x_0) = \lambda \qquad\qquad f(B) = [c, d] \subseteq R$$

قضیه ۲ : هر تابع پیوسته روی یک مجموعه ی بسته و کران دار در R^n ماکزیمم و می نیمم مطلق خود را اختیار می کند.

تمرین ۷۴) (الف) نشان دهید که نقطه ی $(0,0)$ یک نقطه ی انباشتگی منحنی $y = e^{\frac{-1}{x^2}}$ (نقطه ای که منحنی در حد از آن می گذرد $b = \lim\limits_{x \to a} y(x)$.

(ب) نشان دهید تابع f تعریف شده به صورت زیر در $(0,0)$ پیوسته نمی باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(e)^{\frac{-1}{x^2}}}{y^2 + e^{\frac{-2}{x^2}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱) $$x = 0 \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

۲) $$y = 0 \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

این مسیر از نقطه ی $(0,0)$ عبور نمی کند ولی در حد از آن عبور می کند یعنی این که

۳) مسیر $$y = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

این مسیر از نقطه $(0,0)$ عبور نمی کند ولی در حد از آن عبور می کند یعنی این که

$$\lim_{x\to 0} y = \lim e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-2}{x^2}}}{2e^{\frac{-2}{x^2}}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

مشتق توابع چند متغیره :

می دانیم اگر $f: D\subseteq R \to R$ و حد زیر موجود و متناهی باشد آن گاه مقدار حد را مشتق f در a نامیده و به $f(a)$ نشان می دهیم.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

همان طور که می دانیم نتوانستیم در R^n عمل تقسیم را تعریف کنیم لذا نمی توانیم تعریف مشتق را که برای توابع یک متغیره به صورت بالا می باشد برای توابع چند متغیره به کار ببریم زیرا در این حالت $x-a$ یک بردار می باشد لذا ابتدا حالت هایی را در نظر می گیریم که مستلزم استفاده از تقسیم بر بردار نباشد.

الف) مشتق سویی (جهتی) : در این قسمت فرض می کنیم x در راستای بردار یکانی V به a نزدیک می شود. در این حالت می توان گفت:

$$x-a = tV \qquad , \quad t\in R$$

در نتیجه می توانیم تعریفی برای مشتق به صورت زیر ارائه کنیم.

الف: تعریف: فرض کنید $f: D\subseteq R^n \to R$ تعریف شده باشد و a یک نقطه از D_f باشد همچنین فرض کنید V بردار یکانی باشد که خط گذرا بر a به موازی V با هر همسایگی a در دامنه ی f باشد در این صورت اگر حد زیر موجود و متناهی باشد، مقدار حد را مشتق f در a در جهت V نامیده و به صورت $D_V f(a)$ نمایش می دهیم:

$$D_V f(a) = \lim_{t\to ۰} \frac{f(a+tV) - f(a)}{t}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z) = x^{۲} + xy + z^{۲}x$

مطلوبست محاسبه ی مشتق سویی f در نقطه ی $(۰,۱,۰)$ در سوی بردار $(۱,۱,۱)$

$$V = \frac{(۱,۱,۱)}{\sqrt{۳}} = (\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

$$\lim_{t\to ۰} \frac{f\left[(۰,۱,۰) + t(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۳})\right] - f(۰,۰,۰)}{t}$$

$$D_V f = \lim_{t\to ۰} \frac{f(۰+\frac{\sqrt{۳}}{۳}t\ ,\ ۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}t\ ,\ ۰+\frac{\sqrt{۳}}{۳}t) - f(۰,۱,۰)}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{۱}{۳}t^{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}t + \frac{۱}{۳}t^{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۹}t^{۳}}{t} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مشتق سویی نرخ تغییرات تابع f را در جهت بردار V در نقطه ی a محاسبه می کند. مثال فوق بـرای محاسبه مثال ساده ای است که وجود حد را به راحتی می توان بررسی کرد.

حال این سؤال مطرح است که در حالت کلی روش ساده ای وجـود دارد کـه بـدون محاسـبه ی حـد، مشتق سویی یک تابع را در سوی بردار V در نقطه ی a محاسبه کرد (منظور فرمول های مشتق گیـری است)

ب: مشتقات جزیی: فرض کنید $f: D\subseteq R^{n} \to R$ و $a = (x_۰, y_۰)$ نقطه ای در دامنه ی f باشد اگـر در تعریـف مـشتق سـویی فـرض کـنیم بـردار یکـانی V برابـر i باشـد یعنـی $V = (۱,۰)$ در ایـن صـورت $D_V f(a)$ را مـشتق جزیـی f در a نـسبت بـه x نامیـده و بـا نمادهـای $f_x(a)$ ، $f_۱(a)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ و $D_۱ f(a)$ نمایش می دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to ۰} \frac{f(a+tV) - f(a)}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{f(x_۰ + t, y_۰) - f(x_۰, y_۰)}{t}$$

اگر $j = V = (۰,۱)$ آن گاه $D_V f(a) = D_۲ f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = f_y(a) = f_۲(a)$

$$D_2 f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \qquad \forall\, t \in R$$

در حالت کلی اگر $f : D \subseteq R^n \to R$ ، $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$V = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \qquad \text{مؤلفه ی } i \text{ ام } = 1$$

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = f_{x_i}(a)$$

$$D_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

مثـــــال: فــرض کنیــد $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z^2$ مطلوبـــست $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $D_3 f$ ، f_y درنقطـــه ی (x_0, y_0, z_0).

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,,\, y_0\,,\, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t)^2 z_0 + y_0^2 z_0^2 - x_0^2 z_0 - y_0^2 z_0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{x_0^2 z_0 + t^2 z_0 + 2t\, x_0 z_0 - x_0^2 z_0}{t} = 2\, x_0 z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + t) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0^2 (z_0 + t) + y_0^2 (z_0 + t)^2 - x_0^2 z_0 - y_0^2 z_0^2}{t}$$

$$= x_0^2 + 2 z_0\, y_0^2 = D_3 f(x_0, y_0, z_0)$$

به طریق مشابه $\quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 2 z_0^2 y_0$

بنابراین قضیه زیر را برای محاسبه مشتقات جزئی داریم.

قضیه: برای محاسبه ی مشتق جزیی نسبت به یک متغیر کافی است سایر متغیرها را همانند عدد ثابت در نظر گرفته و از تمام قوانین مشتق توابع یک متغیره برای محاسبه ی مشتق جزئی نسبت به متغیر مورد نظر استفاده کرد.

مثـــــال: فــرض کنیــد $f(x, y, z) = e^{x^2 + zy + w} + \sin(x\,y\,z\,w)$ مطلوبـــست محاســـبه ی $\frac{\partial f}{\partial z}, f_y, D_4 f$.

$$D_4 f = 1\times e^{x^2+zy+w} + x\,y\,z\cos(x\,y\,z\,w)$$

$$f_y = z\,e^{x^2+zy+w} + x\,z\,w\cos(x\,y\,z\,w)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y.e^{x^2+zy+w} + x\,y\,w\cos(x\,y\,z\,w)$$

مثـال: فـرض کنیـد $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مطلوبـست محاسـبه ی $D_1 f(0,0)$ و $D_2 f(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{(t)(0)}{t^2+0^2}-0}{t}=0=D_1 f(0,0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0.t}{0^2+t^2}-0}{t}=0=D_2 f(0,0)$$

سؤال: آیا از وجود مشتقات جزیی در یک نقطه مـی تـوان پیوسـتگی در آن نقطـه را نتیجـه گرفـت؟

خیر، مثال بالا

تمرین: نشان دهید قضیه ی مقدار میانگین برای مشتقات جزیی برقرار است:

$$f(a,y)-f(b,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(c,y_0)(b-a)$$

$$f(x_0,a)-f(x_0,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,c_1)(b-a)$$

که c_1 و c بین a و b می باشند.

تمرین: اگر مشتقات جزیـی f در یـک همـسایگی a موجـود و کـران دار باشـند آن گـاه f در a پیوسته است.

حل: فرض کنیم $f: D\subseteq R^n \to R$ تعریف شده باشد و $a=(x_\circ , y_\circ)\in D_f$ مشتقات جزیی f در یک همسایگی a کران دار است.

$$\exists \quad M_1 \rangle \circ \quad , \quad M_2 \rangle \circ \quad , \quad \delta_\circ \rangle \circ$$
$$\forall (x,y): \| (x,y)-(x_\circ , y_\circ) \| \langle \, \delta_\circ \quad \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \langle \, M_1$$
$$\& \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \langle \, M_2$$

برای پیوستگی f در a لازم است ثابت کنیم:

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} f(\overbrace{x_\circ + h}^{x} \, , \, \overbrace{y_\circ + k}^{y}) = f(x_\circ , y_\circ)$$
$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \left[f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ) \right] = \circ$$
$$f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ) = f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ + k) + f(x_\circ , y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(C, y_\circ + k) h + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ , C_1) k$$

با توجه به روابط بالا و انتخاب $\delta = \delta_\circ$ داریم

$$\circ \le \left| f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ) \right| \le M_1 |h| + M_2 |k|$$

با حدگیری از طرفین و قضیه ی ساندویچ خواهیم داشت:

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \left| f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ) \right| \Rightarrow \lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} f(x_\circ + h, y_\circ + k) = f(x_\circ , y_\circ)$$

نکات :

۱- وجود مشتق های جزیی در یک نقطه پیوستگی در آن نقطه را نتیجه نمی دهد.

۲- وجود مشتق های جزیی و کران دار بودن آن ها در یک همسایگی نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می دهد.

۳- پیوستگی مشتقات جزیی f در یک همسایگی a پیوستگی f در a را نتیجه می دهد.

(زیرا پیوستگی مشتقات جزیی در یک همسایگی طبق قضیه ی اکسترمم، کرانداری آن را نتیجه می دهد و کران داری مشتقات جزیی پیوستگی f را نتیجه می دهد)

مشتقات جزیی مراتب بالاتر:

فرض کنید مشتقات جزیی تابع خود توابعی باشند که مشتقات جزیی آن ها موجود است. لذا مشتق جزیی از مشتق جزیی تابع f مشتق جزیی مرتبه ی دوم نامیده می شود به همین ترتیب مشتق جزیی مراتب بالاتر تعریف می شود. نمادهایی که برای مشتقات جزیی مراتب بالاتر به کار می رود به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad (f_x)_y = f_{xy}$$

$$D_{۲۱} f = D_{۱}(D_{۲} f) \qquad D_{۲۳۲۱}(f) = D_{۱}(D_{۲}(D_{۳}(D_{۲} f)))$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^{۲} y + e^{xy}$ مطلوبست محاسبه ی $D_{۱۲} f$ و $D_{۲۱} f$.

$$D_{۱۲} f = D_{۲}(D_{۱} f) = D_{۲}(۲xy + ye^{xy}) = ۲x + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$D_{۲۱} f = D_{۱}(D_{۲} f) = D_{۱}(x^{۲} + xe^{xy}) = ۲x + e^{xy} + xye^{xy}$$

همان طور که می بینید ترتیب مشتقات جزیی در این مثال اهمیتی ندارد اما در حالت کلی این طور نیست.

تمرین ۸۵) تابع زیر مفروض است:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^{۲} - y^{۲}}{x^{۲} + y^{۲}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه ی $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(۰,۰)$ و $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(۰,۰)$ ، چه نتیجه ای می گیرید:

$$\lim \frac{f(t\,,۰) - f(۰,۰)}{t} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t^5}{t^4}}{t}=-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

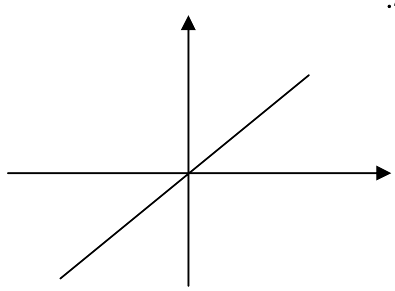
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^5}{t^4}}{t}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

با توجه به مثال فوق می بینیم که در حالت کلی نمی توان ترتیب مشتقات جزیی را نادیده بگیریم اما قضیه ی زیر در این مورد مفید است.

قضیه: اگر مشتقات جزیی مراتب بالاتر f در یک همسایگی a پیوسته باشند آن گاه ترتیب اهمیت ندارد. یعنی $f_{xy}(a)=f_{yx}(a)$.

مثال: تابعی مثال بزنید که پیوسته نباشد ولی مشتقات جزیی موجود باشند.



$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & x\neq y \text{ یا } x=y=0\\ 2 & x=y \text{ و } x\neq 0\end{cases}$$

$$z=x+y \quad\Rightarrow\quad x+y-z=0$$

ما یک خط از این صفحه برداشتیم.

در بخش های بعد مثالی را ارائه خواهیم داد که علیرغم وجود مشتقات سویی در هر سو باز تابع پیوسته نمی باشد.

مثال: مطلوبست تعیین مشتقات جزیی توابع زیر:

الف) $f(x,y)=x e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{xy}+xy e^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^{۲}e^{xy}$$

ب) $f(x,y,z)=\sin(z+(\cos y)x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos y\ \cos(z+x\cos y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=(-x\sin y)\cos(z+x\cos y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=(۱)\cos\ (z+x\cos y)$$

پ) (الف) $f(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(V)\,dV$ و (ب) $f(x,y)=\int_{x}^{xy} f(V)\,dV$

(الف) $f'(x)=h'(x)\,f\big(h(x)\big)-g'(x)\,f\big(g(x)\big)$

(ب)
$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\sin(xy)^{۲}-(۱)\sin x^{۲}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x)\sin(xy)^{۲}\end{array}\right.$$

مشتق پذیری تابع (مشتق کل) :

فرض کنید $f:D\subseteq R\ \to R$ در a مشتق پذیر باشد. آن گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\quad\Leftrightarrow\quad \lim\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right]=۰$$

می خواهیم از این تعریف یک تعریف دیگر به دست آوریم که تقسیم نداشته باشد.

اگر $x-a=\Delta x$ آن گاه $x=a+\Delta x$ و

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}-f'(a)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x}{\Delta x}=h(\Delta x)$$

که $\lim_{\Delta x\to 0} h(\Delta x)=0$.

لذا

$$f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x-h(\Delta x)\Delta x=0$$
$$\Leftrightarrow\ f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+h(\Delta x)(\Delta x)$$

تعریف: اگر $f:\ D\subseteq R\to R$ تعریف شده باشد آن گاه گوییم f در $a\in D_f$ مشتق پذیر است

اگر عدد A و تابع $h(\Delta x)$ وجود داشته باشد به طوری که

(۱)
$$f(a+\Delta x)-f(a)=A.\Delta x-h(\Delta x)(\Delta x)$$

و

$$\lim_{\Delta x\to 0} h(\Delta x)=0$$

تابع f در a مشتق پذیر است اگر بتوانیم عدد A و h را طوری بیابیم که رابطه ی (۱) برقرار باشد.

عدد A را مشتق f در a نامیده و با $f'(a)$ نشان می دهیم. این تعریف برای توابع چند متغیره قابل تعریف است.

تعریف: اگر $f:\ D\subseteq R^2\to R$ تعریف شده باشد و نقطه ی (x_0,y_0) در دامنه f باشد گوییم

f در a مشتق پذیر است اگر اعداد A و B و توابع $E_1(\Delta x,\Delta y)$ و $E_2(\Delta x,\Delta y)$ موجود باشند به طوری که

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\,.\,\Delta x+B\,.\,\Delta y+E_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+E_2(\Delta x,\Delta y).\Delta y$$

و

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E_1(\Delta x,\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E_2(\Delta x,\Delta y)=0$$

مثـــال: نـــشان دهیـــد تـــابع $f(x,y)=x^{۲}y+y^{۲}$ در نقطـــه ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ مـــشتق پـــذیر اســـت.

$$f\left[(x_{\circ}+\Delta x),(y_{\circ}+\Delta y)\right]-f(x_{\circ},y_{\circ})=(x_{\circ}+\Delta x)^{۲}(y_{\circ}+\Delta y)+(y_{\circ}+\Delta y)^{۲}-x_{\circ}^{۲}y_{\circ}-y_{\circ}^{۲}$$
$$=(x_{\circ}^{۲}+\Delta x^{۲}+۲x_{\circ}\Delta x)(y_{\circ}+\Delta y)+y_{\circ}^{۲}+\Delta y^{۲}+۲y_{\circ}\Delta y-x_{\circ}^{۲}y_{\circ}-y_{\circ}^{۲}$$
$$=x_{\circ}^{۲}y_{\circ}+\Delta x^{۲}y_{\circ}+۲x_{\circ}\Delta xy_{\circ}+x_{\circ}^{۲}\Delta y+\Delta x^{۲}\Delta y+۲x_{\circ}\Delta x\Delta y+y_{\circ}^{۲}+\Delta y^{۲}+۲y_{\circ}\Delta y-x_{\circ}^{۲}y_{\circ}-y_{\circ}^{۲}$$

دقت کنیم عباراتی را که Δx و Δy ندارند باید حذف گردند.

$$=۲x_{\circ}y_{\circ}\Delta x+(x_{\circ}^{۲}+۲y_{\circ})\Delta y+(\Delta x\,.\,y_{\circ})(\Delta x)+(\Delta x^{۲}+۲x\,.\,\Delta x+\Delta y)\Delta y$$

به وضوح داریم

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\circ,\circ)} E_i(\Delta x,\Delta y)=\circ \qquad i=۱\,,\,۲$$

همان طور که در مثال بالا می بینیم اگر تابع f در نقطه ی a مشتق پذیر باشد حتماً مـشتقات جزیـی f در a وجود دارد و

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad\qquad B=\frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

قضیه: اگر $f: \quad D\subseteq R^{۲}\to R$ تعریف شده باشد f در (a,b) مشتق پذیر است اگر

الف) f در (a,b) پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f در (a,b) وجود دارد.

(در حقیقت $A=D_{۱}f(a,b)$ و $B=D_{۲}f(a,b)$)

پ) تابع f در (a,b) در هر سو مانند $V=(V_{۱},V_{۲})$ مشتق پذیر است و

$$D_V f(a,b)=AV_{۱}+BV_{۲}=D_{۱}f(a,b)V_{۱}+D_{۲}f(a,b)V_{۲} \qquad (*)$$

برهان: الف) کافی است ثابت کنیم:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left[f\left[(a+\Delta x),(b+\Delta y)\right]-f(a,b)\right]=0$$

چون f مشتق پذیر است در (a,b) توابع E_1 و E_2 و اعداد A و B وجود دارند که در مشتق صدق کنند لذا داریم:

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=A.\,\Delta x+B.\,\Delta y+E_1\,\Delta x+E_2\Delta y$$

با حد گیری از طرفین داریم:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left[f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)\right]=0$$

ب)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left((a+\Delta x),b\right)-f(a,b)}{\Delta x}=A$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(a\ ,b+\Delta y\right)-f(a,b)}{\Delta y}=B$$

وقتی حد وجود دارد می توانیم مسیرهای خاص را برویم ولی اگر حد در مسیرها وجود داشته باشد نمی توان حد کلی را نتیجه گرفت.

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=A.\,\Delta x+B.\,\Delta y+E_1\,\Delta x+E_2\Delta y$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A.\,\Delta x+E_1\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+E_1=A$$

اگر f مشتق پذیر باشد $\leftarrow$ مشتق های سویی وجود دارند، با روش مشابه داریم:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}=B$$

پ)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+\overbrace{tV_1}^{\Delta x}\ ,\ b+\overbrace{tV_2}^{\Delta y})-f(a,b)}{t}\qquad V=(V_1,V_2)$$

چون f مشتق پذیر است پس رابطه ی زیر درست و برقرار است.

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=a.\Delta x+b.\Delta y+E_۱(\Delta x,\Delta y).\Delta x+E_۲(\Delta x,\Delta y).\Delta y$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to ۰}\frac{\left[A.tV_۱+B(tV_۲)+E_۱(tV_۱,tV_۲).tV_۱+E_۲(tV_۱,tV_۲).tV_۲\right]}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\left[AV_۱+BV_۲+E_۱(tV_۱,tV_۲)\,V_۱+E_۲(\overbrace{tV_۱}^{\Delta x},\overbrace{tV_۲}^{\Delta y})\,V_۲\right]=۰+AV_۱+BV_۲$$

نکته: در تست ها اگر صحبت از مشتق سویی بود یک گزینه مربوط به همین فرمول است و شرط این که رابطه * درست باشد این است که تابع مشتق پذیر باشد. در مثال زیر رابطه برقرار نیست چون f مشتق پذیر نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

نتیجه: اگر f در (a,b) مشتق پذیر باشد آن گاه اعداد (a,b) در تعریف مشتق منحصر به فردند.

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=e^{x^۲+y+z}$ ، مشتق سویی f در نقطه ی $(۰,۰)$ در سوی $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ برابر است با

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ب) ۰ پ) ۱ ت) وجود ندارد

چون تابع نمایی است پس حتماً مشتق پذیر است.

$$D_۱(f)=۲xe^{x^۲+y+z} \qquad D_۲(f)=D_۳(f)=e^{x^۲+y+z}$$

$$D_V\left(f(۰,۰,۰)\right)=۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱\,(۰)+۱\,(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گزینه ی (الف) درست است.

* آیا تحت شرایطی می توان گفت وجود مشتقات جزیی وجود مشتق در تابع f را نتیجه می دهد این نکته را در قضیه زیر نشان می دهیم.

قضیه: اگر $f:\quad D\subseteq R^{2}\to R$ تعریف شده باشد و مشتقات جزیی f در یک همسایگی (a,b) موجود باشند و در (a,b) پیوسته باشند آن گاه تحت این شرایط f در (a,b) مشتق پذیر است.

* نکته : قضیه مقدار میانگین برای مشتقات جزیی برقرار است.

اثبات:

$$
\begin{aligned}
& f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b) \\
&= f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a+\Delta x+f(a+\Delta x,b)-f(a,b) \\
& D_2 f(a+\Delta x,c_2).\Delta y+D_1 f(c_1,b)\Delta x
\end{aligned}
$$

که داریم $c_1\in(a,a+\Delta x)$ و $c_2\in(b,b+\Delta y)$

از طرفین حد بگیریم و فرض کنیم $E_1\ ,\ E_2=0$ هستند قضیه اثبات می شود از این قضیه حتماً در کارشناسی ارشد تست می آید.

نکات :

۱- وجود مشتق جزیی و سویی مشتق پذیری را نتیجه نمی دهد.

۲- اگر مشتقات جزیی پیوسته باشند خود f پیوسته باشند.

مثال: کدامیک از گزاره های زیر درست است:

الف) اگر مشتقات جزیی f در نقطه ی A موجود باشند آن گاه f پیوسته است.

ب) اگر مشتقات جزیی f در نقطه ی A موجود باشند آن گاه f در هر سو مشتق پذیر است.

ت) اگر مشتقات جزیی f در نقطه ی A پیوسته باشند آن گاه f در هر سو مشتق پذیر است.

ث) هیچ کدام

جواب صحیح گزینه (ت) می باشد.

نکته: حتی اگر مشتقات سویی تابع f در نقطه ی a در هر سو موجود و برابر باشند آن گاه نمی توان گفت f در a پیوسته است.

مثال: تابع f به صورت زیر مفروض است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{3}y}{x^{6}+y^{6}} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f در $(0,0)$ در هر سوی $u=(a,b)$ $(a^{2}+b^{2}=1)$ دارای مشتق سوئی صفر است زیرا:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^{4}a^{3}b}{t^{2}(t^{4}a^{6}+b^{2})}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ \frac{t.a^{3}b}{t^{4}a^{6}+b^{2}}=0$$

اما f در $(0,0)$ پیوسته نمی باشد زیرا روی مسیر $y=x^{3}$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[y=x^{3}]{}(0,0)} f(x,y)\ =\lim_{x\to 0}\frac{x^{6}}{x^{6}+x^{6}}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

الگوریتم بررسی مشتق پذیری تابع f در a :

۱- پیوستگی تابع را بررسی می کنیم اگر تابع پیوسته نباشد آن گاه مشتق پذیر نیست.

اگر f پیوسته باشد آن گاه به مرحله ی دوم می رویم.

۲- مشتقات جزیی f را بررسی می کنیم اگر یکی از مشتقات جزیی موجود نباشد تابع مشتق پذیر نیست. اگر همه ی مشتقات جزیی موجود باشند به مرحله ی ۳ می رویم.

۳- با توجه به وجود مشتقات جزیی اعداد A و B را در تعریف مشتق داریم سعی می کنیم با تعریف مشتق، مشتق پذیری را اثبات کنیم اگر مشتق پذیری ثابت شد بحث تمام است اگر نتوانستیم توابع E_{1} و E_{2} را با شرایط ذکر شده در تعریف به دست آوریم، به مرحله ی ۴ می رویم.

۴- در این مرحله سعی می کنیم وجود مشتق سویی f را در سوی بردار دلخواه یکانی $V=(v_{1},v_{2})$ بررسی کنیم. اگر در یک سو، مشتق سوئی f در a وجود نداشت یا

$D_V\ f(a) \neq D_1 f(a)V_1 + D_2 f(a)V_2$ آن گاه f در a مشتق پذیر نیست. در غیر این صورت به مرحله بعد می رویم.

۵- پیوستگی مشتقات جزیی را بررسی می کنیم.

اگر مشتقات جزیی f در a پیوسته باشند آن گاه f در a مشتق پذیر است.

اگر مشتقات جزیی پیوسته نباشند آن گاه با روشهای ابتکاری دیگری مشتق پذیری را بررسی می کنیم.

مثال: مسأله ی ۹۸) تابع f مفروض است.

$$f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| \geq |y| \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در همه جا پیوسته است.

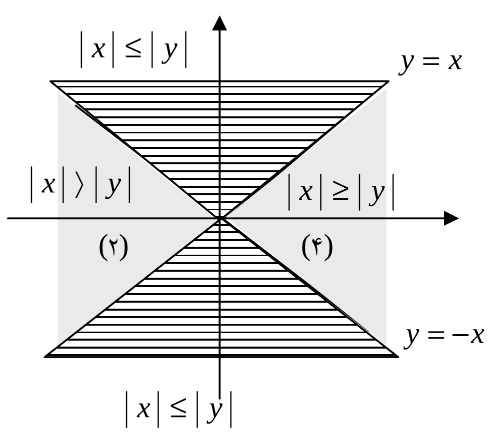
ب) نشان دهید مشتقات جزیی f در مبدأ وجود دارند.

پ) آیا f در مبدأ مشتق پذیر است.

سؤال به نوع دیگر: نشان دهید f در تمام نقاط خارج از خطوط $y = x$ و $y = -x$ پیوسته است و روی $y = x$ و $y = -x$ فقط در مبدأ پیوسته است.

پاسخ) $|x| = |y| \;\Rightarrow\; x = \pm y$

f در تمام نقاط واقع در ناحیه های (۱) و (۲) ، (۳) و (۴) با توجه به قضایا پیوسته است، کافی است پیوستگی تابع را روی خطوط $y = x$ و $y = -x$ بررسی کنیم.



فرض کنیم (x_0, y_0) نقطه ی دلخواه روی خط $y = x$ یا $y = -x$ باشد آن گاه

مسیرهایی که از نقطه ی (x_0, y_0) می گذرند یا در ناحیه ی ۱ و ۴ واقع اند یا در ناحیه ی ۲ و ۳.

نکته ی تستی: دو تابع در دو ضابطه را برابر هم قرار می دهیم.

الف) روی مسیر در ناحیه ی ۱ و ۴ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0 = f(x_0, y_0)$$

ب) روی مسیر (۲) و (۳) داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim - x = -x_0 = -f(x_0, y_0)$$

برای پیوستگی لازم است دو حد برابر و برابر مقدار تابع باشند یعنی

$$-x = x_0$$

لذا $x_0 = 0$ و در نتیجه $y_0 = 0$ است.

پس روی خط $y = x$ و $y = -x$ ، f فقط در $(0,0)$ پیوسته است.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1 \qquad D_1 f(0,0) = -1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \qquad D_2 f(0,0) = 0$$

زیرا محور yها ناحیه ی ۱ و ۴ است و محور xها ناحیه ی ۲ و ۳ می باشد.

اگر $V = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ آن گاه

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t\frac{\sqrt{2}}{2}, t\frac{\sqrt{2}}{2}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt{2}}{2t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه:

$$D_V f(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq D_1 f(0,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + D_2 f(0,0)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس f در

مسأله ی ۹۹) نشان دهید تابع f که با ضابطه ی زیر مفروض است در مبدأ مشتق پذیر است ولی مشتقات جزیی آن در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}\sin\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$-۱\leq\sin\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\leq ۱ \qquad \Rightarrow \qquad \text{کران دار}$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} x^{۲}+y^{۲}=۰ \qquad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=۰$$

پس پیوسته نیست.

حل: لازم است از تعریف مشتق پذیری استفاده کنیم اما چون در تعریف همواره $A=D_{۱}f(۰,۰)$ و $B=D_{۲}f(۰,۰)$ است پس ابتدا مشتقات جزیی را می نویسیم:

$$D_{۱}f(۰,۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x,۰)-f(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}\sin\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}}}}{x}=۰$$

جاهایی که در مبدأ است دیگر لزومی به گذاشتن t نیست.

$$\begin{aligned} &B=D_{۲}f(۰,۰)=۰ \\ &\Delta x=x \qquad\qquad \text{چون} \quad (x_{۰},y_{۰})=(۰,۰) \\ &\Delta y=y \end{aligned}$$

$$f(\overset{\Delta x}{x},\overset{\Delta y}{y})-f(۰,۰)=(x^{۲}+y^{۲})\sin\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=(\overset{A}{۰}\times x)+(\overset{B}{۰}\times y)$$

$$+\underbrace{x\left(\sin\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right)}_{E_{۱}}.x+\underbrace{y\left(\sin\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right)}_{E_{۲}}.y$$