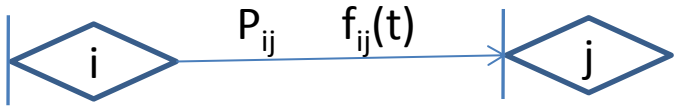
فصل هشتم

تئوری فلوگراف و شبکه های GERT

Graphical Evaluation & Review Technique

قابلیت های شبکه های گرت در مقایسه با دیگر روش ها

۱- نمایش فعالیت ها:



P_{ij}: احتمال وقوع گره j به شرط آنکه گره i رخ داده باشد

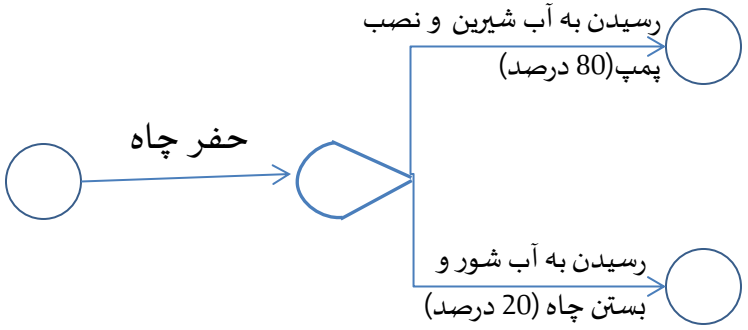
$f_{ij}(t)$: تابع توزیع زمان مورد نیاز برای تکمیل فعالیت i-j

۲- چگالی احتمال زمان فعالیت ها:

- توزیع پواسون
- مقدار ثابت
- توزیع گاما
- توزیع نرمال
- توزیع مثلثی
- توزیع یکنواخت
- توزیع ارلنگ

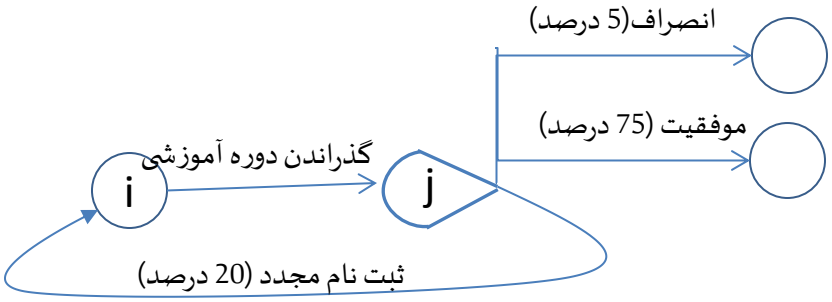
۳- انشعابهای احتمالی (Probabilistic Branching):

در CPM و PERT کلیه فعالیت ها به صورت قطعی لازم الاجرا هستند، حال آنکه در شبکه های گرت اجرای یک فعالیت احتمالی است.



۴- ایجاد حلقه:

در CPM و PERT حلقه مجاز نیست حال آنکه در شبکه های GERT مجاز است.



۵- تحقق یک رویداد:

در CPM و PERT برای تحقق یک رویداد باید کلیه فعالیت های واصله به آن به اتمام رسد و هر رویداد نمی تواند بیش از یک بار تحقق یابد ولی در GERT می توان یک رویداد را به گونه ای تعریف کرد که با اتمام یک یا چند فعالیت واصله به آن، تحقق رویداد امکان پذیر شود. مثال: خرید در واحد تدارکات

۶-وجود چندین رویداد شروع و پایان:

۷- شکل های مختلف رویداد ها و مفاهیم آن ها:

هر گره در شبکه های GERT دارای دو وجه است: یک ورودی و یک خروجی . به طور کلی سه رابطه برای ورودی و دو رابطه برای خروجی در نظر گرفته می شود.

نمادهای ورودی شبکه های پرت

نام	نماد ورودی	ویژگی
یای خاص Exclusive OR		وقوع هر یک از فعالیت های واصله باعث وقوع گره می شود اما در هر لحظه از زمان یک و فقط یک شاخه ممکن است رخ دهد. (کوهنورد)
یای عام Inclusive OR		وقوع هر یک از فعالیت های واصله باعث وقوع گره می شود و در هر لحظه ممکن است بیش از یک شاخه در حال اجرا باشد. زمان وقوع این گره برابر است با زمان اتمام زودترین شاخه (خرید توسط سه نفر)
و And		گره زمانی رخ می دهد که کلیه فعالیت های واصله به اتمام رسد. زمان وقوع گره برابر است با زمان اتمام دیرترین فعالیت

دو نماد برای خروجی شبکه های گرت وجود دارد که در جدول زیر آورده شده است. در شبکه های PERTو CPM خروجی کلیه گره ها به صورت قطعی می باشد که در ردیف اول جدول زیر آورده شده است.

نمادهای خروجی شبکه های پرت

نام	نماد ورودی	ویژگی
قطعی		با وقوع گره تمامی فعالیت های منشعب از آن تحقق می یابند. تمامی فعالیتها با احتمال 1 به وقوع می پیوندند.
احتمالی		با وقوع گره تنها یک فعالیت از فعالیت های منشعب از گره به وقوع می پیوندند

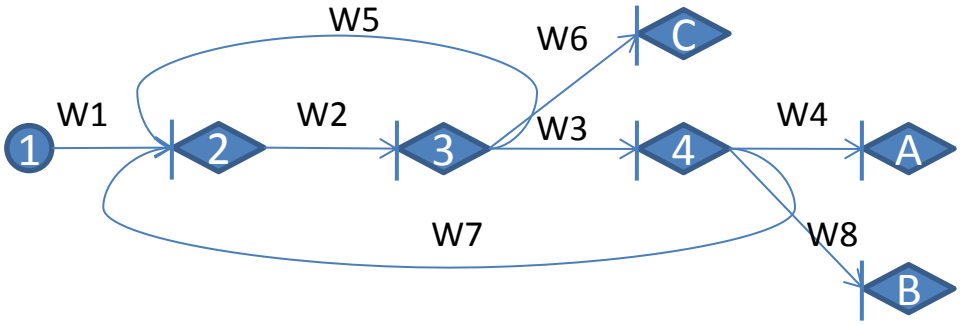
با توجه به دو جدول فوق برای یک گره در شبکه های GERT یکی از حالت های شش گانه زیر را می توان متصور شد.

خروجی گره	ورودی گره			
		یای خاص	یای عام	و
قطعی Deterministic				
احتمالی Probabilistic				

مثال a:

جهت ساخت یک نیمه هادی مواد پس از حمل در درون حوضچه قرار می گیرند و بعد از خروج از حوضچه به سه صورت خراب و قابل برگشت به حوضچه، مواد نامرغوب و یا به صورت مواد با کیفیت قابل قبول در می آیند. مواد با کیفیت قابل قبول به صورت صفحات برش داده می شوند. صفحات یا به صورت سالم به انبار A می رود یا نامرغوب شده و به انبار B رفته یا اینکه به کنار حوضچه می روند. سایر فعالیت های این کار به صورت جدول زیر است. شبکه را برای یک قلم کالا رسم کنید

فعالیت	شرح	احتمال
W1	حمل مواد اولیه به کنار حوضچه	1
W2	قرار گرفتن در حوضچه	1
W3	ارسال و برش مواد قابل قبول	0.85
W4	ارسال به بخش صفحات قابل قبول (A)	0.75
W5	برگشت مواد به کنار حوضچه	0.12
W6	ارسال مواد به بخش مواد با کیفیت نامرغوب (C)	0.02
W7	برگشت صفحات به کنار حوضچه	0.2
W8	ارسال صفحات به بخش صفحات غیر قابل قبول (B)	0.05



خواسته های ما از گرت:

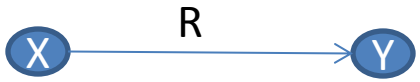
احتمال رسیدن به هر یک از حالات ممکن در شبکه

متوسط زمان رسیدن به هر یک از حالات

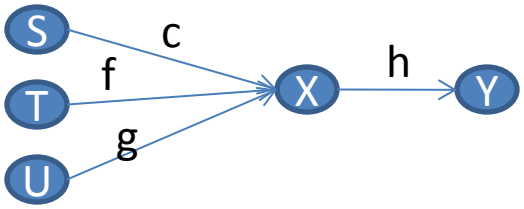
واریانس رسیدن به هر یک از حالات

تئوری فلوگراف:

تعریف: روشی است برای نمایش گرافیکی روابط جبری بین متغییرها

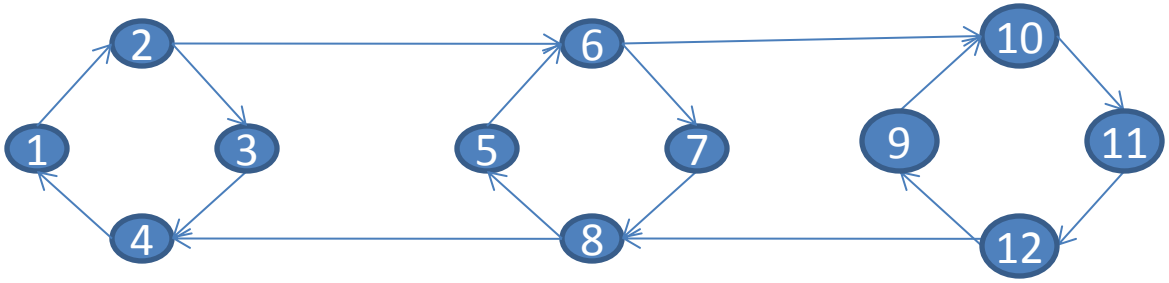


Y=RX



Y=hX=hcS+hfT+hgU

تعاریف



مسیر(Path): عبارت است یکسری شاخه های متوالی که دو گره را بهم وصل کرده و از هیچ گره ای دو بار عبور نمی کند.

1-2-6-10-11-12-8 و 1-2-6-7-8

ارزش مسیر(Path): عبارت است حاصلضرب ارزش شاخه های آن مسیر

حلقه رسته اول (First order loop): عبارت است یکسری شاخه های متوالی که از یک گره حرکت کرده و بدون اینکه از گره ای دو بار عبور کند به گره مبدا برگردد.

A:1-2-3-4-1 , B:5-6-7-8-5,

D:1-2-6-7-8-4-1 , C:9-10-11-12-9

حلقه رسته n ام (n *th* order loop): یک مجموعه از n حلقه رسته اول مجزا از هم را گویند (گره مشترک نداشته باشند)

مثال: دو حلقه رسته دوم: L{A,B}, L{B,C}

فلوگراف باز و بسته: یک فلوگراف بسته اگر هر شاخه آن حداقل متعلق به یک حلقه باشد، در غیر این صورت باز می باشد.

ارزش حلقه رسته اول: عبارت است حاصلضرب ارزش شاخه های آن

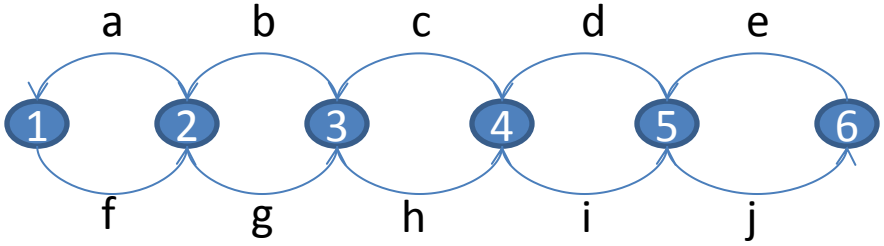
ارزش حلقه رسته nام : عبارت است حاصلضرب ارزش n حلقه موجود در آن

معادله توپولوژی : معادله توپولوژی در یک فلوگراف به صورت زیر بدست می آید:

$$H = 1 - (\text{مجموع ارزش حلقه های رسته اول}) + (\text{مجموع ارزش حلقه های رسته دوم}) - (\text{مجموع ارزش حلقه های رسته سوم}) + \ldots$$

نکته: در یک فلوگراف بسته برابر داریم H=0

مثال b : معادله توپولوژی در فلوگراف زیر را بدست آورید



$$H = 1 - (af + bg + ch + di + ej) + (afch + afdi + agej + bgdi + bgej + chej) - (afchej)$$

محاسبه ارزش بین دو گره

روش اول: با توجه به اینکه معادله توپولوژی در هر فلوگراف بسته برابر صفر است، می توان با نوشتن این معادله و حل آن ارزش بین دو گره را بدست آورد. برای فلوگراف های باز ابتدا باید با اضافه کردن شاخهای مجازی آنها را به فلوگراف بسته تبدیل کرد.

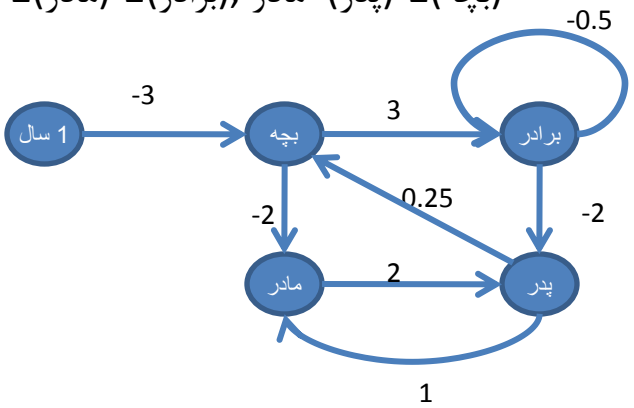
روش دوم: قاعده میسون در این راستا بدون توجه به باز یا بسته بودن فلوگراف از طریق رابطه زیر، ارزش دو گره را بدست می دهد:

$$T=\frac{\sum\left(\left(\text{معادله توپولوژی حلقه های غیر مماس بر آن مسیر}\right)\times\left(\text{ارزش هر مسیر}\right)\right)}{\text{معادله توپولوژی فلوگراف}}$$

مثال C: سن بچه ای ۳ سال کمتر از یک چهارم سن پدرش است. سن برادر او سه برابر سن وی منهای نصف سن خودش می باشد. سن پدر دو برابر سن مادر منهای دو برابر سن برادر است. سن مادر برابر سن پدر منهای دو برابر سن این بچه است. سن پدر چقدر است؟

بچه=0.25(پدر)-3, برادر=3(بچه)-0.5(برادر),

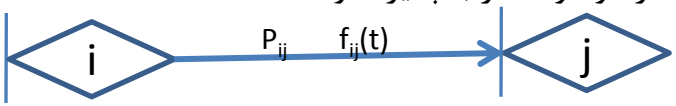
پدر=2(مادر), مادر=(پدر)2-(بچه)



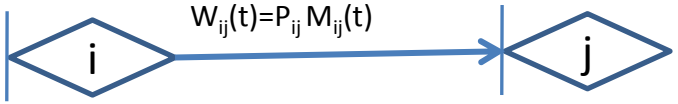
$$\text{سن پدر}=\frac{(-3\times-2\times2)\times\left(1-(-0.5)\right)+(-3\times3\times-2)\times(1-0)}{1-(-0.5-1.5-1+2)+(0.5-1)}=24$$

ارتباط فلوگراف با شبکه گرت:

هر فعالیت دارای دو پارامتر است است. از آنجا که فلوگراف یک سیستم ضرب پذیر است، باید پارامتر های فعالیت ها در شبکه گرت را اولا یکی کرد و دوما ضرب پذیر نمود.



چون $f_{ij}(t)$ ضرب پذیر نیست، با استفاده از قضیه یکتایی تابع مولد گشتاور، به جای آن از تابع مولد مولد گشتاور $M_{ij}(t)$ استفاده می شود. برای یکی شدن دو پارامتر آن ها را در هم ضرب کرده و در نتیجه پارامتر فعالیت به صورت P_{ij} $M_{ij}(t)$ خواهد شد.



محاسبات احتمال و واریانس بین دو گره در شبکه گرت:

گرت: با استفاده از روش های ذکر شده در برآورد ارزش بین دو گره که در فلوگراف ها انجام گرفت، می توان $W_e(t)=P_e M_e(t)$ را برای هر گره بدست آورد. با مشخص شدن $W_e(t)$ و روابط زیر، احتمال رخداد یک گره به همراه تابع مولد گشتاور توزیع زمان آن بدست می آید:

$$M_e(t)=\frac{W_e(t)}{P_e} \qquad P_e=W_e(0)$$

الگوریتم محاسبه احتمال وقوع، امید ریاضی زمان و واریانس بین دو گره در شبکه گرت:

گام ۱: شبکه گرت فعالیت های مربوط به پروژه را با توجه به روابط پیشنیازی و تعریف فعالیت ها رسم کنید.

گام ۲: تابع $W_{ij}(t)$ را برای هر فعالیت تعیین نمایید.

گام ۳: تابع ارزش بین دو گره ، $W_e(t)$ را بین دو گره از طریق روش میسون بدست آورید.

گام ۴: با داشتن تابع مولد گشتاور و احتمال وقوع از دو رابطه اخیر کلیه مشخصات گره قابل محاسبه است.

یادآوری: اگر X یک متغییر تصادفی به صورت $N(\mu,\sigma^2)$ باشد خواهیم داشت:

$$M_X(t) = e^{(\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2})}$$

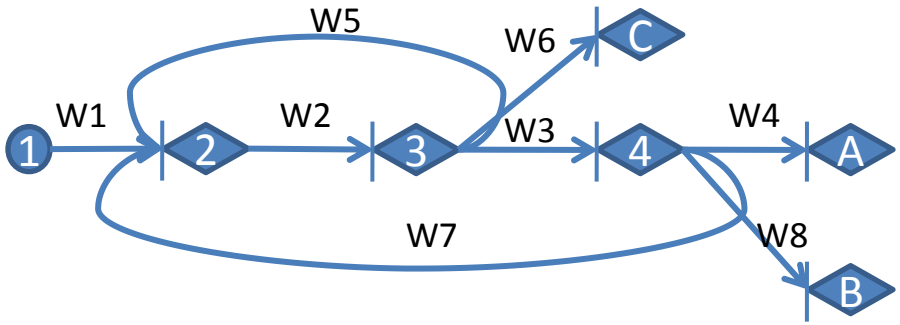
مثال d: در مثال a فرض کنید اطلاعات مربوط به زمان و احتمال وقوع هر یک از فعالیت ها به صورت جدول زیر باشد. مطلوبست:

فعالیت	زمان فعالیت	احتمال
W1	ثابت با زمان ۱	1
W2	N(0.5,0.01)	1
W3	N(0.25,0.04)	0.85
W4	ثابت با زمان ۰.۲	0.75
W5	N(0.1,0.01)	0.12
W6	ثابت با زمان ۰.۲۵	0.03
W7	ثابت با زمان ۰.۱	0.2
W8	ثابت با 0.05	0.05

الف) احتمال اینکه مواد اولیه به بخش مواد با کیفیت نامرغوب منتقل شوند.

ب) متوسط زمان رسیدن از مواد اولیه به صفحات نیمه هادی

ج) واریانس مورد خواسته شده در بند ب)



$$W_{1-C} = \frac{W_1 W_2 W_6}{1 - W_2 W_5 - W_2 W_3 W_7} =$$

$$W_{1-C} = \frac{e^{t} e^{(0.5t+0.005t^2)} 0.03 e^{0.25t}}{1 - e^{(0.5t+0.005t^2)} 0.12 e^{(0.1t+0.005t^2)} - e^{(0.5t+0.005t^2)} 0.85 e^{(0.25t+0.02t^2)} 02 e^{0.1t}}$$

الف)

$$P_{1-C} = W_{1-C}(0) = 0.042$$

ب)

$$W_{1-A}(t) = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 - W_2 W_5 - W_2 W_3 W_7} =$$

$$\frac{0.637e^{(1.95t+0.025t^2)}}{1 - 0.12e^{(0.65t+0.01t^2)} - 0.17e^{(0.85t+0.25t^2)}}$$

خواهیم داشت:

$$P_{1-A} = W_{1-A}(0) = 0.8978$$

$$M_{1-A}(t) = \frac{1}{0.897} W_{1-A}(t)$$

$$\mu_{1-A} = \frac{\partial}{\partial t} M_{1-A}(t)|_{t=0} = 2.254$$