

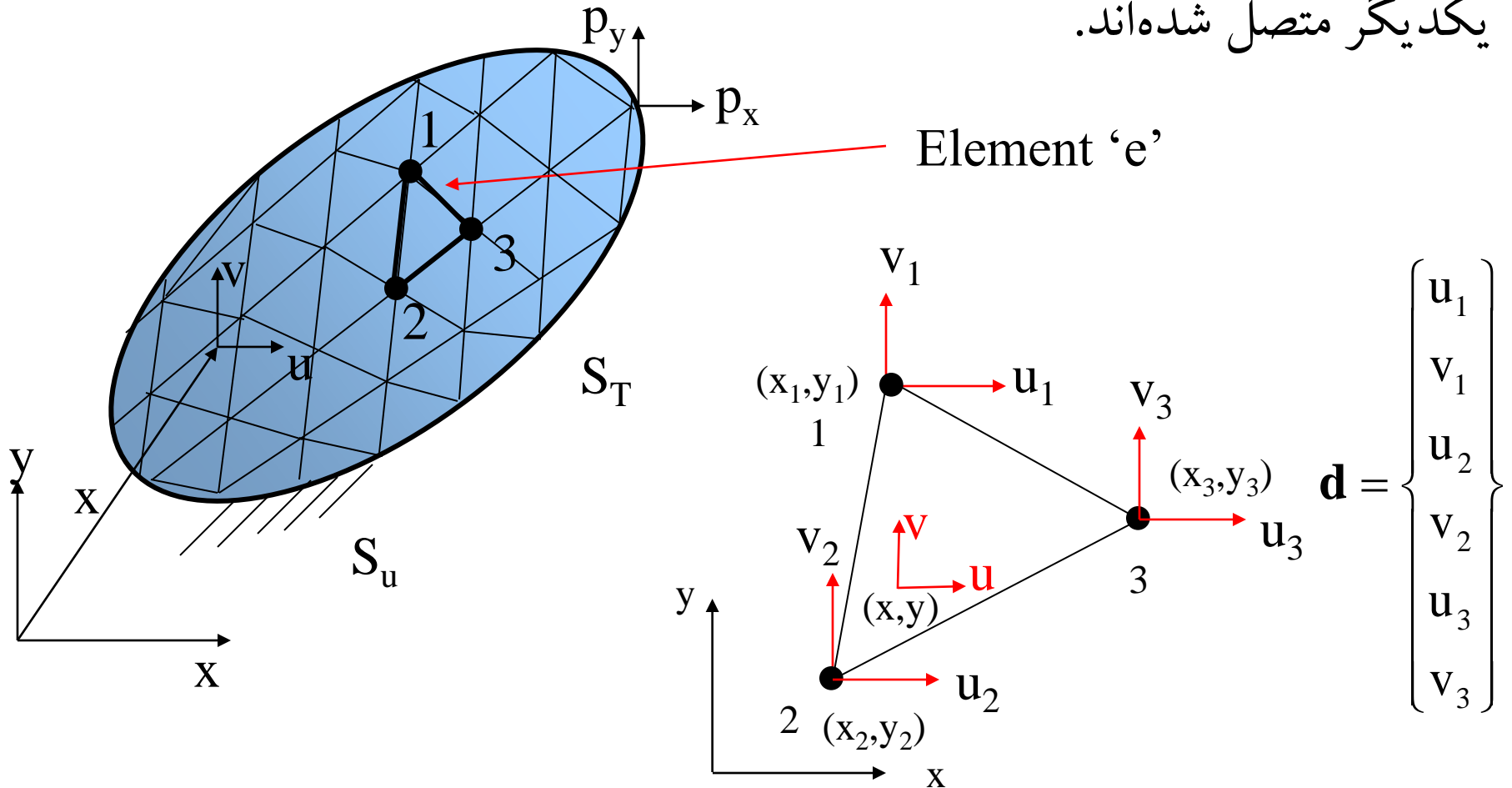


مسائل جامدات دو بعدی

Two-Dimensional Problems

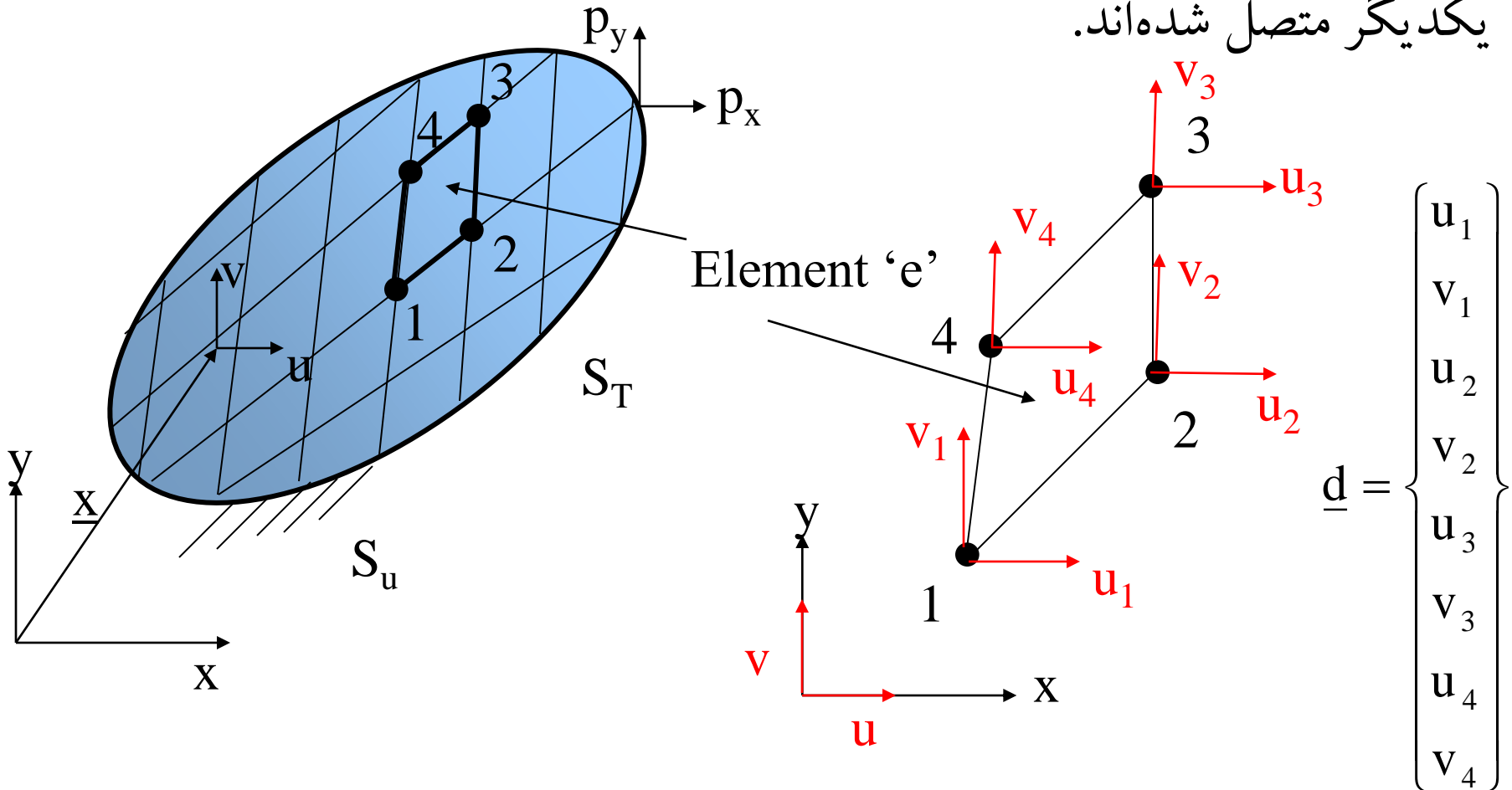
روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.



روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.



روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

تغییر مکان (u, v) برای المان صفحه‌ای به صورت درونیابی از تغییر مکان گره‌ها (u_i, v_i) توسط توابع شکل، N_i ، به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

در رابطه فوق \mathbf{N} ، ماتریس توابع شکل، \mathbf{u} بردار تغییر مکان و \mathbf{d} بردار تغییر مکان گره‌ها است.



روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

مثال: تغییر مکان (u, v) برای المان مثلثی

$$u(x,y) \approx N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$v(x,y) \approx N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & N_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{u}_{2 \times 1} = \mathbf{N}_{2 \times 6} \mathbf{d}_{6 \times 1}$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & N_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_1 & \mathbf{0} & N_2 & \mathbf{0} & N_3 \end{bmatrix}$$



روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

با توجه به رابطه کرنش - تغییر مکان خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{d}, \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

ماتریس $\mathbf{B}=\mathbf{D}\mathbf{N}$ ، ماتریس کرنش-تغییر مکان نامیده می شود.

انرژی ذخیره شده در یک المان عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} dV \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} dV \mathbf{d} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} dV
 \end{aligned}$$



روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$$

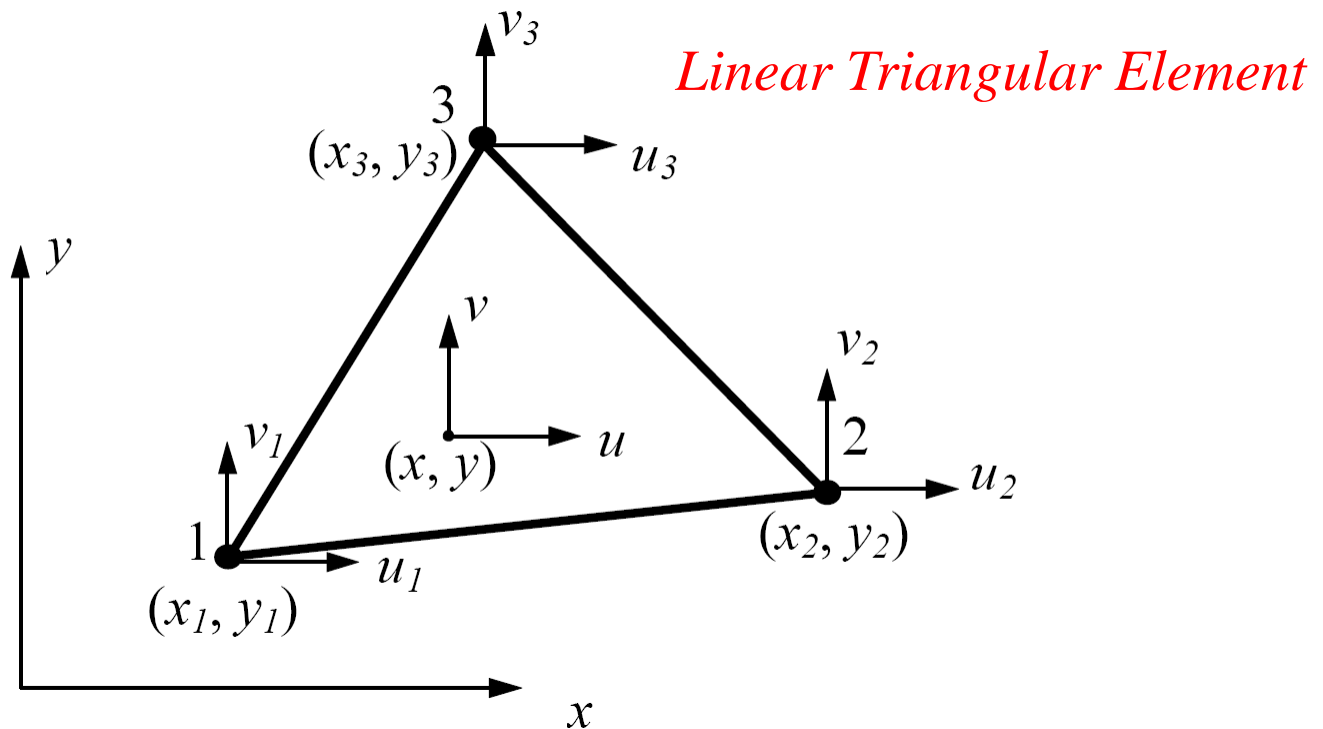
ماتریس سختی

بر خلاف حالت یک بعدی، در اینجا \mathbf{E} ، یک ماتریس است که از رابطه تنش- کرنش به دست می آید (معادلات تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای).

ماتریس \mathbf{k} یک ماتریس متقارن است زیرا ماتریس \mathbf{E} ، متقارن است. برای یک ماده با خواص مشخص، ماتریس \mathbf{k} بستگی کامل به ماتریس \mathbf{B} و در نتیجه به توابع شکل دارد. بنابراین دقت روش اجزای محدود برای بررسی سازه به انتخاب توابع شکل برمی گردد.

المانهای مورد استفاده در مسایل دو بعدی المانهای مثلثی خطی و درجه دو، و المانهای مربعی خطی و درجه دو هستند.

Constant Strain Triangle (CST or T3)



در رئوس این المان سه گره وجود دارد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. هر گره دارای دو درجه آزادی (جابجایی در جهت x و y) است. تغییر مکان در داخل المان به صورت توابع خطی در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y, \quad v = b_4 + b_5 x + b_6 y \quad (*)$$

b_i ($i=1,2,\dots,6$) اعداد ثابتی هستند.

با تغییر مکان فوق مقادیر کرنش عبارت است از:

$$\varepsilon_x = b_2, \quad \varepsilon_y = b_6, \quad \gamma_{xy} = b_3 + b_5$$

که مقادیر ثابتی برای کل المان خواهد بود. از این رو المان مثلثی خطی، المان مثلثی کرنش ثابت نیز نامیده می‌شود.

$$u_1 = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1$$

$$u_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2$$

⋮

$$v_3 = b_4 + b_5 x_3 + b_6 y_3$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

تغییر مکان در گره‌ها عبارت است از:

با حل این شش معادله میتوان مقادیر b_i ($i=1,2,\dots,6$) بر حسب تغییر مکان گره‌ها و مختصات گره‌ها به دست آورد. با جایگزینی مقادیر b_i در معادله (*) خواهیم داشت:

در این رابطه توابع شکل به صورت توابعی خطی از مختصات عبارت است از:

$$N_1 = \frac{1}{2A} \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \}$$

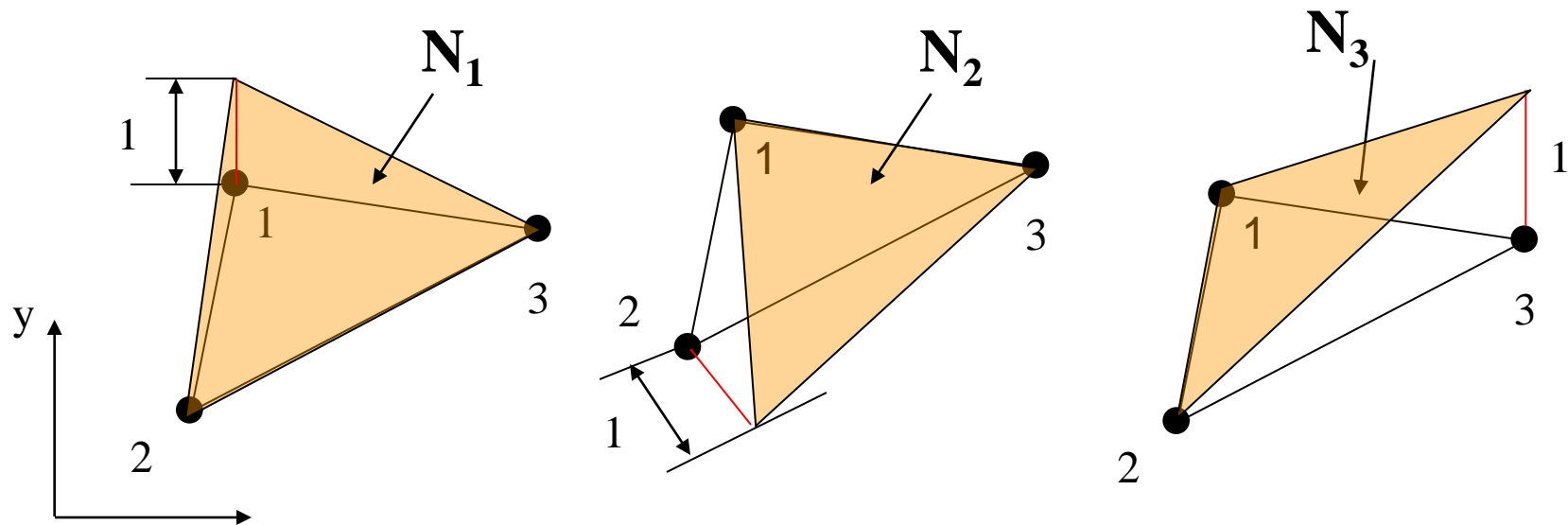
$$N_2 = \frac{1}{2A} \{ (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \{ (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \}$$

که در آن:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:



$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{at node 'i'} \\ 0 & \text{at other nodes} \end{cases}$$



المان مثلثی خطی

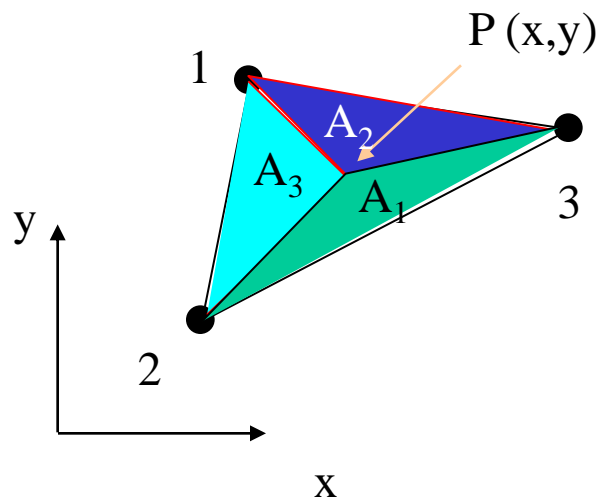
خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

$$\sum_{i=1}^3 N_i = 1$$
$$\sum_{i=1}^3 N_i x_i = x$$
$$\sum_{i=1}^3 N_i y_i = y$$

برای هر نقطه از المان:

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

برای هر نقطه از المان:



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$
$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$
$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$



المان مثلثی خطی

مقایسه کرنش عبارت است از:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

مقایر کرنش عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

که در آن $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) است.

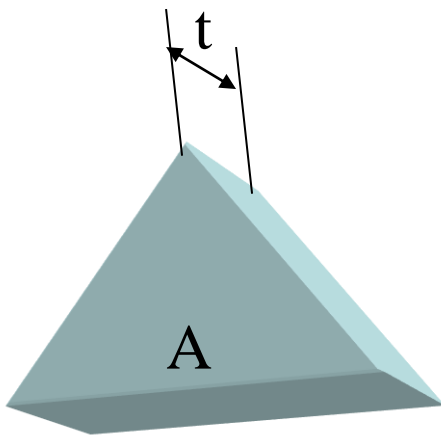
کرنشها برای کل المان مقادیر ثابتی هستند. با توجه به رابطه تنش-کرنش، تنش نیز برای

کل المان ثابت خواهد بود.

$$\sigma = \mathbf{EBd}$$

❖ ماتریس سختی برای المان برابر است با:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B})$$



که یک ماتریس 6×6 متقارن خواهد بود.

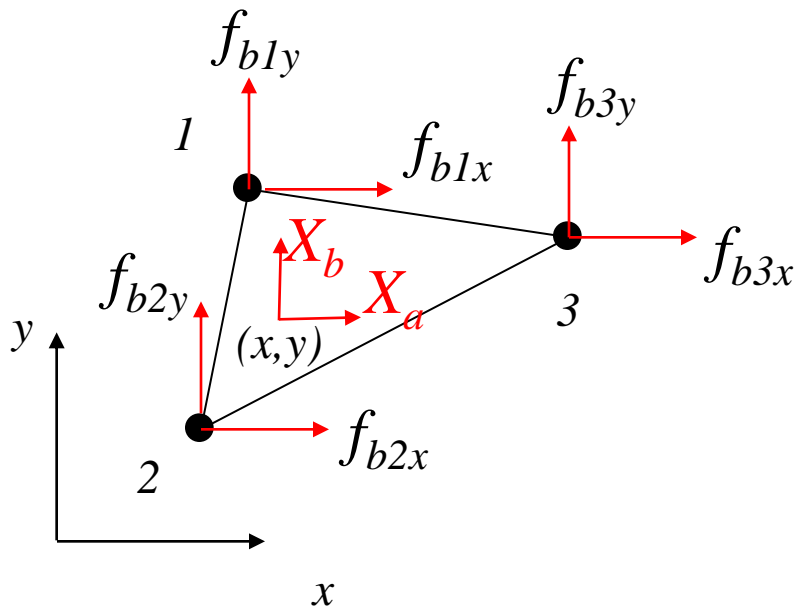
t =thickness of the element

A =surface area of the element

$$\mathbf{f} = \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_{S_{T^e}} \mathbf{N}^T \mathbf{T}_S dS}_{\mathbf{f}_s}$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV = t \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dA$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها



$$\mathbf{f}_b = \begin{Bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \\ f_{b2x} \\ f_{b2y} \\ f_{b3x} \\ f_{b3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \int_{A^e} N_1 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_1 X_b dA \\ t \int_{A^e} N_2 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_2 X_b dA \\ t \int_{A^e} N_3 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_3 X_b dA \end{Bmatrix}$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

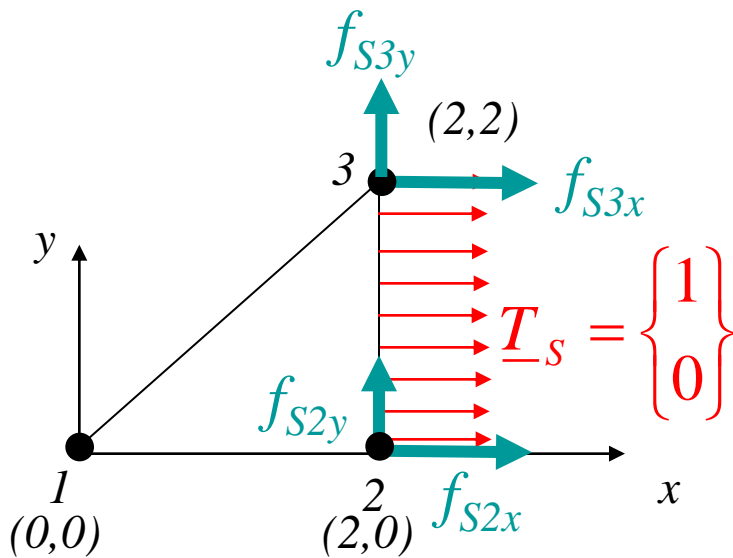
مثال

If $X_a=1$ and $X_b=0$

$$f_b = \begin{Bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \\ f_{b2x} \\ f_{b2y} \\ f_{b3x} \\ f_{b3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \int_{A^e} N_1 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_1 X_b dA \\ t \int_{A^e} N_2 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_2 X_b dA \\ t \int_{A^e} N_3 X_a dA \\ t \int_{A^e} N_3 X_b dA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \int_{A^e} N_1 dA \\ 0 \\ t \int_{A^e} N_2 dA \\ 0 \\ t \int_{A^e} N_3 dA \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{tA}{3} \\ 0 \\ \frac{tA}{3} \\ 0 \\ \frac{tA}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_S = \int_{S_T^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T}_S dS$$

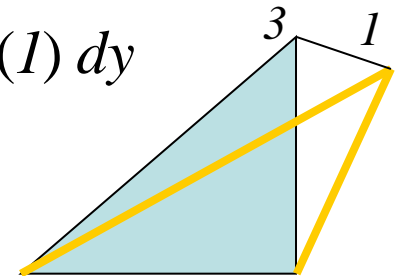
❖ نیروهای معادل در گره‌ها



مثال

$$\mathbf{f}_S = t \int_{l_{2-3}^e} \mathbf{N}^T \Big|_{\text{along } 2-3} \mathbf{T}_S dS$$

$$\begin{aligned} f_{S_{3x}} &= t \int_{l_{2-3}^e} N_3 \Big|_{\text{along } 2-3} (1) dy \\ &= t \left(\frac{1}{2} \right) \times 2 \times 1 = t \end{aligned}$$



Similarly, compute

$$f_{S_{2x}} = t$$

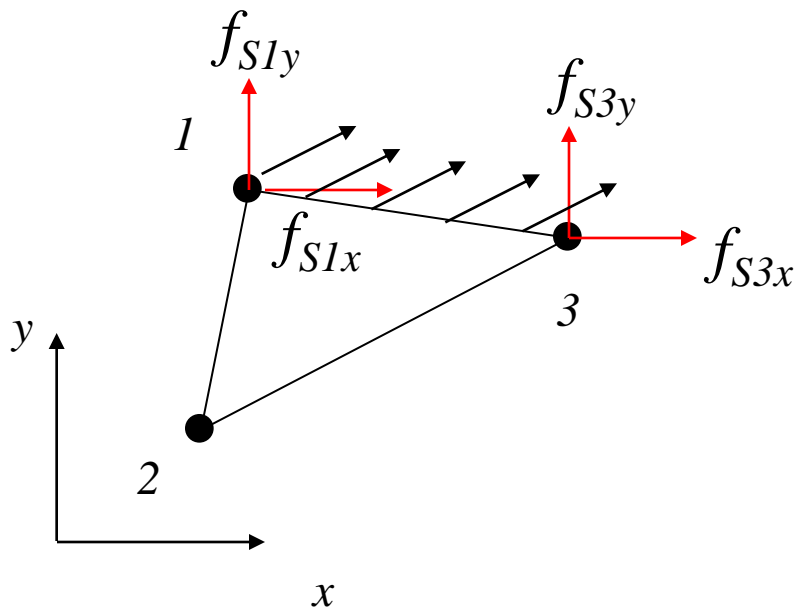
$$f_{S_{2y}} = 0$$

$$f_{S_{3y}} = 0$$

$$\mathbf{f}_S = \int_{S_T^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T}_S dS$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

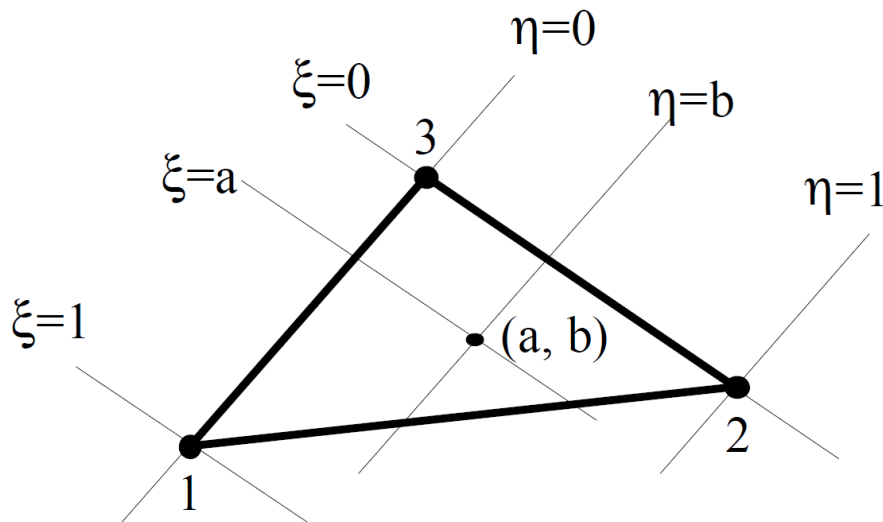
تمرین:



$$\mathbf{f}_S = t \int_{l_{1-3}^e} \mathbf{N}^T \Big|_{along 1-3} \mathbf{N}_S dS$$

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

برای مختصات طبیعی (ξ, η) می توان توابع شکل به صورت زیر تعریف نمود:

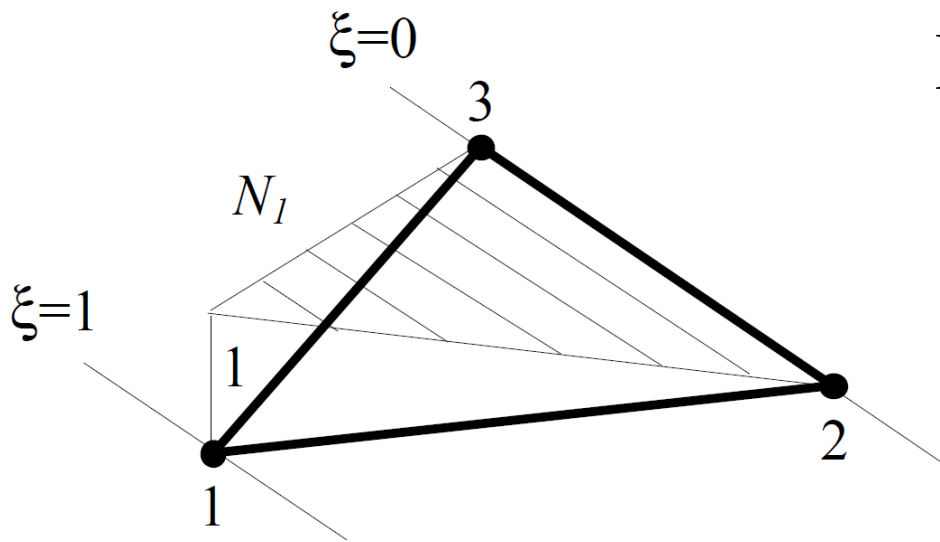


$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

در این صورت:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی



$$N_i = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

در نقطه i :
در نقاط دیگر:



المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

در اینجا دو دستگاه مختصات داریم: یکی مختصات طبیعی (ξ, η) که محلی است و دیگری دستگاه سراسری (x, y) . رابطه این دو عبارت است از:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x_{13} \xi + x_{23} \eta + x_3 \\ y &= y_{13} \xi + y_{23} \eta + y_3 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j \\ y_{ij} &= y_i - y_j \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

تغییر مکان (u, v) در داخل المان قابل بیان بر حسب (ξ, η) و یا بر حسب (x, y) است.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

که در آن \mathbf{J} به عنوان ژاکوبین ماتریس انتقال شناخته می‌شود و برابر است با:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} = 2A$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_3 \\ u_2 - u_3 \end{Bmatrix}$$

به صورت مشابه:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_3 \end{Bmatrix}$$

استفاده از معادلات فوق و رابطه $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$ می توان ماتریس کرنش-تغییر مکان را به دست آورد.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

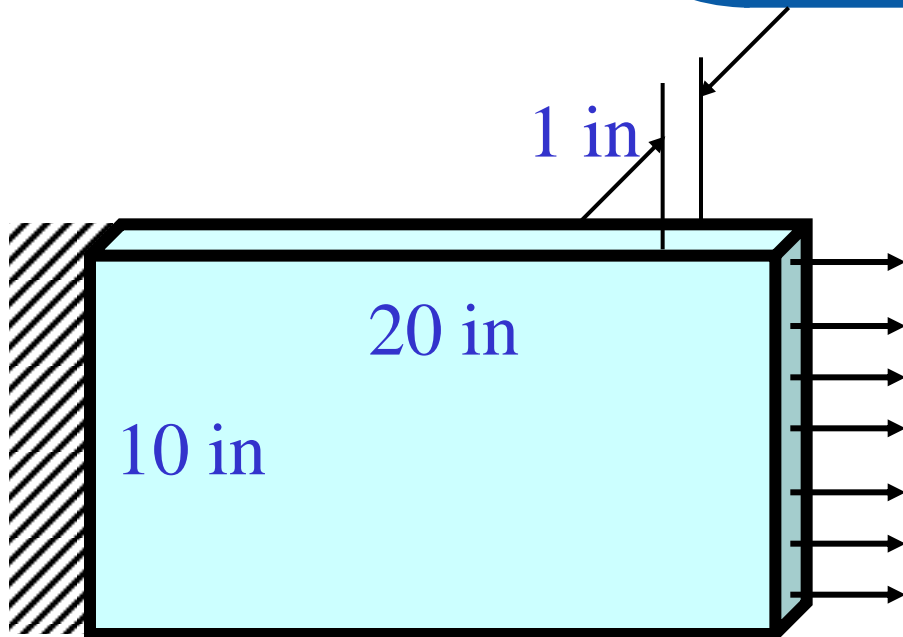
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

کاربردهای مهم المان مثلثی خطی:

- *- استفاده برای سطوحی که دارای تغییرات کم کرنش هستند.
- *- استفاده برای سطوحی که دارای شبکه انتقالی (از شبکه ریز به شبکه درشت) است.
- *- قابل استفاده برای تخمین سریع و اولیه در مسایل دو بعدی
- *- عدم استفاده در سطوحی که دارای تمرکز تنش و یا سطوح بحرانی سازه نظیر اطراف سوراخها و گوشهها

المان مثلثی خطی

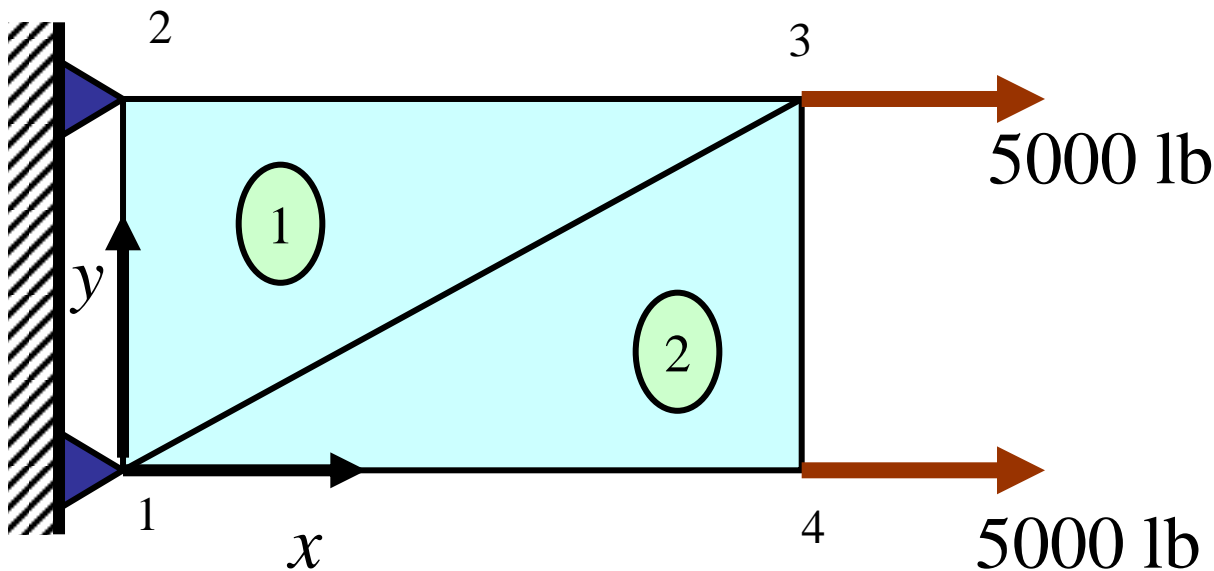
مثال: یک صفحه که در انتها
تحت کشش قرار گرفته است.



$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.30$$

مدل سازی مسئله با دو المان و نیروهای گره‌ای معادل



$$F = \frac{1}{2} T A$$

$$F = \frac{1}{2} (1000 \text{ psi}) (1 \text{ in} \times 10 \text{ in})$$

$$F = 5000 \text{ lb}$$

محاسبه نیروها و تغییر مکان گره ها

$$[k] = t A [B]^T [E] [B]$$

$$A = \frac{1}{2} b h = 100 \text{ in}^2$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

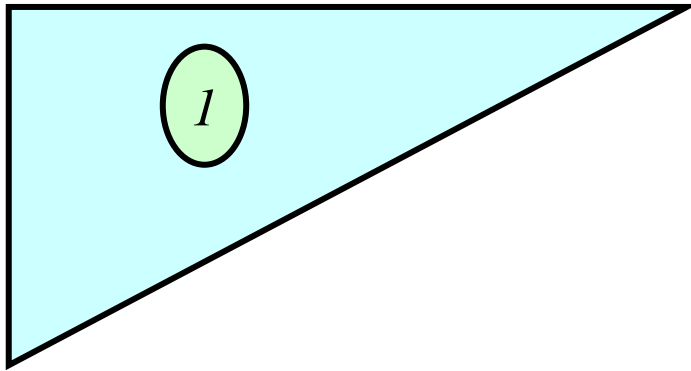
$$[K]\{d\} = \{F\}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

المان اول

$k = 2$

$j = 3$



$i = 1$

$$y_{jk} = y_j - y_k = 10 - 10 = 0$$

$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 10 = -10$$

$$x_{kj} = x_k - x_j = 0 - 20 = -20$$

$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 0 = 0$$

$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$



المان اول

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(1-0.3^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.3}{2} \end{bmatrix} = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(0.91)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$



المان مثلثی خطی

$$[B]^T [E] = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)(0.91)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان اول

$$[B]^T [E] = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)(0.91)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & 20 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \\ -10 & -3 & 7 \\ 6 & 20 & -3.5 \end{bmatrix}$$

$$[k] = t A [B]^T [E] [B] =$$

$$(1)(100) \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)^2 (0.91)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -6 & 20 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \\ -10 & -3 & 7 \\ 6 & 20 & -3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

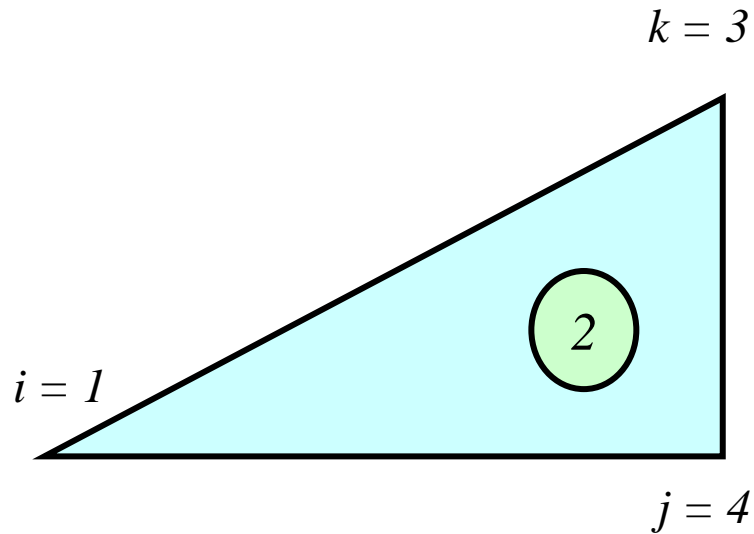


المان مثلثی خطی

ماتریس سختی المان اول

$$[k^{(1)}] = \frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

المان دوم



$$y_{jk} = y_j - y_k = 0 - 10 = -10$$

$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 0 = 0$$

$$x_{ki} = x_k - x_j = 20 - 20 = 0$$

$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 20 = -20$$

$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی
المان دوم

$$[B]^T [E] = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)(0.91)} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$[B]^T [E] = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)(0.91)} \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k] = t A [B]^T [E] [B] =$$

$$(1)(100) \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(200)^2 (0.91)} \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$



المان مثلثی خطی

ماتریس سختی

المان دوم

$$[k^{(2)}] = \frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

سوار کردن ماتریس سختی

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} + \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} + \mathbf{k}_{13}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} + \mathbf{k}_{31}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{k}_{32}^{(2)} \\ \mathbf{k}_{21}^{(2)} & 0 & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$



المان مثلثی خطی

سوار کردن ماتریس سختی

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{13}^{(1)} & k_{12}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{23}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 & 0 & -130 & -100 & 60 \\ 0 & 435 & 60 & -400 & -130 & 0 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & 240 & -130 & -100 & 71 & 0 & 0 \\ 70 & -400 & -130 & 435 & 60 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & -130 & -100 & 60 & 240 & 0 & -140 & 70 \\ -130 & 0 & 70 & -35 & 0 & 435 & 60 & -400 \\ -100 & 70 & 0 & 0 & -140 & 60 & 240 & -130 \\ 60 & -35 & 0 & 0 & 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه

$$\begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 \\ 0 & 435 & 60 & -400 \\ -140 & 60 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 609.6 \\ 4.2 \\ 663.7 \\ 104.1 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \text{ in}$$

Compare with :

$$\delta = \frac{PL}{AE} = 670 \times 10^{-6} \text{ in}$$

محاسبه کرنش‌ها
در المان اول

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B]\{d\} = \frac{1}{(200)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(200)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 609.6 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 4.2 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(200)} \begin{Bmatrix} 6096 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 42 \times 10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.48 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 0.21 \times 10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix}$$



المان مثلثی خطی

محاسبه تنش‌ها در المان اول

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} = \frac{30 \times 10^6 \text{ psi}}{(0.91)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.48 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 0.21 \times 10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1005 \\ 301 \\ 2.4 \end{Bmatrix} \text{ psi}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B]\{d\} = \frac{1}{200} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{Bmatrix}$$

محاسبه کرنش‌ها
در المان دوم

$$= \frac{1}{200} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 663.7 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 104.1 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 609.6 \times 10^{-6} \text{ in} \\ 4.2 \times 10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} 995 \\ -1.2 \\ -2.4 \end{Bmatrix} \text{ psi}$$

تنش‌ها در المان دوم

Principal stresses:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min}$$

محاسبه تنش‌های

اصلی در المان دوم

Principal angle:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Principal stresses:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

محاسبه تنش های
اصلی در المان دوم

$$\sigma_1 = \frac{995 + (-1.2)}{2} + \left[\left(\frac{995 - (-1.2)}{2} \right)^2 + (-2.4)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = 497 + 498 = 995 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{995 + (-1.2)}{2} - 498 = -1.1 \text{ psi}$$

Principal angle:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2(-2.4)}{995 - (-1.2)} \right] = 0^\circ$$

مثال ۲: یک تیر که در انتها تحت خمش خالص قرار گرفته است.

