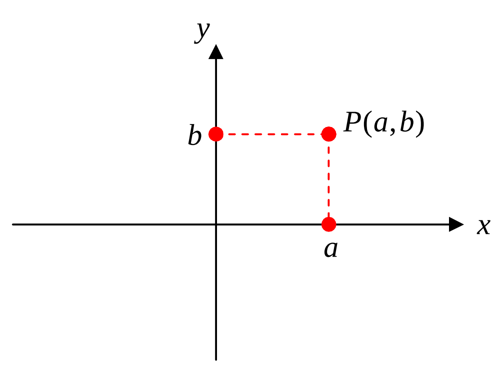
فصل اول
بردارها و هندسه ی فضای R^n

در این فصل اعمال اساسی نظیر جمع، ضرب اسکالر، ضرب داخلی و ضـرب خـارجی را بـرای بردارهـا در فضای دو بعدی (R^2) و سه بعدی (R^3) را معرفی می کنیم. خواهیم دید که بوسیله اعمـال مربـوط به بردارها می توان یک توصیف سـاده از خـط و صـفحه در فـضای سـه بعـدی ارائـه داد. سـپس سـعی خواهیم کرد فضای R^n را معرفی نموده و برخـی از مفـاهیم فـضای سـه بعـدی را بـه فـضای n بعـدی یعنی R^n تعمیم دهیم. در حقیقت در این فصل زیر ساختهای مورد نیاز برای مطالعه توابع برداری، توابع چند متغیره و میدان برداری در فصلهای آینده، فراهم می شود.

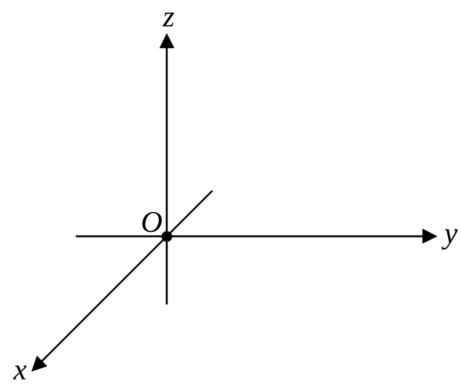
۱-۱ : بردارها در فضای سه بعدی

برای بیان موقعیت یک نقطه در صفحه، دو عدد حقیقی مورد نیاز می باشد. می دانیم که هر نقطـه ماننـد P در صفحه را می توان توسط زوج مرتب (a,b) از اعداد حقیقی به نام مختـصات دکـارتی نقطـه P نمایش داد. برای این منظور دو خط عمود بر هم رسم نموده و آنها را محـور x هـا و y هـا مـی نـامیم و مطابق شکل زیر نقطه P به مختصات (a,b) را نمایش می دهیم.

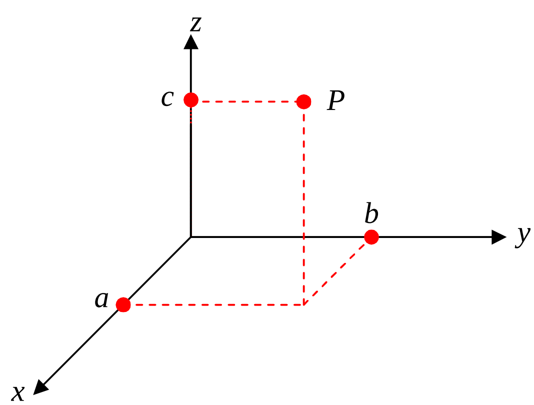


به همین نحو، نقاط در فضا را می توان با سه تائیهای مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد. اگر P نقطه ای در فضا باشد آنگاه گوئیم P دارای مختصات (a,b,c) است. به این دلیل فضا را سه بعدی نامیده و بـه

R^{3} نشان می دهیم. برای نمایش یک نقطه در فضا، یک نقطه ثابت و سه خط جهت دار دو به دو عمود بر هم که از نقطه ثابت می گذرند انتخاب می کنیم. نقطه ثابت را مبدأ نامیده و با O نشان می دهیم. خطوط جهت دار را به ترتیب محور xها، محور yها و محور zها می نامیم.



نقطه P به مختصات (a,b,c) در R^{3} را به صورت زیر نمایش می دهیم.



نمایش قبلی را نمایش نقطه P در دستگاه مختصات سه بعدی می نامیم. واضح است که در این دستگاه نقطه O دارای مختصات $(۰,۰,۰)$ است.

اگر سه تایی (a,b,c) نظیر نقطه P در R^{3} باشد، گوئیم a مختص x (یا مؤلفه ی اول) ، b مختص y (یا مؤلفه دوم)، و c مختص z (یا مؤلفه سوم) P است.

آنچه تاکنون ساخته ایم مدلی از فضای سه بعدی می باشد. در قسمتهای بعدی خواص این مدل را بررسی کرده، سپس تغییر هندسی آن را در نظر می گیریم. نمادهای زیر را برای خط حقیقی، صفحه و فضای سه بعدی به کار خواهیم برد.

۱- خط حقیقی با R' نشان داده می شود. در حقیقت R' همان R است.

۲- مجموعه تمام جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی با $R^{۲}$ نشان داده می شود.

۳- مجموعه ی تمام سه تایی های مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی با $R^{۳}$ نشان داده می شود.

عمل جمع را می توان از R به $R^{۲}$ و $R^{۳}$ به صورت زیر تعمیم داد. فرض کنیم $X = (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ و $Y = (y_{۱}, y_{۲}, y_{۳})$ دو عضو از $R^{۳}$ باشند. مجموع X و Y را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$X + Y = (x_{۱} + y_{۱}\,, x_{۲} + y_{۲}\,, x_{۳} + y_{۳})$$

عضو $(۰,۰,۰)$ در $R^{۳}$ عنصر صفر $R^{۳}$ یا عضو خنثی عمل جمع نام دارد. عنصر $(-x_{۱},-x_{۲},-x_{۳})$ معکوس جمعی $X = (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ نامیده می شود. و به $-X$ نشان می دهیم. عمل تفریق یا تفاضل X و Y در $R^{۳}$ را به صورت $X - Y = X + (-Y)$ تعریف می کنیم.

دو عمل بسیار مهم دیگر در $R^{۳}$ وجود دارند. یکی از اینها به نام ضرب داخلی، به هر دو عضو از $R^{۳}$ عددی حقیقی نسبت می دهد. ما ضرب داخلی را در بخشهای بعدی مطرح خواهیم کرد. عمل مهم دیگر برای $R^{۳}$ ضرب اسکالر نام دارد (ضرب یک عدد حقیقی در بردار). به ازای اسکالر $\alpha \in R$ و عضو $X = (x, y, z) \in R^{۳}$ ، ضرب اسکالر α در X را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\alpha . X = \alpha\,(x, y, z) = (\alpha\, x, \alpha\, y\,, \alpha\, z) \quad .$$

خواص جمع و ضرب اسکالر

اگر X و Y و Z بردارهایی در $R^{۳}$ و α و β اعداد حقیقی باشند آنگاه

۱- تعویض پذیر یا جابه جایی: $X+Y=Y+X$

۲- شرکت پذیری: $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$

۳- عضو بی اثر: $X+0=X$

۴- عضو قرینه: $X+(-X)=0$

۵- توزیع پذیری ضرب اسکالر نسبت به جمع بردارها: $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$.

۶- توزیع پذیری ضرب اسکالر در X بردار نسبت به جمع اسکالرها:

$$(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X\ .$$

۷- شرکت پذیری: $(\alpha\beta)X=\alpha(\beta X)$.

۸- عضو بی اثر ضرب اسکالر در بردار: $1.X=X$.

ما اغلب R^2 را با سه تایی های $(x,y,0)$ یکـی کـرده و بـه زبـان هندسـی R^2 را صـفحه xy مـی نـامیم. بنابراین اعمال جمع و ضرب اسکالر همراه با خواص آن برای R^2 نیز برقرار است.

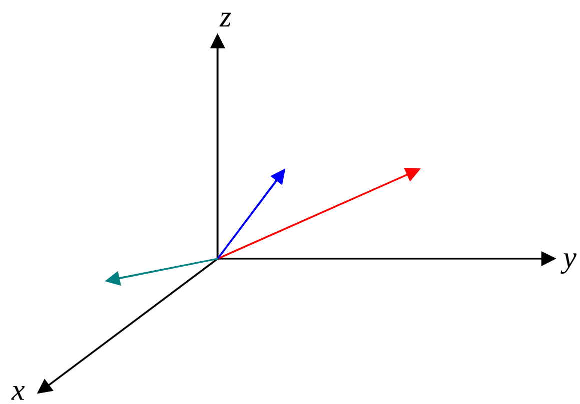
آنچه تاکنون دیدیم بیان خواص جبـری R^3 باشـد و اعـضای R^3 را بـه عنـوان نقـاطی در فـضا در نظـر گرفتیم. اکنون خواص هندسی R^3 را بررسی می کنیم.

یکی از مفیدترین ابزار در ریاضیات و کاربردهای آن مفهوم بردار است.

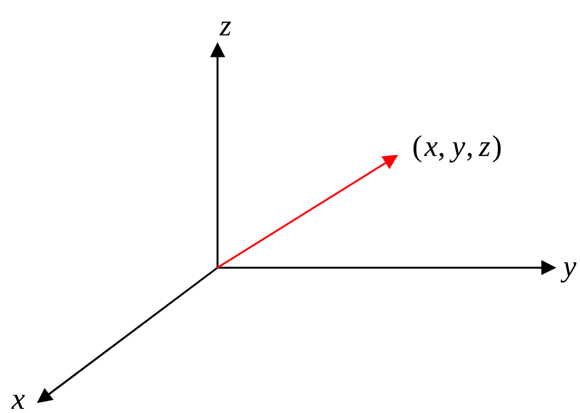
بردار را پاره خط جهت داری تعریف می کنیم که از مبدأ شروع می شود یعنی پـاره خطـی بـا انـدازه و جهت معین که نقطه شروع اش مبدأ است.

برای مثال، خلبان هواپیما هنگام فرود مـی گویـد: « مـا در حـال فـرود بـرداری روی بانـد هـستیم ». در حقیقت او به برداری اشاره دارد که جهت و فاصله ی هواپیما تا باند را به دسـت مـی دهـد. لازم نیـست که بگوئیم در اینجا جهت و فاصله هر دو مهم می باشند.

شکل زیر چند بردار را نشان می دهد.



بردارها را معمولاً با حروف V و U نشان می دهیم. با استفاده از تعریف بردار، می تـوان بـه هـر بـردار V نقطه (x,y,z) در فضا که نقطه انتهای بردار V است را نسبت داد. بـرعکس بـه هـر نقطـه (x,y,z) در فضا می توان بردار V را مربوط ساخت که (x,y,z) نقطه انتهای آن اسـت. لـذا V را بـا (x,y,z) یکی می دانیم و می نویسیم $V=(x,y,z)$. به این دلیل عناصـر $R^۳$ نـه تنهـا سـه تـایی هـای مرتبـی از اعداد حقیقی اند بلکه بردار نیز نامیده می شوند. سه تایی $(۰,۰,۰)$ را بردار صفر می نـامیم و بـا O نـشان می دهیم. این تنها برداری است که جهت ندارد.

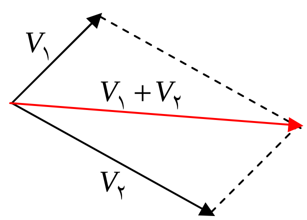


دو بردار $V_۱=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $V_۲=(x_۲,y_۲,z_۲)$ مساوی اند اگر و فقط اگر دارای یک انـدازه و یـک جهت باشند.

بنابراین می توان گفت $V_۱=V_۲$ اگر و تنها اگر $x_۱=x_۲$, $y_۱=y_۲$ و $z_۱=z_۲$.

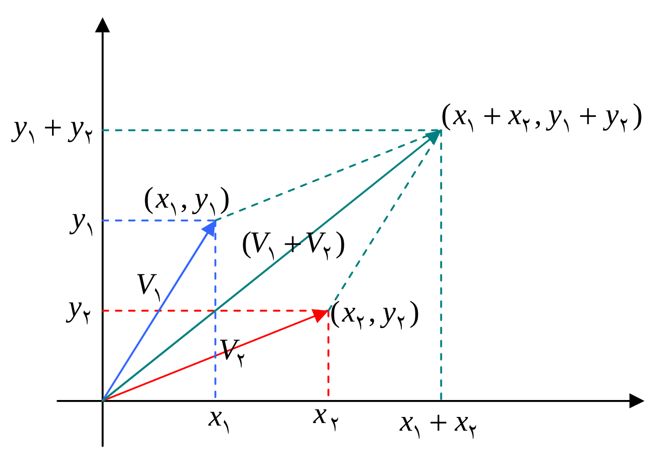
نمایش هندسی جمع دو بردار و ضرب یک اسکالر در بردار.

اگر V_1 و V_2 بردارهایی در R^3 باشند برای نمایش V_1+V_2 به صورت زیر عمل می کنیم. در صفحه ی V_1 و V_2 متوازی الاضلاعی می سازیم که یک ضلع آن V_1 و ضلع مجاور آن V_2 باشد. در این صورت V_1+V_2 برداری است که نقطه شروع آن نقطه شروع V_1 و V_2 می باشد و در جهت قطر متوازی الاضلاع است.

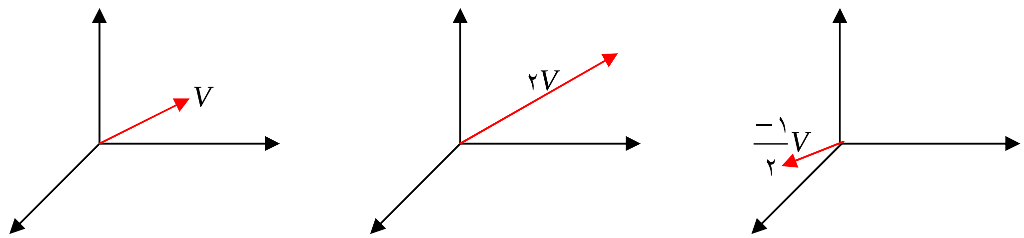


در شکل زیر سازگاری تعریف هندسی جمع با تعریف جبری آن در صفحه نشان داده شده است. یعنی نشان دادیم اگر $V_1=(x_1,y_1)$ و $V_2=(x_2,y_2)$

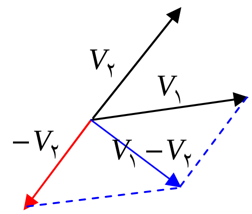
آنگاه $V_1+V_2=(x_1+x_2\,,\,y_1+y_2)$



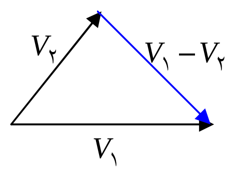
اگر α یک اسکالر و V برداری در R^3 باشد آنگاه αV برداری است که اندازه ی آن $|\alpha|$ برابر اندازه V و هم جهت با V است اگر $\alpha \rangle 0$ و دارای جهت مخالف V است اگر $\alpha \langle 0$ باشد.



اگر V_1 و V_2 بردارهایی در R^3 باشند برای نمایش V_1-V_2 از رابطه $V_1-V_2=V_1+(-V_2)$ و نمایش جمع دو بردار استفاده می کنیم.



چون $V_2+(V_1-V_2)=V_1$ بنابراین می توان نمایش زیر را بکار برد.



نتیجه: اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در R^3 باشند آنگاه برداری که نقطه شروع آن A و نقطه انتهای B می باشد به صورت

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\,,y_2-y_1\,,z_2-z_1)$$

است.

در حقیقت بردار $\overrightarrow{AB}$ تفاضل برداری با نقطه انتهایی B و برداری با نقطه انتهایی A است.

تغییر هندسی جمع برداری در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی مفید است. به عنوان یک مثال ساده، اگر یک هواپیما با سرعت V_1 در بادی با سرعت V_2 پرواز کند. سرعت برآیند، یعنی V_1+V_2 چیزی است که ما می بینیم.

فضای R^n

تاکنون با فضاهای دو بعدی و سه بعدی یعنی $R^{۲}$ و $R^{۳}$ آشنا شده ایم. مبحثهای آینده ما نیاز به فضای n بعدی یعنی R^n داریم.

$$R^n = \{(x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n) \ , \ x_i \in R\}$$

اگر $X = (x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n)$ و $Y = (y_{۱}, y_{۲}, \dots, y_n)$ نقاطی در R^n و $\alpha \in R$ باشد آنگاه مانند $R^{۳}$ جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می شود.

$$X + Y = (x_{۱} + y_{۱}, x_{۲} + y_{۲}, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha X = \alpha(x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n) = (\alpha x_{۱}, \alpha x_{۲}, \dots, \alpha x_n) \ .$$

هشت خاصیت جمع و ضرب اسکالر در مورد $R^{۳}$ در اینجا نیز برقرار است.

R^n همراه با جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری روی R نامیده می شود. و هر عضو آن یک بردار نامیده می شود. توجه داریم که فضای حقیقی سه بعدی می باشد، لذا نمی توان بردارها در R^n وقتی که $n \rangle ۳$ است را نمایش داد، گرچه به لحاظ تئوری می توانیم بگوییم که n خط دو به دو عمود بر هم که از یک نقطه ثابت به نام مبدأ می گذرد را در نظر می گیریم. نقطه X را در این دستگاه نمایش می دهیم. پاره خط جهت داری که از مبدأ به X وصل می شود برداری است با نقطه انتهایی X.

تعریف: اگر $V \in R^n$ یک بردار باشد و $V = (x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n)$ ، آنگاه طول یا فرم V را با نماد $|V|$ یا $\|V\|$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود.

$$|V| = \sqrt{(x_{۱} + x_{۲} + \dots + x_n)} = \left[\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

اگر $V \in R^{2}$ باشد، آنگاه

$$|V| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

اگر $V \in R^{2}$ باشد، آنگاه

$$|V| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

واضح است اگر $V \in R$ ، آنگاه $V = x_1$ و $|V| = \sqrt{x_1^2} = |x|$. لذا می توان گفت طول بردار تعمیم قدر مطلق از R به R^n می باشد.

تعریف: بردار $U \in R^{2}$ را یکانی یا یکه نامیم در صورتی که $|U| = 1$.

مثال: بردار $U = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ در R^3 یکه است.

اگر $V \neq 0$ باشد ، آنگاه بردار $\frac{V}{|V|}$ بردار یکه در راستای V است.

ضرب داخلی

تعریف: اگر $V_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $V_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ بردارهایی در R^n باشند آنگاه ضرب داخلی یا ضرب نقطه ای V_1 و V_2 را که با نمادهای $\langle V_1, V_2 \rangle$ یا $V_1 . V_2$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود.

$$V_1 . V_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

خواص ضرب داخلی

فرض کنیم U, V و W بردارهایی در R^n و $\alpha \in R$ باشند.

۱- جابه جایی $V . U = U . V$.

۲- توزیع پذیری نسبت به جمع $V . (U + W) = V . U + V . W$.

۳- $O.V = O$.

۴- $(\alpha.V).U = \alpha(V.U) = V.(\alpha U)$.

۵- $V.V = |V|^{۲}$.

همه خواص فوق با توجه به تعریف ضرب داخلی و سایر اعمال روی R^n قابل اثبات است. خاصیت پنجم برای اثبات بسیاری از نامساوی ها و تساویها برای نرم مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف: دو بردار غیر صفر V و U را در R^n بر هم عمود نامیم اگر $V.U = ۰$.

تعریف: بردارهای $V_۱, V_۲, ..., V_R$ در R^n را مستقل خطی نامیم در صورتی که برای هر $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n \in R$ ، اگر

$$\alpha_۱ V_۱ + \alpha_۲ V_۲ + ... + \alpha_n V_n = ۰$$

آنگاه $\alpha_۱ = \alpha_۲ = ... = \alpha_n = ۰$.

مثال: بردارهای $V_۱ = (۱,۰)$ و $V_۲ = (۱,۲)$ در $R^۲$ مستقل خطی است.

یک مجموعه از بردها در R^n را که مستقل خطی نباشند را وابسته خطی می نامیم.

مثال: بردارهای $V_۱ = (۱,۲)$ و $V_۲ = (-۱,۱)$ و $V_۳ = (-۵,-۱)$ وابسته خطی اند چون

$$V_۳ + ۲V_۱ - ۳V_۲ = (-۵,-۱) + ۲(۱,۲) - ۳(-۱,۱) = (۰,۰)$$

ثابت می شود در R^n حداکثر n تا بردار می توانند مستقل خطی باشند.

تعریف: اگر $V_۱, V_۲, ...$ و V_k بردارهایی در R^n باشند آنگاه بردار $V = \alpha_۱ V_۱ + \alpha_۲ V_۲ + ... + \alpha_k V_k$ را بردار تولید شده توسط بردارهای $V_۱, V_۲, ...$ و V_k می نامیم $(\alpha_۱ + \alpha_۲ + ... + \alpha_k \in R)$.

تعریف: یک پایه برای R^n مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی در R^n است که مجموعه بردارهای تولید شده توسط آنها برابر کل R^n باشد.

با توجه به بحثهای قبلی می توان گفت که هر n بردار مستقل خطی در R^n یک پایه برای R^n است.

مثال: بردارهای $V_1 = (1,2)$ و $V_2 = (1,0)$ یک پایه برای R^2 می باشند.

تعریف: یک پایه را یکه ی متعامد نامیم در صورتی که هر بردار پایه دارای طول یک باشد و دو به دو عمود بر هم باشند.

در بحث فضاهای برداری سعی می شود همواره یک پایه ی یکه ی متعامد برای فضا در نظر گرفته شود. روشی نیز به نام روش گرام اشمیت وجود دارد که نحوه ساختن یک پایه ی یک متعامد از یک پایه ی دلخواه را بیان می کند.

مثال: پایه یکه ی متعامد برای R^n به صورت زیر است

$$\beta = \{e_1 = (1,0,....,0), e_2 = (0,1,....,0), ..., e_n = (0,0,....,0,1)\}$$

اگر $n = 2$ باشد آنگاه $e_1 = (1,0) = i$ و $e_2 = (0,1) = j$ و

اگر $n = 3$ باشد، آنگاه $e_1 = (1,0,0) = i$ و $e_2 = (0,1,0) = j$ و $e_3 = (0,0,1) = k$ می باشد.

چون بردارهای i و j و k دو به دو بر هم عمودند، لذا برای نمایش R^2 از دو خط عمود بر هم و برای R^3 از سه خط دو به دو عمود بر هم استفاده می کنیم.

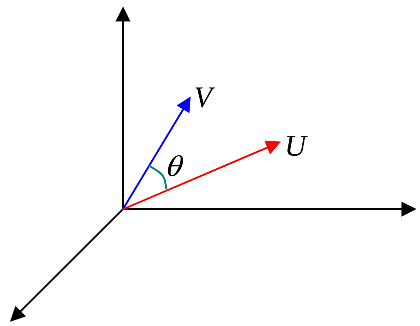
اگر $V = (x_1 , x_2 , ... , x_n) \in R^n$ آنگاه

$$V = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

مثال: بردار $V = (2,-2,3)$ در R^3 را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$V = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

تعریف: زاویه ی بین دو بردار V و U در $R^۳$ زاویه ای است بین آن دو وقتی که با یک نقطه شروع رسم شوند. این زاویه را θ نامیم و $۰ \le \theta \le \pi$ است.



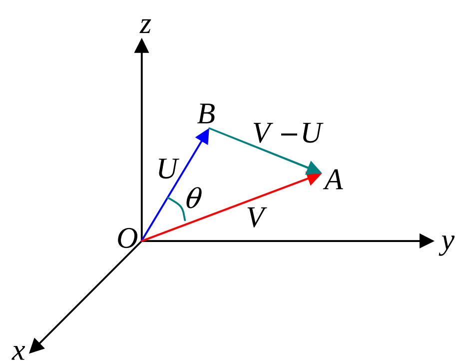
تذکر: اگر دو بردار V و U موازی باشند آنگاه $\theta = ۰$ یا $\theta = \pi$.

قضیه زیر ضرب داخلی را بر اساس زاویه بین دو بردار و طول آنها بیان می کند. فیزیکدانان این قضیه را به عنوان تعریف ضرب داخلی به کار می برند.

قضیه: اگر θ زاویه بین دو بردار V و U باشد، آنگاه

$$V.U = |V| \, . \, |U| \, . \cos\theta$$

برهان: قانون کسینوسها را برای مثلث OAB در شکل زیر به کار می بریم.



$$|V-U|^۲ = |V|^۲ + |U|^۲ - ۲|V| \, . \, |U| \cos\theta \qquad (۱)$$

با توجه به رابطه ی ضرب داخلی و طول بردار داریم

$$\left|V-U\right|^{۲}=(V-U)\,.\,(V-U)=V\,.\,V+U\,.\,U-۲V\,.\,U \qquad (۲)$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$V\,.U=\left|V\right|\,.\,\left|U\right|.\cos\theta \quad .$$

قضیه فوق به ما کمک می کند که بتوانیم زاویه بین دو بردار را محاسبه کنیم.

نتیجه: اگر θ زاویه بین دو بردار V و U در $R^{۳}$ باشد آنگاه

$$\cos\theta=\frac{V\,.U}{\left|V\right|\,.\,\left|U\right|}$$

مثال: زاویه ی بین دو بردار $V=(۲,۲,-۱)$ و $U=(۵,-۳,۲)$ را محاسبه کنید.

حل: چون $\left|U\right|=\sqrt{۵^{۲}+(-۳)^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۳۸}$ و $\left|V\right|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$ با توجه به نتیجه بالا داریم

$$\cos\theta=\frac{V\,.U}{۳\sqrt{۳۸}}=\frac{۲\times۵+۲(-۳)+(-۱)(۲)}{۳\sqrt{۳۸}}=\frac{۲}{۳\sqrt{۳۸}}$$

$$\theta=\cos^{-۱}\left(\frac{۲}{۳\sqrt{۳۸}}\right)\cong ۱/۴۶ \quad \text{یا} \quad ۸۴^{\circ} \quad .$$

با توجه به نتیجه بالا می توانیم زاویه بین دو بردار در R^{n} را نیز به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف: اگر V و U بردارهایی مخالف صفر در $R^{n}\,(n\geq۲)$ باشند، آنگاه θ زاویه بین دو بردار برابر است با

$$\theta=\cos^{-۱}\frac{V\,.\,U}{\left|V\right|.\left|U\right|}$$

حاصلضرب خارجی:

حاصلضرب خارجی دو بردار V و U در $R^{۳}$ یک بردار در $R^{۳}$ است که با نماد $V\times U$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف: اگر $V=(x_{۱}\,,\,x_{۲}\,,\,x_{۳})$ و $U=(y_{۱}\,,\,y_{۲}\,,\,y_{۳})$ بردارهایی در $R^{۳}$ باشند آنگاه

$$V \times U = (x_۲ y_۳ - x_۳ y_۲ \ , \ x_۳ y_۱ - x_۱ y_۳ \ , \ x_۱ y_۲ - x_۲ y_۱)$$

تذکر: ضرب خارجی فقط برای بردارها در $R^۳$ تعریف می شود.

برای اینکه به راحتی فرمول حاصلضرب خارجی در بردار را به یاد بیاوریم از نماد دترمینـان بـه صـورت زیر استفاده می کنیم.

$$V \times U = \begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix} k$$

بنابراین

$$V \times U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} \quad .$$

مثال: حاصلضرب خارجی دو بردار $V = (۱,-۱,۱)$ و $U = (۰,۲,۱)$ را محاسبه کنید.

$$V \times U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱-۲)i - (۱-۰)\,j + (۲-۰)k = (-۳,۱,۲)$$

قضیه زیر یکی از خواص بسیار مهم حاصلضرب خارجی را بیان می کند.

قضیه: بردار $V \times U$ بر هر یک از بردارهای V و U عمود است.

برهان: فرض کنیم $V = (x_۱ \ , \ x_۲ \ , \ x_۳)$ و $U = (y_۱ \ , \ y_۲ \ , \ y_۳)$. داریم

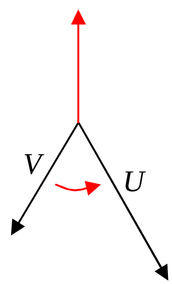
$$\begin{aligned}(V \times U)\,.\,V &= \begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} x_۱ - \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix} x_۲ + \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix} x_۳ \\ &= x_۱ (x_۲ y_۳ - x_۳ y_۲) - (x_۱ y_۳ - y_۱ x_۳) x_۲ + (x_۱ y_۲ - x_۲ y_۱) x_۳ \\ &= x_۱ x_۲ y_۳ - x_۱ x_۳ y_۲ - x_۱ x_۲ y_۳ + y_۱ x_۲ x_۳ + x_۱ x_۳ y_۲ - x_۲ x_۳ y_۱ \\ &= ۰\end{aligned}$$

مشابهاً ثابت می شود

$$(V \times U)\,.\,U = ۰ \quad .$$

بنابراین $V\times U$ بر هر یک از بردارهای V و U عمود است.

برای تعیین جهت بردار $V\times U$ از قانون دست راست استفاده می کنیم برای این منظور اگر دو بـردار بـا یک نقطه اولیه یکسان رسم شوند. دست راست خود را در راستای بردار V قرار می دهیم به طوری که جهت بسته شدن انگشتان دست را از V به U باشد آنگاه جهت انگشت شصت دسـت راسـت، جهـت بردار $V\times U$ نشان می دهد.



(عکس دست راست رسم شود

شصت به سمت بالا باشد.)

قضیه: اگر θ زاویه بین دو بردار V و U باشد، آنگاه

$$|V\times U| = |V|\,.\,|U|\,.\sin\theta$$

برهان: فرض کنیم $V=(x_۱\,,\,x_۲\,,\,x_۳)$ و $U=(y_۱\,,\,y_۲\,,\,y_۳)$. داریم

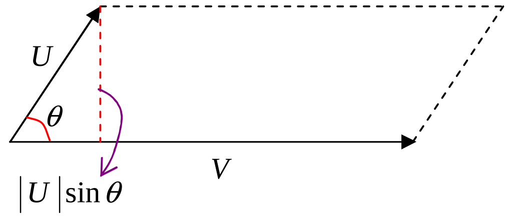
$$\begin{aligned}
|V\times U|^۲ &= (x_۲y_۳-x_۳y_۲)^۲+(x_۳y_۱-x_۱y_۳)^۲+(x_۱y_۲-x_۲y_۱)^۲\\
&= (x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)(y_۱^۲+y_۲^۲+y_۳^۲)-(x_۱y_۱+x_۲y_۲+x_۳y_۳)^۲\\
&= |V|^۲\,.\,|U|^۲-(V\,.\,U)^۲=|V|^۲\,.\,|U|^۲-|V|^۲\,.\,|U|^۲\cos^۲\theta\\
&= |V|^۲\,.\,|U|^۲(۱-\cos^۲\theta)=|V|^۲\,.\,|U|^۲\sin^۲\theta
\end{aligned}$$

چون $۰\le\theta\le\pi$ است پس

$$|V\times U| = |V|\,.\,|U|\,.\sin\theta\quad .$$

نتیجه: دو بردار غیر صفر V و U موازی اند اگر و تنها اگر $V\times U=۰$.

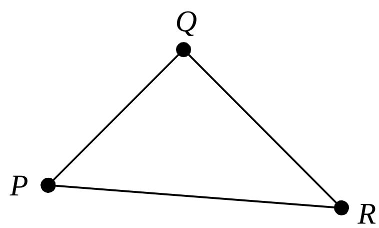
یکی از کاربردهای حاصلضرب خـارجی دو بـردار مخـالف صـفر مـساحت متـوازی الاضـلاعی را کـه توسط آن دو بردار ساخته می شود.



مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط V و U = $|V|\,.\,(|U|\,.\,\sin\theta) = |V\times U|$

مثال: مساحت مثلثی به رئوس $P(۱,۲,۱)$ و $Q(-۲,۰,۱)$ و $R(۱,-۱,۱)$ را محاسبه کنید.

حل:



$$\overrightarrow{PQ} = (-۳,-۲,۰)$$

$$\overrightarrow{PR} = (۰,-۳,۰)$$

PQR مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۳ & -۲ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = (۰,۰,۹)$$

لذا

PQR مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}\times ۹ = \frac{۹}{۲}$.

می دانیم بردارهای i و j و k دو به دو بر هم عمود می باشند، لذا بـا اسـتفاده از قـانون دسـت راسـت می توانیم بنویسیم

$k\times i = j$ و $j\times k = i$ و $i\times j = k$

$i\times k = -j$ و $k\times j = -i$ و $j\times i = -k$

مشاهده می کنیم که

$$i\times j \neq j\times i$$

بنابراین ضرب خارجی خاصیت جابه جایی ندارد.

همچنین

$$i\times (i\times j) = i\times k = j$$

و

$$(i\times i)\times j = ۰\times j = ۰$$

بنابراین خاصیت شرکت پذیری نیز در مورد ضرب خارجی بردارها برقرار نمی باشد. لذا در حالت کلی

$$(V\times U)\times W \neq V\times (U\times W)$$

که در آن U , V و W بردارهایی در $R^۳$ می باشند.

در قضیخ زیر خواصی که برای ضرب خارجی بردارها برقرار باشند، بیان شده است.

قضیه (خواص ضرب خارجی) : اگر U , V و W بردارهایی در $R^۳$ باشند و $\alpha \in R$.

۱- $V\times U = -U\times V$

۲- $(\alpha V)\times U = \alpha (V\times U) = V\times (\alpha U)$

۳- $V\times (U\times W) = V\times U + V\times W$

۴- $(V\times U)\times W = V\times W + U\times W$

۵- $V .\ (U\times W) = (V\times U)\ .\ W$

۶- $V\times (U\times W) = (V.W)U - (V.U)W$.

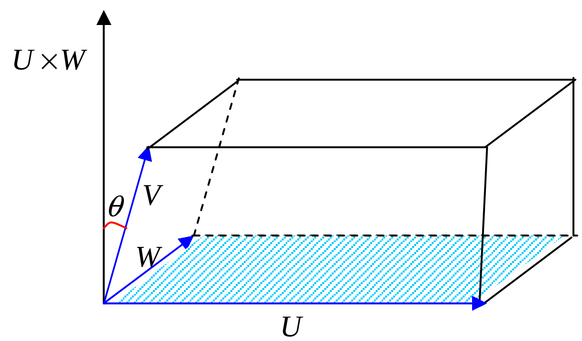
اثبات خواص فوق با استفاده از تعریف حاصلضرب خارجی بردارها به راحتی حاصل می شود.

خاصیت پنجم حاصلضرب عددی سه بردار نامیده می شود و با توجه به تعریف ضرب خارجی و ضرب داخلی می توانیم بنویسیم.

$$V\,.\,(U\times W)=\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \end{vmatrix}$$

که در آن $V=(x_۱,x_۲,x_۳)$, $U=(y_۱,y_۲,y_۳)$ و $W=(z_۱,z_۲,z_۳)$ می باشد.

برای توصیف هندسی مفهوم ضرب عددی سه بردار می توانیم متوازی السطوح ساخته شده توسط $U\,,V$ و W را همانند شکل زیر در نظر بگیریم.



مساحت قاعده این متوازی السطوح برابر $A=|U\times W|$. اگر θ زاویه ی بین V و $U\times W$ باشد آنگاه ارتفاع متوازی السطوح برابر $h=|V|\,.\,|\cos\theta|$ است. لذا داریم

$$\text{حجم متوازی السطوح}=Ah=|U\times W|\,.\,|V|\,.\,|\cos\theta|$$
$$=|V\,.\,(U\times W)|\quad .$$

بنابراین می توان گفت:

حجم متوازی السطوح تولید شده توسط بردارهای $U\,,V$ و W در $R^۳$ برابر اندازه حاصلضرب عددی آنها است یعنی

$$\text{حجم}=|V\,.\,(U\times W)|\quad .$$

مثال: حجم متوازی السطوحی به رئوس $P(۱,۰,-۱)$, $Q(۰,۰,۱)$, $R(۲,۱,-۱)$ و $D(۲,۱,۰)$ را محاسبه کنید.

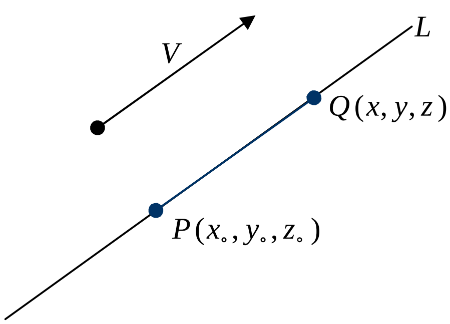
حل:

$$\overrightarrow{PQ}=(-۱,۰,۲)$$
$$\overrightarrow{PR}=(۱,۱,۰)$$
$$\overrightarrow{PD}=(۱,۱,۱)$$

$$\text{حجم}=\overrightarrow{PQ}.(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PD})=\left|\begin{vmatrix}-۱ & ۰ & ۲\\ ۱ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}\right|=\left|(-۱,۰,۰)\right|=۱\quad.$$

معادلات خط و صفحه در فضای $R^۳$

یک خط در $R^۳$ در صورتی مشخص می شود که یک نقطه روی آن و جهت یا راستای خط مـشخص باشد. راستای یک خط با یک بردار مشخص می شود بنابراین می توان گفت برای نوشـتن معادلـه خـط L نیاز به یک نقطه مانند $P(x_۰,y_۰,z_۰)$ روی L و برداری موازی با آن مانند V داریم. ایـن بـردار را بردار هادی خط می نامیم.



اگر $Q(x,y,z)$ نقطه دلخواهی روی خط L باشد، آنگاه بردار $\overrightarrow{PQ}$ موازی بردار V است. فرض کنید $V=(a,b,c)$. داریم

$$\overrightarrow{PQ}\parallel V \;\Rightarrow\; \exists\, t\in R:(x-x_۰,y-y_۰,z-z_۰)=t(a,b,c)$$
$$\Rightarrow\; (x,y,z)=(x_۰+at,y_۰+bt,z_۰+ct)$$

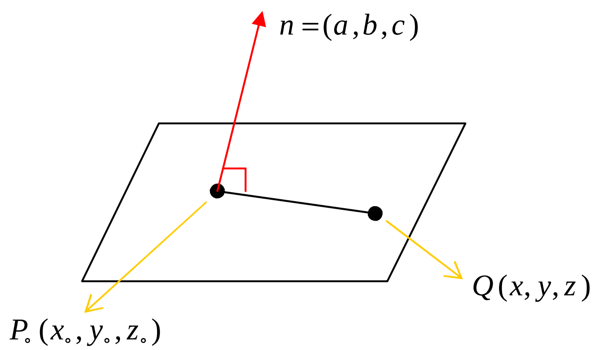
بنابراین معادلات پارامتری خط L که از نقطه $P(x_۰,y_۰,z_۰)$ می گذرد و موازی بـردار $V=(a,b,c)$ است به صورت زیر است.

$$x=x_۰+at \qquad , \qquad y=y_۰+bt \qquad , \qquad z=z_۰+ct$$

اگر $a\neq ۰$, $b\neq ۰$ و $c\neq ۰$ باشد آنگاه با محاسبه t از معادلات پارامتری معادلات متقارن خط L به صورت زیر حاصل می شود

$$\frac{x-x_{\circ}}{a}=\frac{y-y_{\circ}}{b}=\frac{z-z_{\circ}}{c}$$

یک صفحه در $R^{۳}$ توسط یک نقطه مانند $P_{\circ}(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ روی آن و یک بردار مانند $n=(a,b,c)$ عمود بر آن مشخص می شود. بردار n را بردار نرمال یا بردار قائم بر صفحه نامیم.



اگر $Q(x,y,z)$ نقطه ای دلخواه روی صفحه باشد آن بردار n بر بردار $\overrightarrow{PQ}$ عمود است. بنابراین

$$n\ .\ \overrightarrow{PQ}=\circ \qquad .$$

معادله فوق را معادله برداری صفحه می نامیم. با توجه به تعریف ضرب داخلی، معادله زیر که معادله عددی صفحه نامیده می شود، حاصل می شود

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=\circ$$

با ساده کردن عبارت فوق داریم

$$ax+by+cz=d$$

که در آن $\qquad d=ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}$

مثال: معادله صفحه ای را بنویسید که شامل نقاط $P(۱,۱,۱)$ ، $Q(۱,-۱,-۱)$ و $R(۲,۱,\circ)$ باشند.

حل: بردارهای $\overrightarrow{PQ}=(\circ,-۲,-۲)$ و $\overrightarrow{PR}=(۱,\circ,-۱)$ را در نظر می گیریم. صفحه ی مورد نظر شامل $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ می باشد. لذا $\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}$ را می توانیم به عنوان بردار نرمال صفحه در نظر بگیریم.

$$\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۲ & -۲ \end{vmatrix}=(-۲,۲,-۲)$$

معادله صفحه را با بردار فوق و هر یک از نقاط P , Q یا R می توانیم بنویسیم.

$$\begin{aligned} & -۲(x-۱)+۲(y-۱)-۲(z-۱)=۰ \\ & \Rightarrow ۲x-۲y+۲z=۲ \\ & \Rightarrow x-y+z=۱ \quad . \end{aligned}$$

دو صفحه موازی ان اگر بردارهای نرمال آنها موازی باشند. یک خط موازی با یک صفحه است اگر بردار هادی خط عمود بر بردار نرمال صفحه باشد.

مثال: الف: زاویه بین دو صفحه $x+y+z=۱$ و $x-۲y+۳z=۱$ را محاسبه کنید.

ب: معادله خط فصل مشترک دو صفحه را محاسبه کنید.

حل:

الف: بردار نرمال صفحات به ترتیب برابر است با

$$n_۱=(۱,۱,۱) \qquad \text{و} \qquad n_۲=(۱,-۲,۳)$$

بنابراین اگر θ زاویه ی بین $n_۱$ و $n_۲$ باشد، آنگاه

$$\cos\theta=\frac{n_۱ . n_۲}{|n_۱| . |n_۲|}=\frac{۱(۱)+۱(-۲)+۱(۳)}{\sqrt{۱+۱+۱}\ \sqrt{۱+۴+۹}}=\frac{۲}{\sqrt{۴۲}}$$

$$\theta=\cos^{-۱}(\frac{۲}{\sqrt{۴۲}})\approx ۷۲^{\circ}$$

ب: بردار هادی خط فصل مشترک برابر است

$$V=n_۱\times n_۲=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}=(۵,-۲,-۳) \quad .$$

برای به دست آوردن یک نقطه روی خط فصل مشترک در دستگاه زیر یکی از متغیرها مثلاً z را برابر صفر قرار دهیم

$$\begin{cases} x+y+z=۱ \\ x-۲y+۳z=۱ \end{cases}$$

با قرار دادن $z=۰$ داریم $x=۱$ و $y=۰$. پس $P(۱,۰,۰)$. بنابراین معادله خط فصل مشترک به صورت زیر است.

$$\frac{x-۱}{۵}=\frac{-y}{۲}=\frac{-z}{۳} \qquad .$$