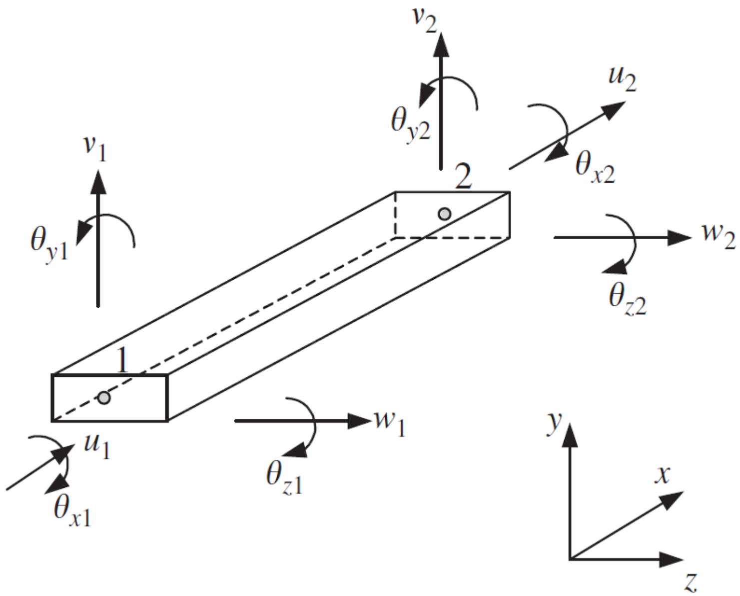
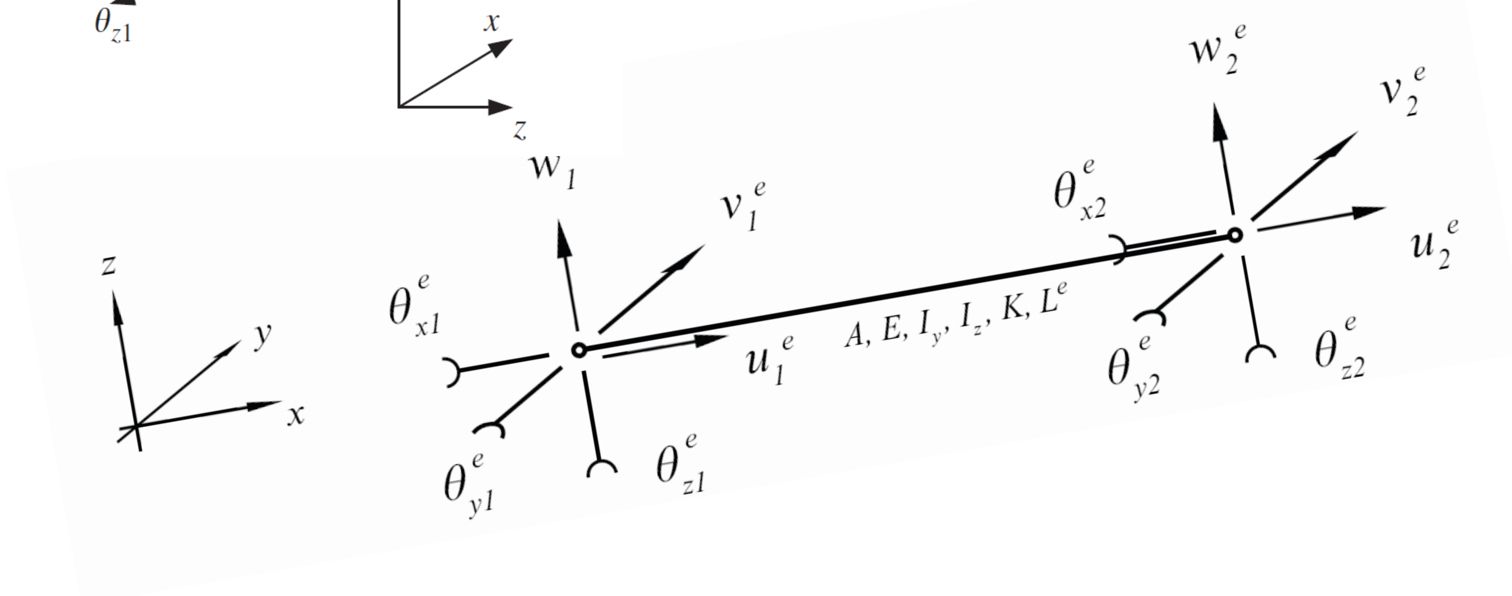
المان تیر (ادامه)

A 3D 12-freedom beam element defined in a local system



u_1, v_1, w_1 : Translation at node 1 in x, y and z directions

$\Theta_{x1}, \Theta_{y1}, \Theta_{z1}$, : Rotation at node 1 in x, y and z directions



ماتریس سختی:

$$\{\ u_1^e \quad v_1^e \quad w_1^e \quad \theta_{x1}^e \quad \theta_{y1}^e \quad \theta_{z1}^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad w_2^e \quad \theta_{x2}^e \quad \theta_{y2}^e \quad \theta_{z2}^e\ \}$$

$$\boldsymbol{k}' = \begin{bmatrix} AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & b_z & 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & b_z \\ 0 & 0 & a_y & 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & -a_y & 0 & -b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & d_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & c_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & d_z \\ -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z \\ 0 & 0 & -a_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & a_y & 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & d_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & d_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$$

المان تیر-میله در فضای سه بعدی

که در آن:

$$AS = \frac{AE}{L}\ ,\ \ TS = \frac{GJ}{L}$$

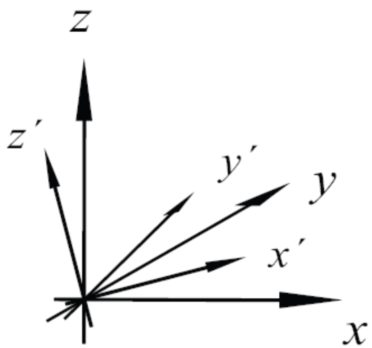
$$a_z = \frac{12EI_z}{L^3},\ b_z = \frac{6EI_z}{L^2},\ c_z = \frac{4EI_z}{L},\ d_z = \frac{2EI_z}{L}$$

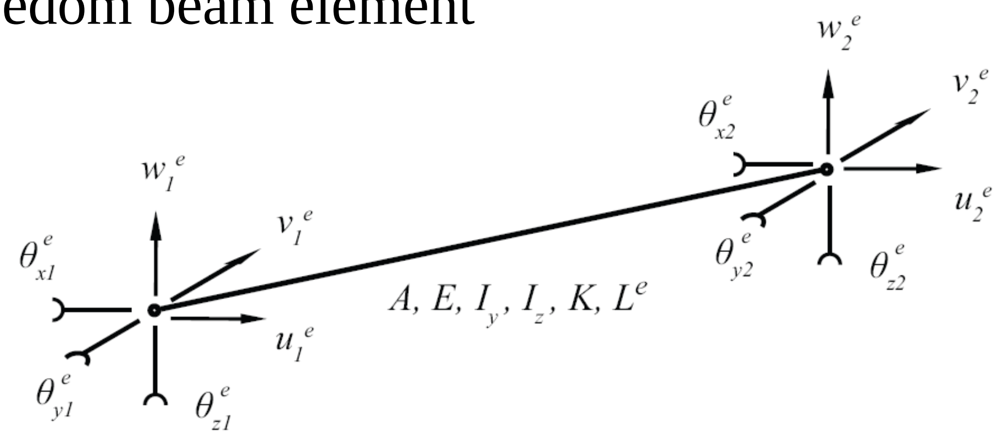
$$a_y = \frac{12EI_y}{L^3},\ b_y = \frac{6EI_y}{L^2},\ c_y = \frac{4EI_y}{L},\ d_y = \frac{2EI_y}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

G is the torsional modulus of the material and J is the torsional proportional constant for the cross section.

A 3D global 12-freedom beam element





ماتریس انتقال:

$$k'u' = f' \xrightarrow[f'=Tf]{u'=Tu} k'Tu = Tf \xrightarrow{T^T \times} T^T k' T u = f$$

$$k = T^T k' T$$

المان تیر-میله در فضای سه بعدی

A 3D global 12-freedom beam element

$$\mathrm{k} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}} \mathrm{k}' \mathrm{T}$$

ماتریس انتقال:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \lambda = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

Direction cosines in λ:

که در آن:

$$l_x = \cos(x', x), \quad m_x = \cos(x', y), \quad n_x = \cos(x', z)$$

$$l_y = \cos(y', x), \quad m_y = \cos(y', y), \quad n_y = \cos(y', z)$$

$$l_z = \cos(z', x), \quad m_z = \cos(z', y), \quad n_z = \cos(z', z)$$

المان تیر-میله در فضای سه بعدی

مولفه های ماتریس انتقال:

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m_x = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad n_x = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{kl} &= x_k - x_l \\ y_{kl} &= y_k - y_l \\ z_{kl} &= z_k - z_l \end{aligned} \right\} \quad k, l = 1, 2, 3$$

$$l_z = \frac{1}{2A_{123}}(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})$$

$$m_z = \frac{1}{2A_{123}}(z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})$$

$$n_z = \frac{1}{2A_{123}} + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$$

$$l_y = m_z n_x - n_z m_x$$

$$m_y = n_z l_x - l_z n_x$$

$$n_y = l_z m_x - m_z l_x$$

$$A_{123} = \sqrt{(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})^2 + (z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})^2 + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})^2}$$

If a distributed load with components w_y, w_z is applied on the element Then the equivalent point loads at the ends of the member are:

$$f' = [0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{-w_z L^2}{12}, \frac{w_y L^2}{12}, 0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{w_z L^2}{12}, \frac{-w_y L^2}{12}]^T$$

$$f = \boldsymbol{T}^T f'$$

Input data for beam-bar elements:

- (X, Y, Z) for each node
- E , A, G, J, I_z, I_y for each element in local coordinates

Calculate:

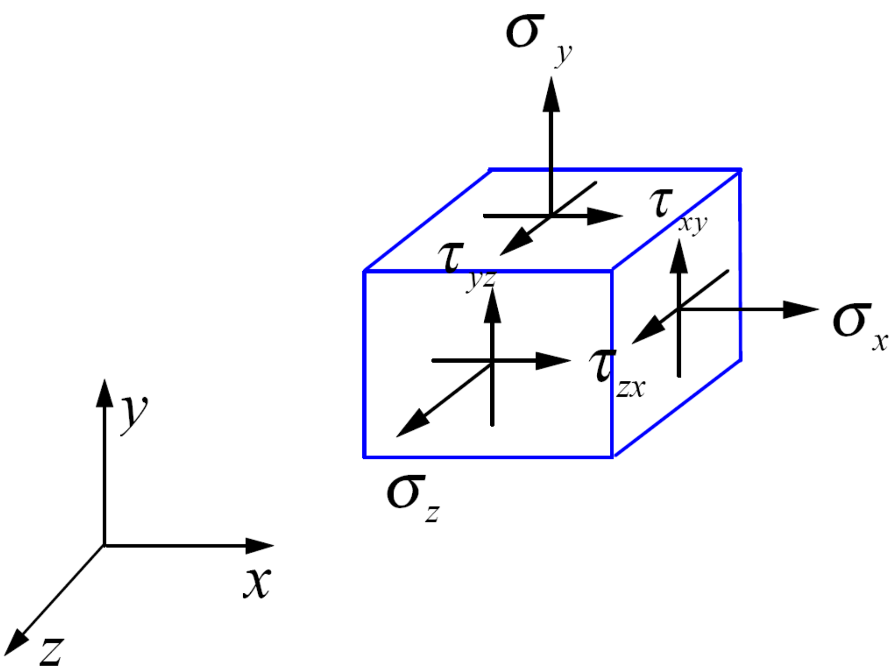
- The directional cosines
- The element stiffness matrix in global coordinates
- The element force vector in global coordinates
- Assemble the stiffness matrices to obtain the global stiffness matrix
- Assemble the load vectors to obtain the global load vector
- Solve the final equation to obtain the displacement at different nodes

مسایل جامدات دو بعدی

Two-Dimensional Problems

مروری بر تئوری پایه جامدات

در حالت کلی هر المان دارای شش مولفه تنش و کرنش است:



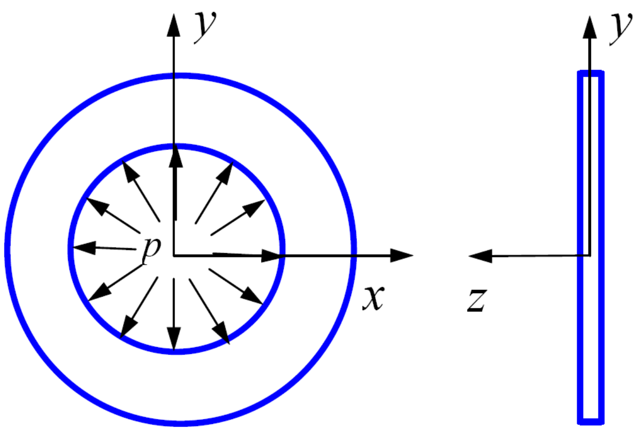
برای تنش: $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{xy} , \tau_{yz} , \tau_{zx}$

برای کرنش: $\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} , \gamma_{yz} , \gamma_{zx}$

مروری بر تئوری پایه جامدات

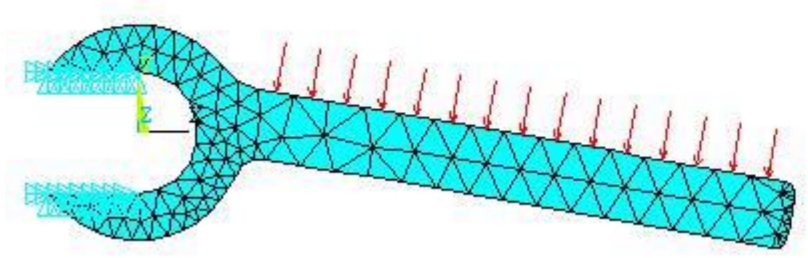
در شرایط خاص و برای حالت هایی از تنش و کرنش؛ می‌توان مسایل جامدات را با ساده‌سازی از حالت سه بعدی به دو بعدی تبدیل نمود.

Plane stress: $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (\varepsilon_z \neq 0)$

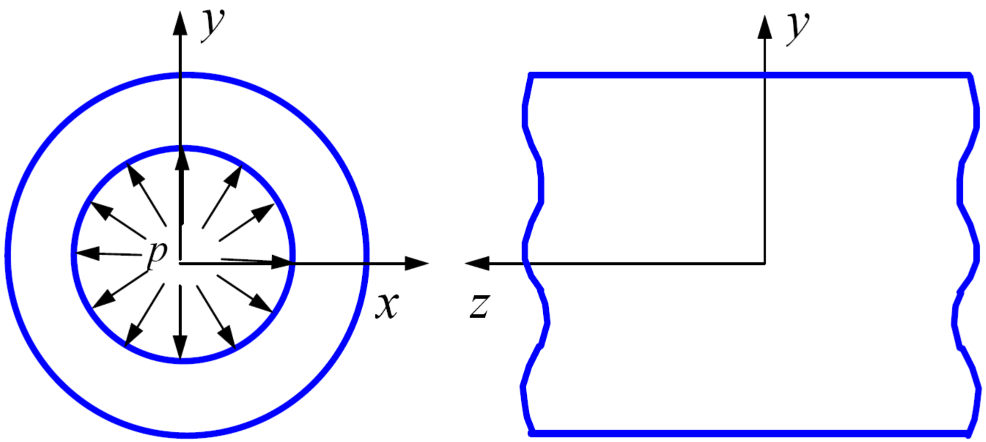


تنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی صفحه‌ای با ضخامت کم و ثابت؛ در صورتی که بارگذاری در همان صفحه xy صورت گیرد.

مثال:

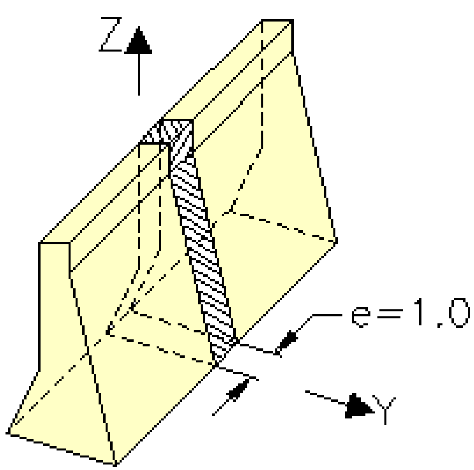


plane strain: $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (\sigma_z \neq 0)$



کرنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی با ضخامت زیاد (طویل) و سطح مقطع یکنواخت؛ در صورتی که بارگذاری در راستای ضخامت (راستای Z) صورت گیرد.

مثال:



Plane stress: برای مسایل تنش صفحه‌ای الاستیک در یک سازه همسان:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0$$

ε_0، کرنش اولیه، E مدول الاستیسیته یانگ، νنسبت پواسون و G مدول برشی است.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

which means that there are only two independent materials constants for ***homogeneous*** and ***isotropic*** materials.

Plane stress: می‌توان تنش‌ها را بر حسب کرنشها نیز از معادله قبل بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right) \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}_0$$

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

رابطه فوق برای حالت تنش صفحه‌ای برقرار است. در حالت کرنش صفحه‌ای لازم است مقادیر ثابت در معادلات بالا با مقادیر زیر جایگزین شوند:

$$E\rightarrow\frac{E}{1-\nu^2}\qquad \nu\rightarrow\frac{\nu}{1-\nu}\qquad G\rightarrow G$$

مروری بر تئوری پایه جامدات

برای رابطه تنش‌ها بر حسب کرنشها در حالت کرنش صفحه‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right)$$

plane strain

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

کرنشهای اولیه به واسطه تغییرات درجه حرارت برابر است با:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha\Delta T\\ \alpha\Delta T\\ 0\end{Bmatrix}$$

α ضریب انبساط حرارتی و ΔT تغییرات درجه حرارت است.

مروری بر تئوری پایه جامدات

روابط کرنش-تغییرمکان

برای مقادیر کوچک کرنش و دوران می توان نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

و به فرم ماتریسی:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \text{or} \quad \varepsilon = \mathbf{Du}$$

در این حالت واضح است اگر جابجایی به صورت چندجمله‌ای اختیار گردد، آنگاه درجه کرنش (و در نتیجه تنش) یک درجه کمتراز جابجایی خواهد بود.

معادلات تعادل

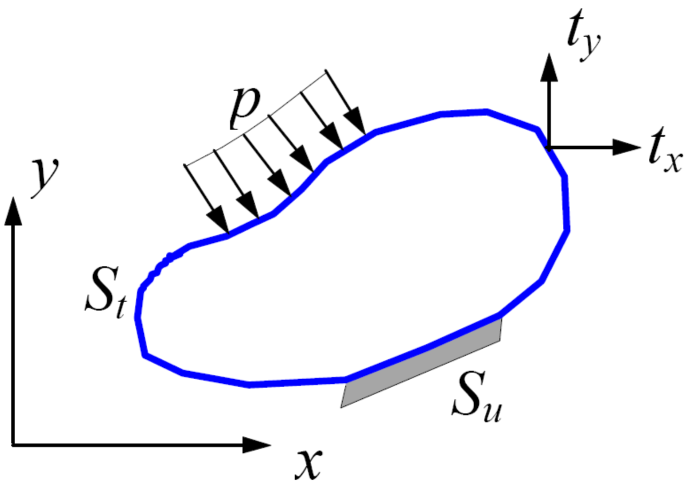
(از تئوری الاستیسیته) تنش در یک سازه باید در معادلات تعادل صدق نماید:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0$$

در این رابطه f_X و f_Y، نیروهای حجمی (نظیر نیروی وزن) است. در روش اجزای محدود معادلات تعادل به صورت تقریبی برقرار می‌شوند.

شرایط مرزی



مرز S برای یک سازه به دو قسمت S_u و S_t تقسیم می‌گردد بنابراین شرایط بر روی این دو مرز عبارت است از:

$$u=\bar{u},\quad v=\bar{v},\qquad \text{on}\ \ S_u$$

$$t_x=\bar{t}_x,\quad t_y=\bar{t}_y,\qquad \text{on}\ \ S_t$$

t_x و t_y مولفه‌های بارگذاری در مرزها (مقایر تنش در مرزها) هستند و به صورت مقادیر معلوم در مسئله وارد می‌شوند.

در روش اجزای محدود انواع بارگذاری نظیر بارهای گسترده بر روی سطوح، بارگذاری‌های حجمی، نیروهای متمرکز، گشتاورها به صورت نیروهای نقطه‌ای در گره‌ها تبدیل خواهند شد.

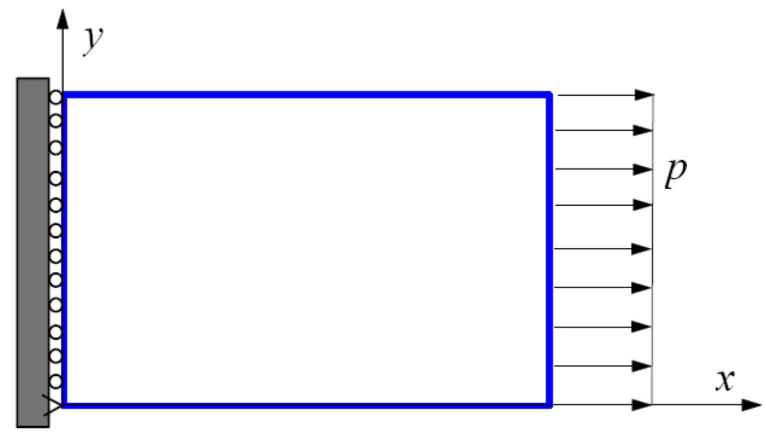
حل دقیق مسایل الاستیسیته

برای حل دقیق (تغییرمکان، کرنش و تنش) یک سازه می‌بایست معادلات تعادل برقرار گردند و همچنین شرایط مرزی و شرایط سازگاری مسئله را نیز ارضا شوند.

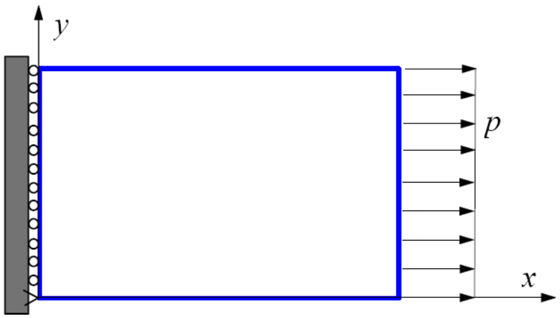
شرایط سازگاری: میدان تغییرمکان سازه باید به صورت پیوسته تغییر نماید و دارای گسستگی و همپوشانی نباشد.

Example

A plate is supported and loaded with distributed force p as shown in the figure. The material constants are E and ν.



حل دقیق مسایل الاستیسیته



حل دقیق:

- تغییرمکان:

$$u = \frac{p}{E}x, \qquad v = -\nu\frac{p}{E}y$$

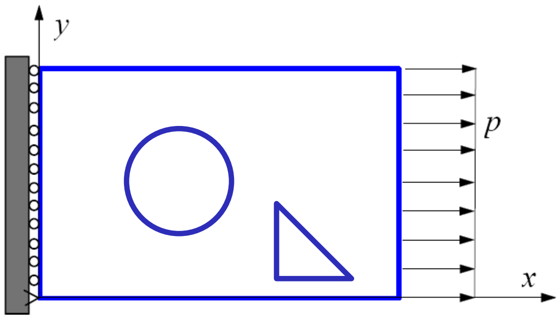
- کرنش:

$$\varepsilon_x = \frac{p}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{p}{E},$$

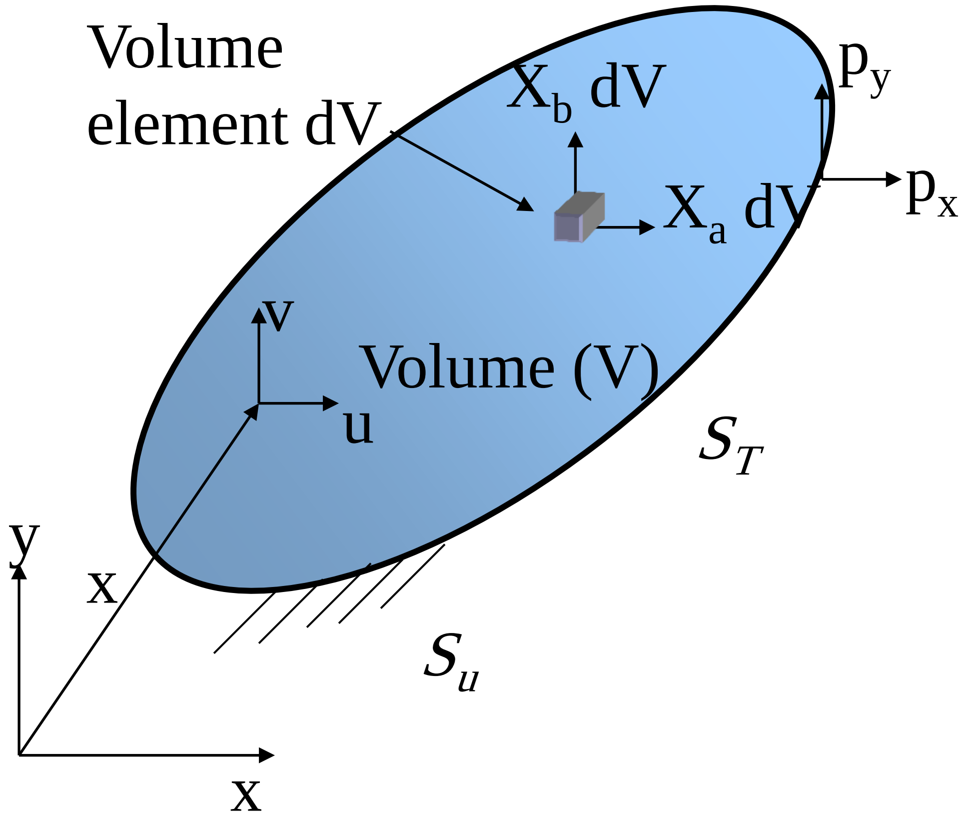
- تنش:

$$\sigma_x = p, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0$$

Exact (or analytical) solutions for *simple* problems are numbered (suppose there is a hole in the plate!). That is why we need FEM!



یادآوری: الاستیسیته



$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$W = \int_V \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{X}\, dV + \int_{S_T} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{T}_S\, dS$$

Strain energy of the elastic body

Using the stress-strain law $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

In 2D plane stress/plane strain:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

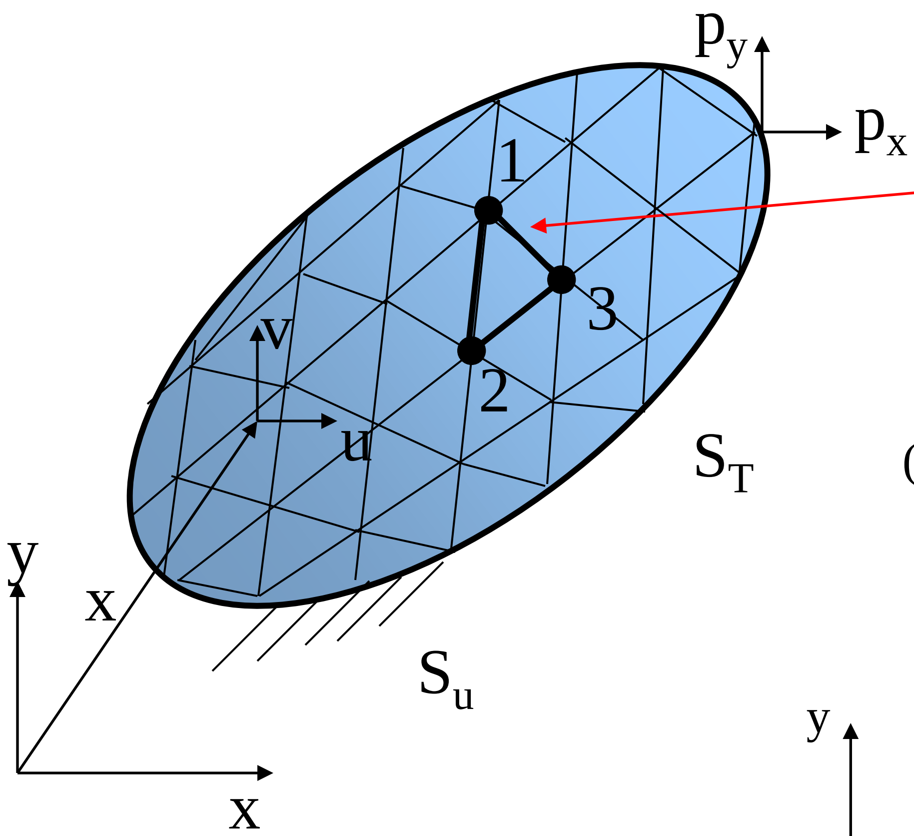
یادآوری: الاستیسیته

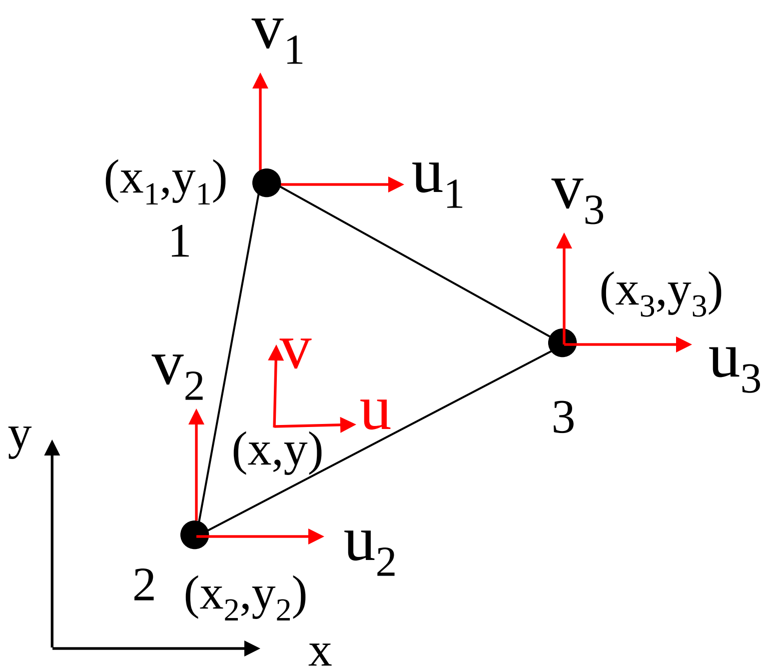
Principle of minimum potential energy: Among all **admissible** displacement fields the one that satisfies the equilibrium equations also render the potential energy Π a minimum.

“admissible displacement field”:
1. first derivative of the displacement components exist
2. satisfies the boundary conditions on S_u

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.

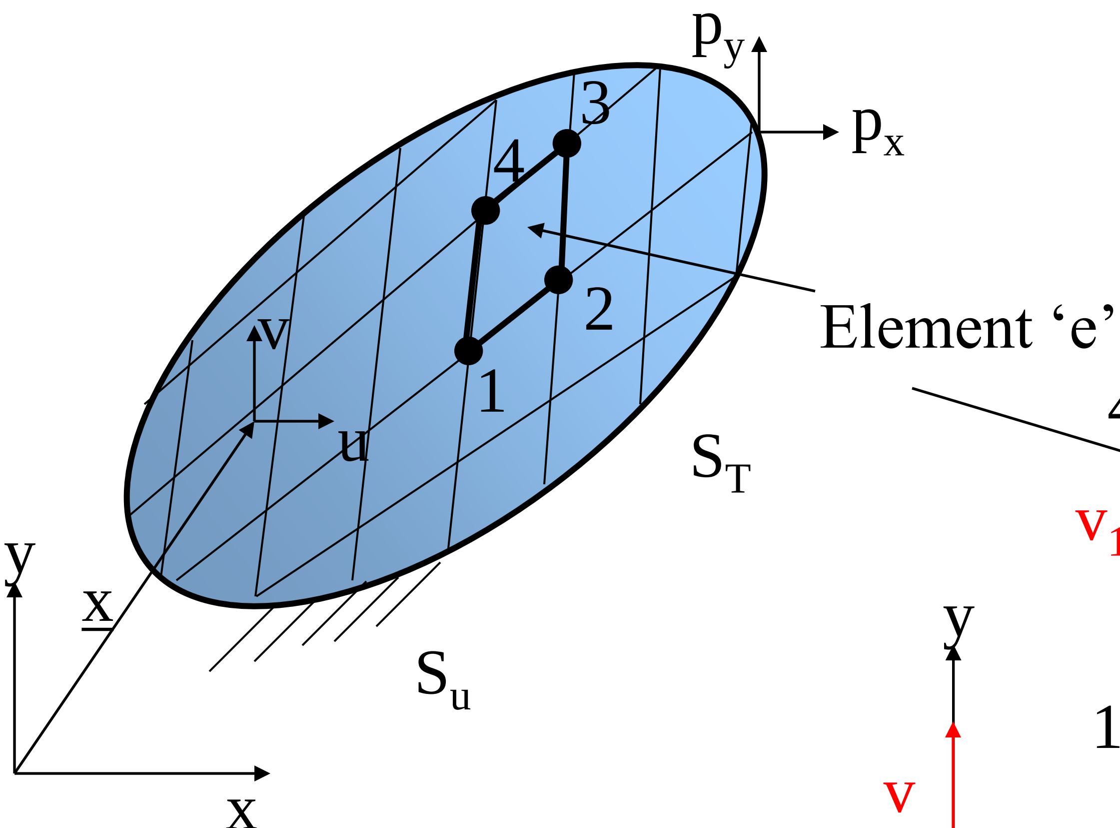


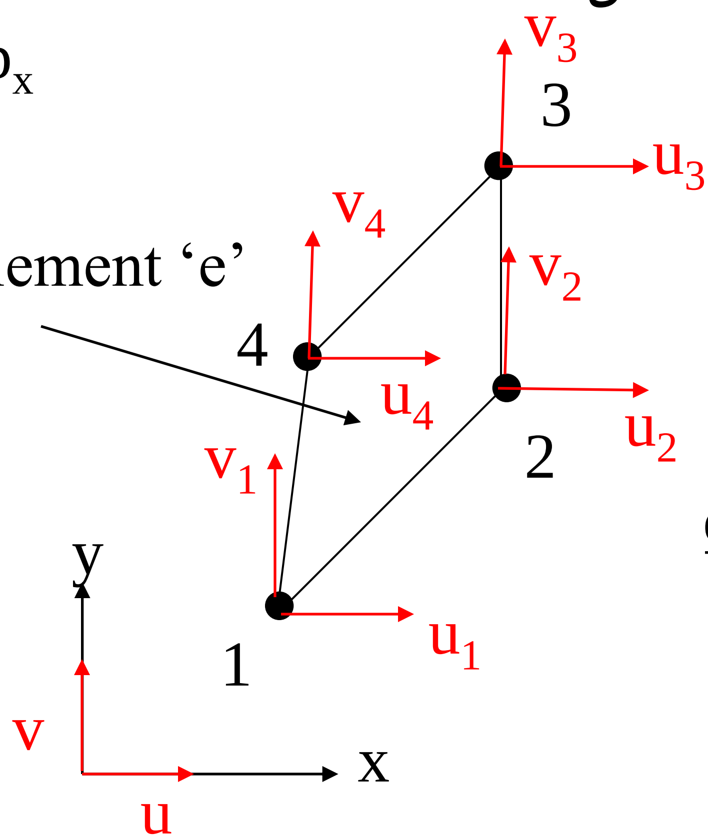


$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.





$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

تغییرمکان (u, v) برای المان صفحه‌ای به صورت درونیابی از تغییرمکان گره‌ها (u_i, v_i) توسط توابع شکل، N_i، به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

در رابطه فوق $\mathbf{N}$، ماتریس توابع شکل، $\mathbf{u}$ بردار تغییرمکان و $\mathbf{d}$ بردار تغییرمکان گره‌ها است.

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

مثال: تغییرمکان (u, v) برای المان مثلثی

$$\mathrm{u}(x,y) \approx N_1 \mathrm{u}_1 + N_2 \mathrm{u}_2 + N_3 \mathrm{u}_3$$

$$\mathrm{v}(x,y) \approx N_1 \mathrm{v}_1 + N_2 \mathrm{v}_2 + N_3 \mathrm{v}_3$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathrm{u}\,(x,y) \\ \mathrm{v}\,(x,y) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ \hdashline \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{v}_2 \\ \hdashline \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{v}_3 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_{2\times1} = \mathbf{N}_{2\times6}\,\mathbf{d}_{\,6\times1}}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 \end{bmatrix}$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

با توجه به رابطه کرنش- تغییرمکان خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \mathbf{Du} = \mathbf{DNd}, \qquad \text{or} \qquad \varepsilon = \mathbf{Bd}$$

ماتریس **B=DN**، ماتریس کرنش-تغییرمکان نامیده می‌شود.

انرژی ذخیره شده در یک المان عبارت است از:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\varepsilon)^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T \mathbf{E}\varepsilon \, dV$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{k}\mathbf{d} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

ماتریس سختی

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}\, dV$$

بر خلاف حالت یک بعدی، در اینجا **E**، یک ماتریس است که از رابطه تنش- کرنش به دست می‌آید (معادلات تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای).

ماتریس **k** یک ماتریس متقارن است زیرا ماتریس **E**، متقارن است.

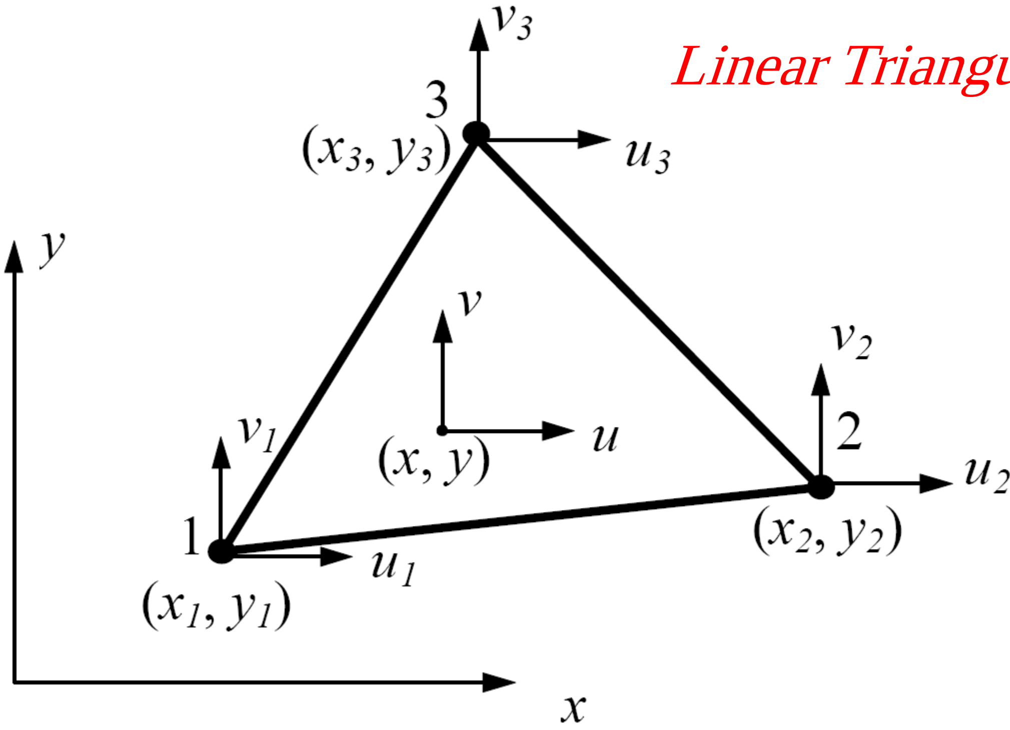
برای یک ماده با خواص مشخص، ماتریس **k** بستگی کامل به ماتریس **B** و در نتیجه به توابع شکل دارد. بنابراین دقت روش اجزای محدود برای بررسی سازه به انتخاب توابع شکل برمی گردد.

المان مثلثی خطی

المانهای مورد استفاده در مسایل دو بعدی المانهای مثلثی خطی و درجه دو، و المانهای مربعی خطی و درجه دو هستند.

Constant Strain Triangle (CST or T3)

Linear Triangular Element



المان مثلثی خطی

در رئوس این المان سه گره وجود دارد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. هر گره دارای دو درجه آزادی (جابجایی در جهت x و y) است. تغییرمکان در داخل المان به صورت توابع خطی در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y, \quad v = b_4 + b_5 x + b_6 y \qquad (*)$$

b_i $(i=1,2,\ldots 6)$ اعداد ثابتی هستند.

با تغییرمکان فوق مقادیر کرنش عبارت است از:

$$\varepsilon_x = b_2, \quad \varepsilon_y = b_6, \quad \gamma_{xy} = b_3 + b_5$$

که مقادیر ثابتی برای کل المان خواهد بود. از این رو المان مثلثی خطی، المان مثلثی کرنش ثابت نیز نامیده می‌شود.

المان مثلثی خطی

تغییرمکان در گره‌ها عبارت است از:

$$u_1 = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1$$
$$u_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2$$
$$\vdots$$
$$v_3 = b_4 + b_5 x_3 + b_6 y_3$$

با حل این شش معادله میتوان مقادیر b_i $(i=1,2,\ldots6)$ برحسب تغییرمکان گره‌ها و مختصات گره‌ها به دست آورد. با جایگزینی مقادیر b_i در معادله (*) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

در این رابطه توابع شکل به صورت توابعی خطی از مختصات عبارت است از:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\}$$

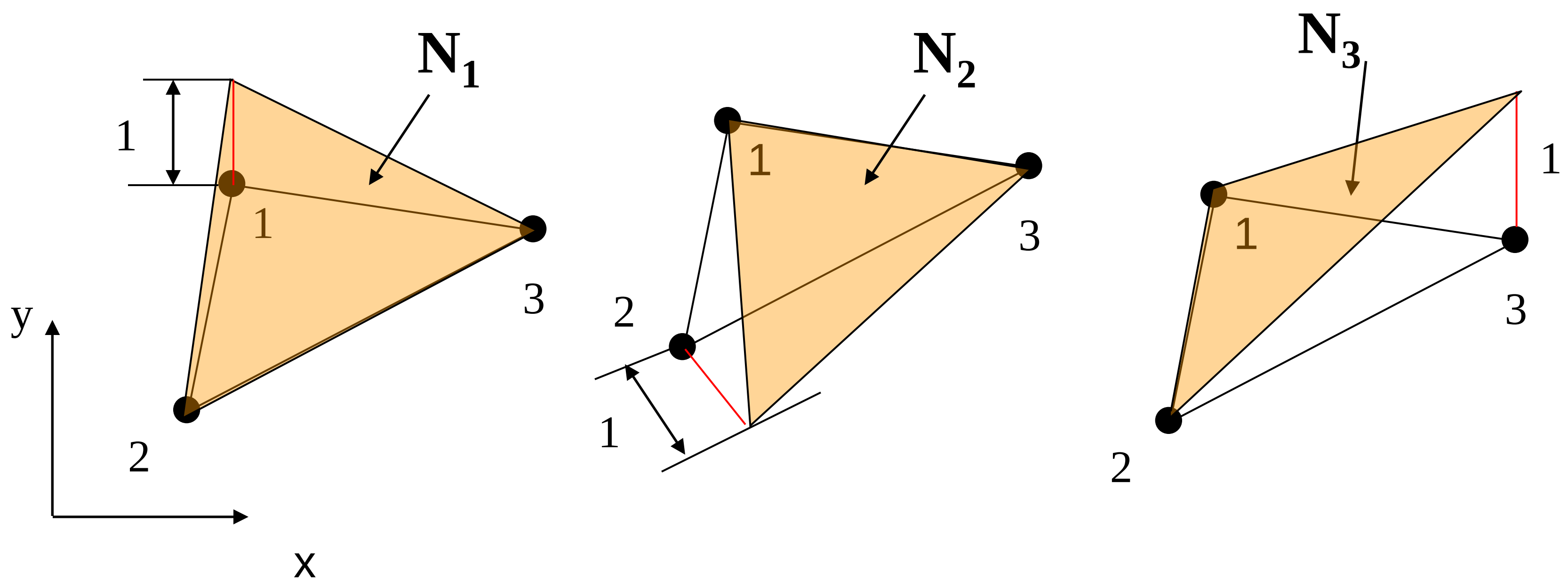
$$N_3 = \frac{1}{2A}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}$$

که در آن:

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:



$$N_i = \begin{cases} 1 & at\ node\ 'i' \\ 0 & at\ other\ nodes \end{cases}$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

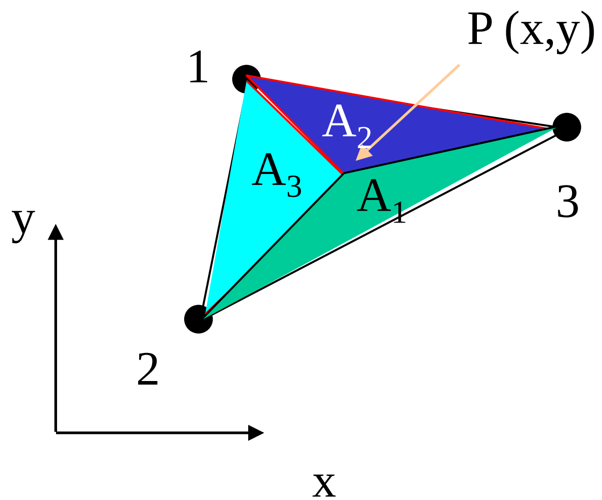
برای هر نقطه از المان:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} N_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^{3} N_i x_i &= x \\ \sum_{i=1}^{3} N_i y_i &= y \end{aligned}}$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

برای هر نقطه از المان:



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$

المان مثلثی خطی

مقایر کرنش عبارت است از:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\,\mathbf{d}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

مقایر کرنش عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

که در آن $(i, j = 1, 2, 3)$ $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ است.

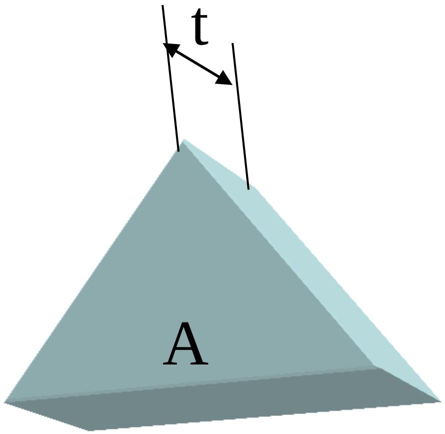
کرنشها برای کل المان مقادیر ثابتی هستند. با توجه به رابطه تنش-کرنش، تنش نیز برای کل المان ثابت خواهد بود .

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{EBd}}$$

المان مثلثی خطی

❖ ماتریس سختی برای المان برابر است با:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}\, dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B})$$



که یک ماتریس ۶×۶ متقارن خواهد بود.

t=thickness of the element
A=surface area of the element