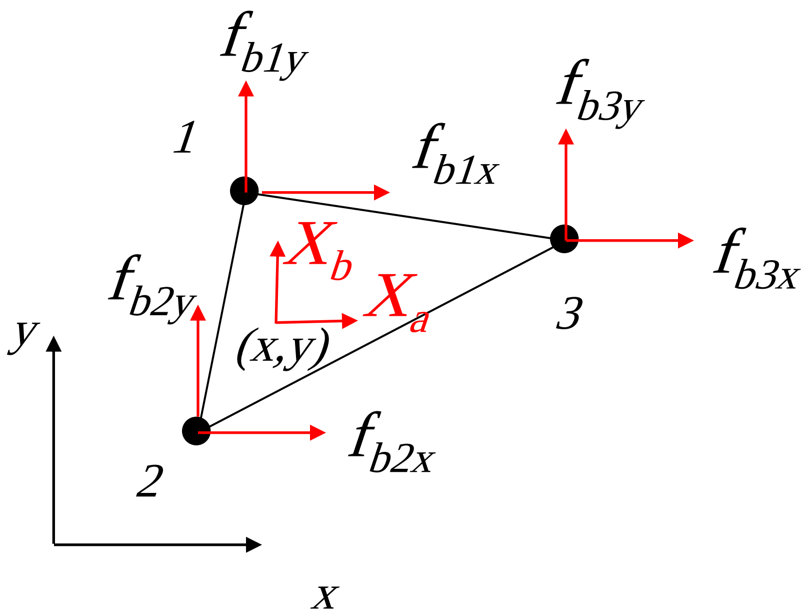
المان مثلثی خطی

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

$$\boldsymbol{f} = \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X} \; dV}_{f_b} + \underbrace{\int_{S_T{}^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S \; dS}_{f_S}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_b = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X} \, dV = t\int_{A^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X} \, dA}$$



$$f_b = \begin{Bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \\ f_{b2x} \\ f_{b2y} \\ f_{b3x} \\ f_{b3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1 X_a \; dA \\ t\int_{A^e} N_1 X_b \; dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_a \; dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_b \; dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_a \; dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_b \; dA \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

مثال

If $X_a=1$ and $X_b=0$

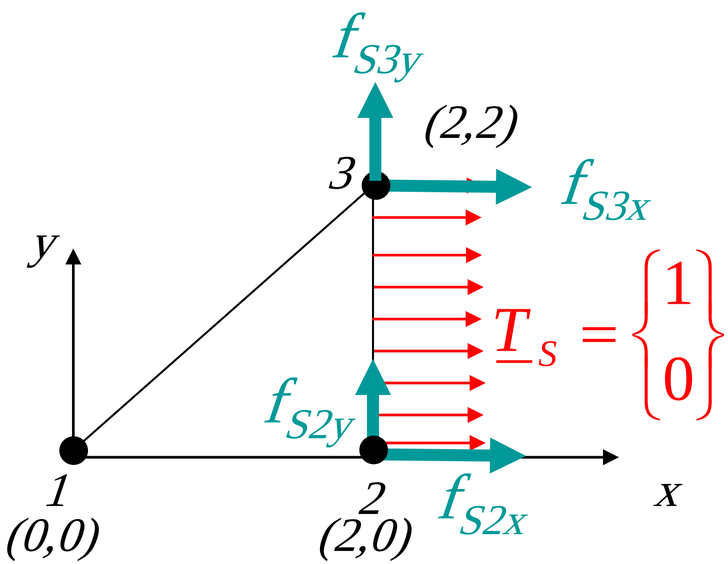
$$f_b=\begin{Bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \\ f_{b2x} \\ f_{b2y} \\ f_{b3x} \\ f_{b3y} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1 X_a \, dA \\ t\int_{A^e} N_1 X_b \, dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_a \, dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_b \, dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_a \, dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_b \, dA \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1 dA \\ 0 \\ t\int_{A^e} N_2 \, dA \\ 0 \\ t\int_{A^e} N_3 dA \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{tA}{3} \\ 0 \\ \frac{tA}{3} \\ 0 \\ \frac{tA}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

$$\boxed{\boldsymbol{f}_S = \int_{S_T{}^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S \, dS}$$

❖ نیروهای معادل در گرەها

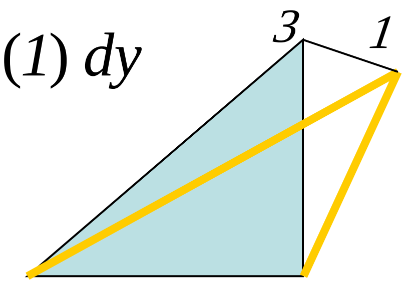
مثال



$$\boldsymbol{f}_S = t\int_{l_{2-3}{}^e} \boldsymbol{N}^T\Big|_{along\ 2-3} \boldsymbol{T}_S \, dS$$

$$f_{S_{3x}} = t\int_{l_{2-3}{}^e} N_3\Big|_{along\ 2-3} (1)\, dy$$

$$= t\left(\frac{1}{2}\right)\times 2\times 1 = t$$



Similarly, compute

$$f_{S_{2x}} = t$$

$$f_{S_{2y}} = 0$$

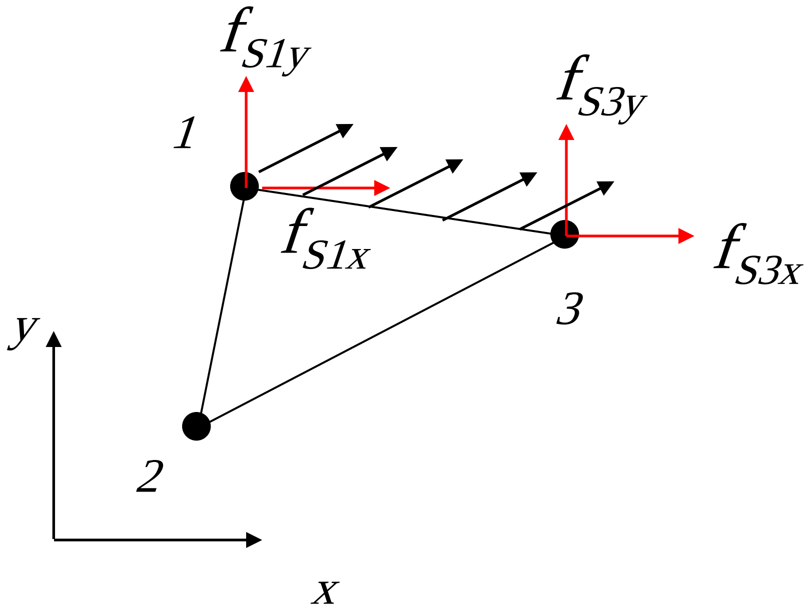
$$f_{S_{3y}} = 0$$

المان مثلثی خطی

$$\boldsymbol{f}_S = \int_{S_T^{\,e}} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S \, dS$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

تمرین:

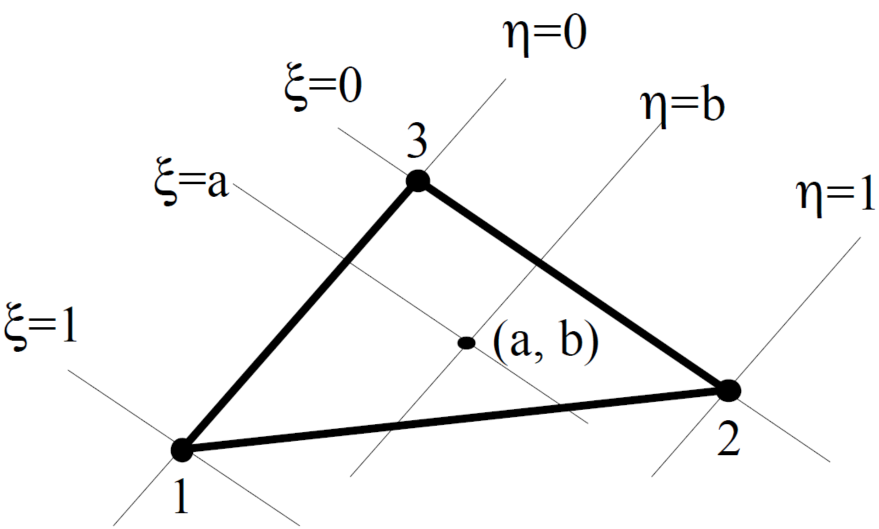


$$\boldsymbol{f}_S = t\int_{l_{1-3}^{\,e}} \boldsymbol{N}^T\Big|_{along1-3} \boldsymbol{N}_S \, dS$$

المان مثلثی خطی

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

برای مختصات طبیعی (ξ,η) می توان توابع شکل به صورت زیر تعریف نمود :



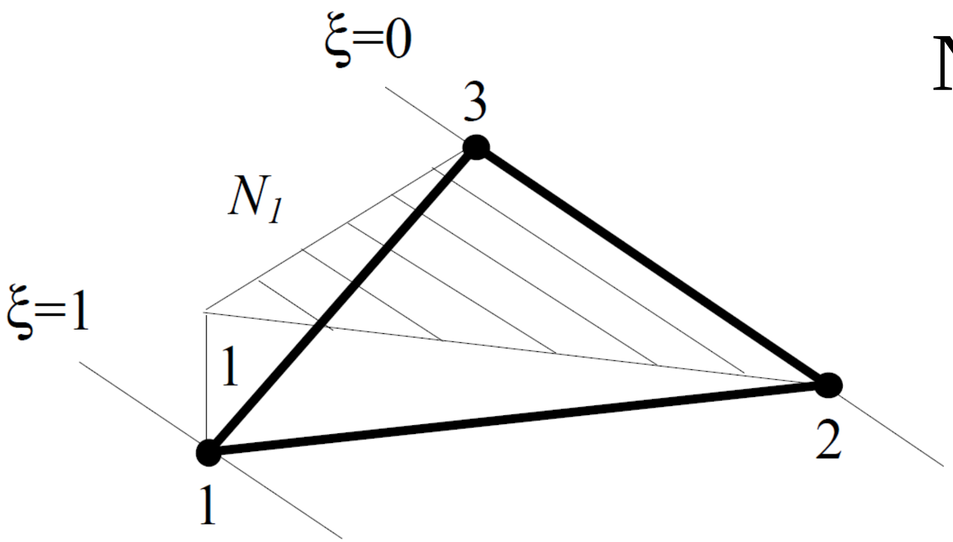
$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1-\xi-\eta$$

در این صورت:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

المان مثلثی خطی

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی



$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{در نقطه } i\text{:} \\ 0, & \text{در نقاط دیگر:} \end{cases}$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

در اینجا دو دستگاه مختصات داریم: یکی مختصات طبیعی (ξ,η) که محلی است و دیگری دستگاه سراسری (x,y). رابطه این دو عبارت است از:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \qquad \Rightarrow \qquad x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \qquad\qquad y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

که در آن:

$$x_{ij} = x_i - x_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

تغییرمکان (u,v) در داخل المان قابل بیان برحسب (ξ,η) ویا برحسب (x,y) است.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

که در آن $\boldsymbol{J}$ به عنوان ژاکوبین ماتریس انتقال شناخته می شود و برابر است با:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13} = 2A$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 - u_3 \\ u_2 - u_3 \end{Bmatrix}$$

به صورت مشابه:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_3 \end{Bmatrix}$$

استفاده از معادلات فوق و رابطه $\varepsilon = \mathbf{Du} = \mathbf{DNd} = \mathbf{Bd}$ می‌توان ماتریس کرنش-تغییرمکان را به دست آورد.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

کاربردهای مهم المان مثلثی خطی:

*– استفاده برای سطوحی که دارای تغییرات کم کرنش هستند.

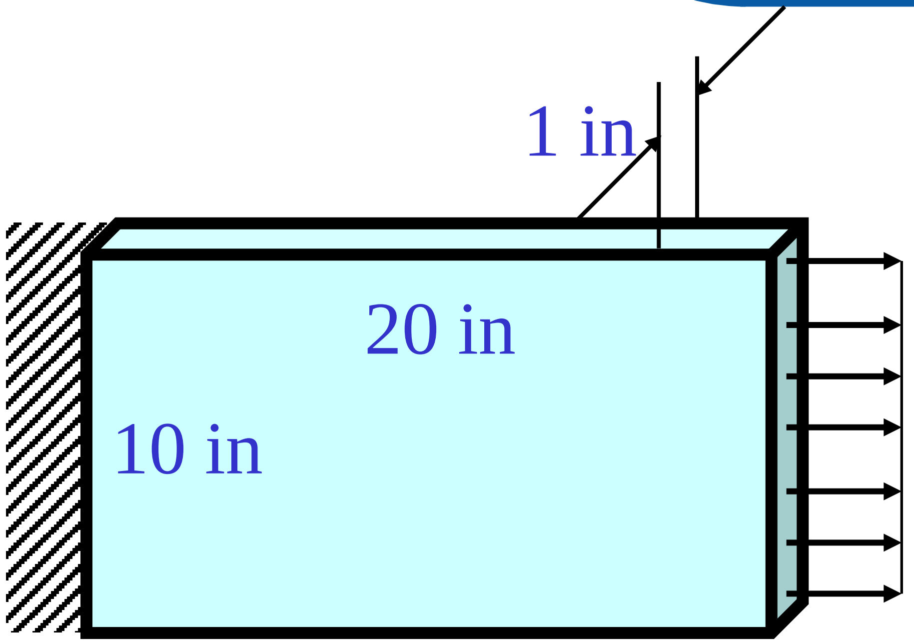
*– استفاده برای سطوحی که دارای شبکه انتقالی (از شبکه ریز به شبکه درشت) است.

*– قابل استفاده برای تخمین سریع و اولیه در مسایل دو بعدی

*– عدم استفاده در سطوحی که دارای تمرکز تنش و یا سطوح بحرانی سازه نظیر اطراف سوراخ‌ها و گوشه‌ها

المان مثلثی خطی

مثال : یک صفحه که در انتها تحت کشش قرار گرفته است.

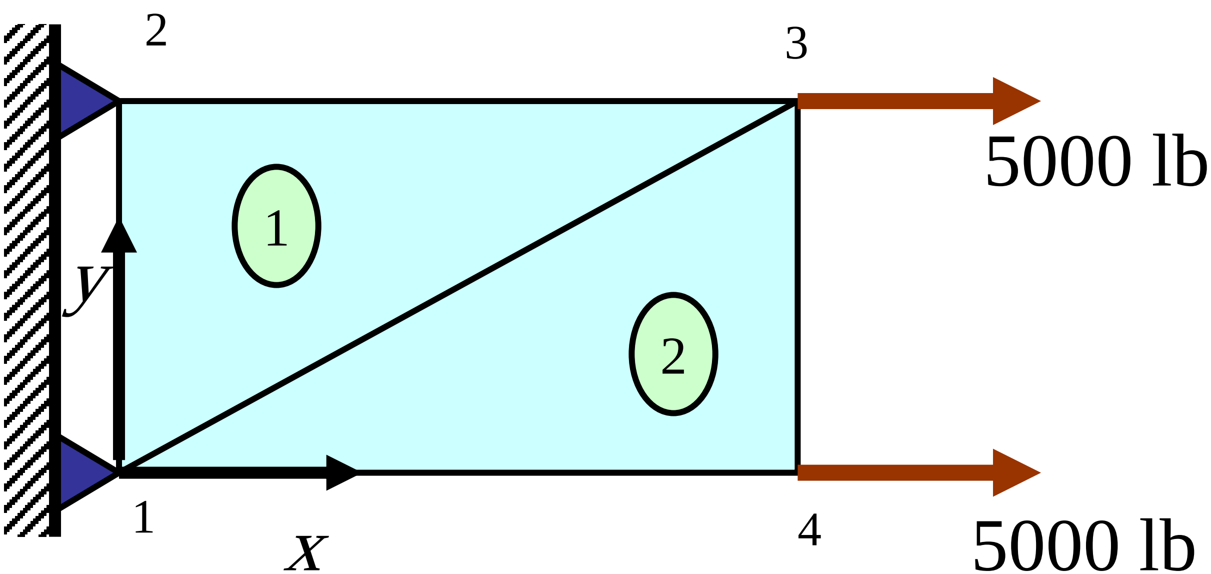


$E = 30 \times 10^6$ psi

$\nu = 0.30$

المان مثلثی خطی

مدل‌سازی مسئله با دو المان و نیروهای گره‌ای معادل



$$F = \frac{1}{2} T\ A$$

$$F = \frac{1}{2}(1000\text{ psi})(1\text{ in} \times 10\text{ in})$$

$$F = 5000\text{ lb}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه نیروها و تغییر مکان گره ها

$$[\mathrm{k}] = \mathrm{t\,A}\,[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[E][\mathrm{B}]$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{b\,h} = 100\,\mathrm{in}^2$$

$$[\mathrm{B}] = \frac{1}{2\mathrm{A}}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

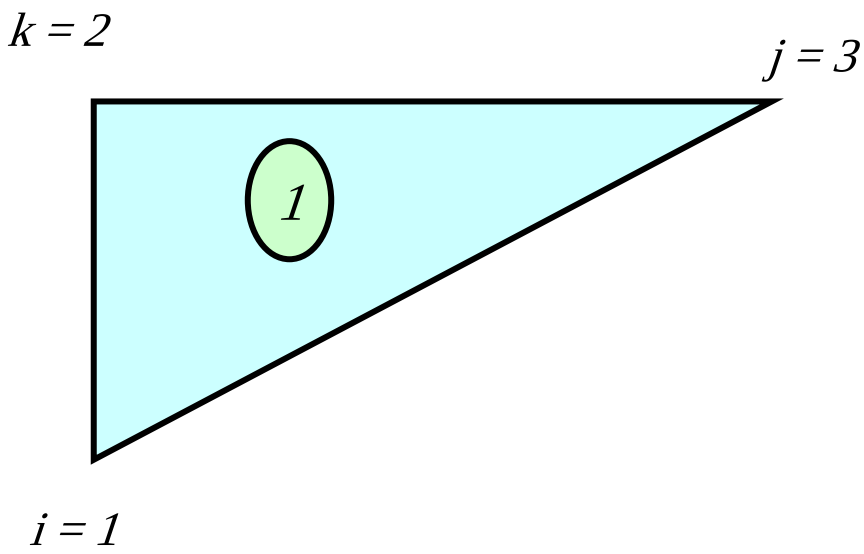
$$[E] = \frac{\mathrm{E}}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K]\{d\} = \{F\}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

المان اول



$$y_{jk} = y_j - y_k = 10 - 10 = 0$$

$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 10 = -10$$

$$x_{kj} = x_k - x_j = 0 - 20 = -20$$

$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 0 = 0$$

$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

المان اول

$$E = 30\times10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{30\times10^6 \text{ psi}}{(1-0.3^2)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.3}{2} \end{bmatrix} = \frac{30\times10^6 \text{ psi}}{(0.91)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی المان اول

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0\\ 0.3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}0 & 0 & -7\\ -6 & 20 & 0\\ 10 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3.5\\ -10 & -3 & 7\\ 6 & 20 & -3.5\end{bmatrix}$$

$$[k]=t\,A\,[B]^T[E][B]=$$

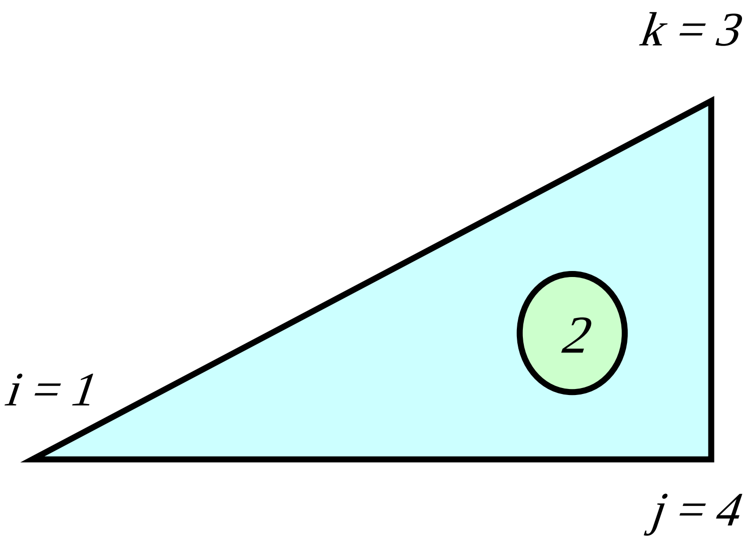
$$(1)(100)\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)^2(0.91)}\begin{bmatrix}0 & 0 & -7\\ -6 & 20 & 0\\ 10 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3.5\\ -10 & -3 & 7\\ 6 & 20 & -3.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی المان اول

$$\left[\,k^{(1)}\right]=\frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی



المان دوم

$$y_{jk} = y_j - y_k = 0 - 10 = -10$$

$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 0 = 0$$

$$x_{ki} = x_k - x_j = 20 - 20 = 0$$

$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 20 = -20$$

$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی

المان دوم

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}-10&0&10&0&0&0\\0&0&0&-20&0&20\\0&-10&-20&10&20&0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&0.3&0\\0.3&1&0\\0&0&0.35\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}-10&-3&0\\0&0&-3.5\\10&0&-20\\0&-20&10\\0&0&20\\0&20&0\end{bmatrix}$$

$$[k]=t\,A\,[B]^T[E][B]=$$

$$(1)(100)\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)^2(0.91)}\begin{bmatrix}-10&-3&0\\0&0&-3.5\\10&0&-20\\0&-20&10\\0&0&20\\0&20&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&0&10&0&0&0\\0&0&0&-20&0&20\\0&-10&-20&10&20&0\end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی

المان دوم

$$\left[k^{(2)}\right]=\frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

سوار کردن ماتریس سختی

$$[\mathbf{K}]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{k}_{11}^{(1)}+\mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)}+\mathbf{k}_{13}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ \hdashline \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & 0 \\ \hdashline \mathbf{k}_{21}^{(1)}+\mathbf{k}_{31}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)}+\mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{k}_{32}^{(2)} \\ \hdashline \mathbf{k}_{21}^{(2)} & 0 & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} \end{array}\right]$$

سوار کردن ماتریس سختی

$$[K]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} k_{11}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{13}^{(1)} & k_{12}^{(1)}+k_{13}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ \hdashline k_{31}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & 0 \\ \hdashline k_{21}^{(1)}+k_{31}^{(2)} & k_{23}^{(1)} & k_{22}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ \hdashline k_{21}^{(2)} & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{array}\right]=$$

$$\frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 & 0 & -130 & -100 & 60 \\ 0 & 435 & 60 & -400 & -130 & 0 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & 240 & -130 & -100 & 71 & 0 & 0 \\ 70 & -400 & -130 & 435 & 60 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & -130 & -100 & 60 & 240 & 0 & -140 & 70 \\ -130 & 0 & 70 & -35 & 0 & 435 & 60 & -400 \\ -100 & 70 & 0 & 0 & -140 & 60 & 240 & -130 \\ 60 & -35 & 0 & 0 & 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه

$$\begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 \\ 0 & 435 & 60 & -400 \\ -140 & 60 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 609.6 \\ 4.2 \\ 663.7 \\ 104.1 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \text{ in}$$

$\text{Compare} \quad \text{with}:$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = 670 \times 10^{-6} \text{ in}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه کرنش‌ها

در المان اول

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B]\{d\}=\frac{1}{(200)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{1y}\\ d_{3x}\\ d_{3y}\\ d_{2x}\\ d_{2y}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(200)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 609.6\times10^{-6}\text{ in}\\ 4.2\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{(200)}\begin{Bmatrix}6096\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 42\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}30.48\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 0.21\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه تنش‌ها در المان اول

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} = \frac{30\times10^6 \text{ psi}}{(0.91)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.48\times10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 0.21\times10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1005 \\ 301 \\ 2.4 \end{Bmatrix} \text{psi}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه کرنش‌ها

در المان دوم

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B]\{d\}=\frac{1}{200}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{1y}\\ d_{4x}\\ d_{4y}\\ d_{3x}\\ d_{3y}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{200}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 663.7\times10^{-6}\text{ in}\\ 104.1\times10^{-6}\text{ in}\\ 609.6\times10^{-6}\text{ in}\\ 4.2\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}$$

تنش‌ها در المان دوم

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[E]\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}995\\ -1.2\\ -2.4\end{Bmatrix}\text{psi}$$

محاسبه تنش‌های اصلی در المان دوم

Principal stresses:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min}$$

Principal angle:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

المان مثلثی خطی

Principal stresses:

محاسبه تنش‌های اصلی در المان دوم

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = \frac{995 + (-1.2)}{2} + \left[\left(\frac{995 - (-1.2)}{2} \right)^2 + (-2.4)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = 497 + 498 = 995 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{995 + (-1.2)}{2} - 498 = -1.1 \text{ psi}$$

Principal angle:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2(-2.4)}{995 - (-1.2)} \right] = 0^\circ$$

المان مثلثی خطی

مثال ۲: یک تیر که در انتها تحت خمش خالص قرار گرفته است.