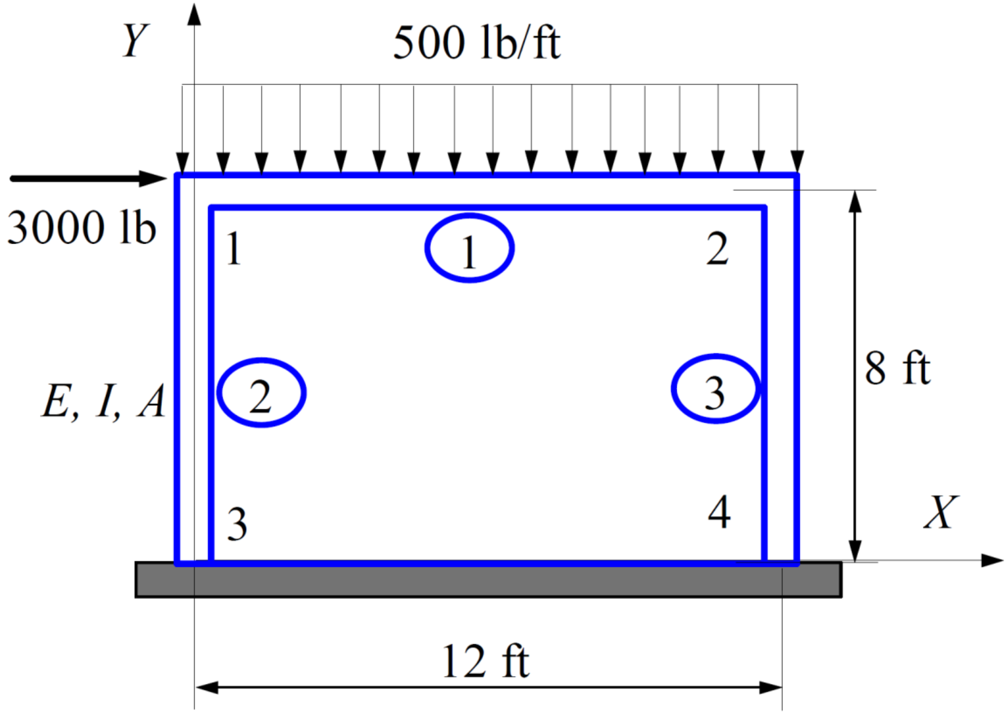
المان تیر (ادامه)

آنالیز اجزای محدود یک قاب

- اتصالات در قاب (Frame) به صورت صلب (جوش خورده و یا با دو پیچ و یا بیشتر) به یکدیگر متصل شده‌اند در این صورت حرکت انتقالی و چرخشی برای اعضای قاب در محل اتصال یکسان خواهد بود. از این رو در محل اتصال نیرویهای محوری، برشی و ممان خمشی ایجاد می شود و لازم است برای تحلیل و مدل سازی قاب از المان تیر کلی (ترکیب تیر ساده و المان میله) سود برده شود.

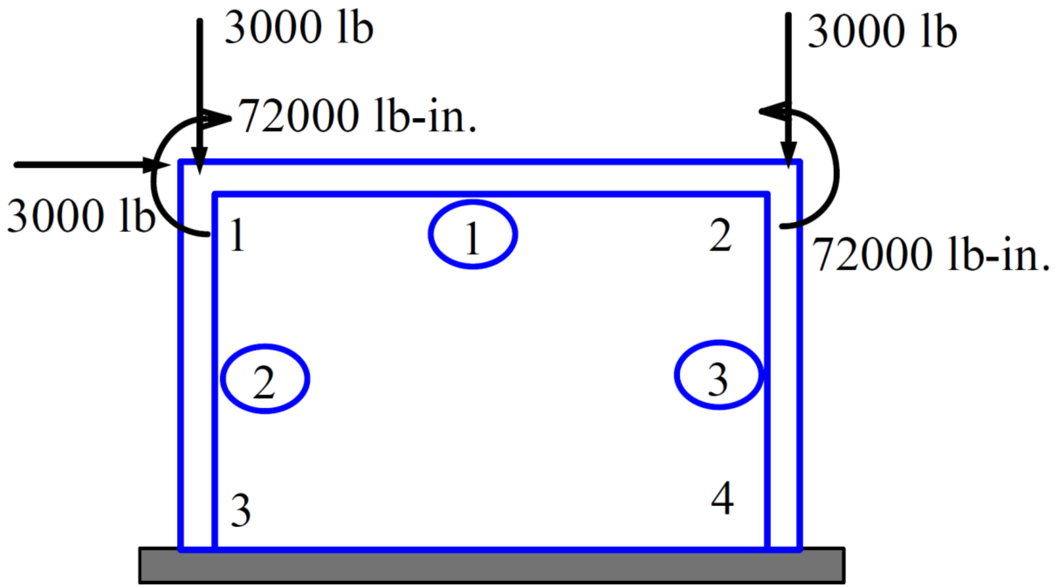
مثال: یک قاب صفحه ای



Given: $E = 30 \times 10^6$ psi, $I = 65$ in.^{4}, $A = 6.8$ in.^{2}

Find: Displacements and rotations of the two joints 1 and 2.

Solution: For this example, we first convert the distributed load to its equivalent nodal loads.



مثال: یک قاب صفحه ای

In local coordinate system, the stiffness matrix for a general 2-D beam element is

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Element Connectivity Table

Element	*Node i (1)*	*Node j (2)*
1	1	2
2	3	1
3	4	2

For element 1

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1' = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 0 & 56.4 & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 0.784 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 0 & -56.4 & 5417 \end{bmatrix} \end{array}$$

For elements 2 and 3, we have the stiffness matrix in local system,

$$
\mathbf{k}_2' = \mathbf{k}_3' = 10^4 \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_i' & v_i' & \theta_i' & u_j' & v_j' & \theta_j' \end{array} \\
\begin{bmatrix}
212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\
0 & 2.65 & 127 & 0 & -2.65 & 127 \\
0 & 127 & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\
-212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\
0 & -2.65 & -127 & 0 & 2.65 & -127 \\
0 & 127 & 4063 & 0 & -127 & 8125
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

where i=3, j=1 for element 2 and i=4, j=2 for element 3.

مثال: یک قاب صفحه ای

In general, the transformation matrix **T** is,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

We have $l = 0$, $m = 1$ for both elements 2 and 3. Thus,

مثال: یک قاب صفحه ای

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using the transformation relation, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}'\mathbf{T}$

we obtain the stiffness matrices in the global coordinate system for elements 2 and 3,

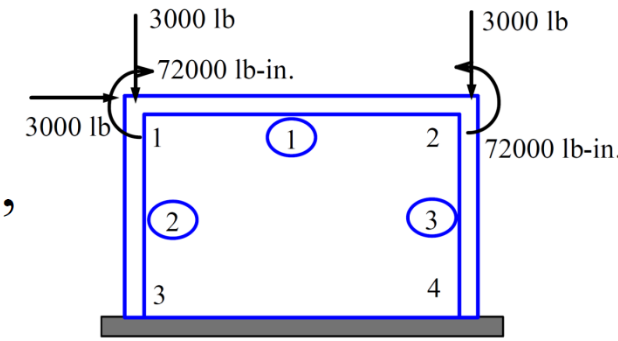
مثال: یک قاب صفحه ای

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \end{array} \\
\mathbf{k}_2 = 10^4 \times & \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

and

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\
\mathbf{k}_3 = 10^4 \times & \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Assembling the global FE equation and noticing the following boundary conditions,



$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{1X} = 3000\,\text{lb},\ F_{2X} = 0,\ F_{1Y} = F_{2Y} = -3000\,\text{lb},$$

$$M_1 = -72000\,\text{lb}\cdot\text{in.},\ \ M_2 = 72000\,\text{lb}\cdot\text{in.}$$

we obtain the condensed FE equation,

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 127 & 56.4 & 13542 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 144.3 & 0 & 127 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 213.3 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 127 & -56.4 & 13542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \end{Bmatrix}$$

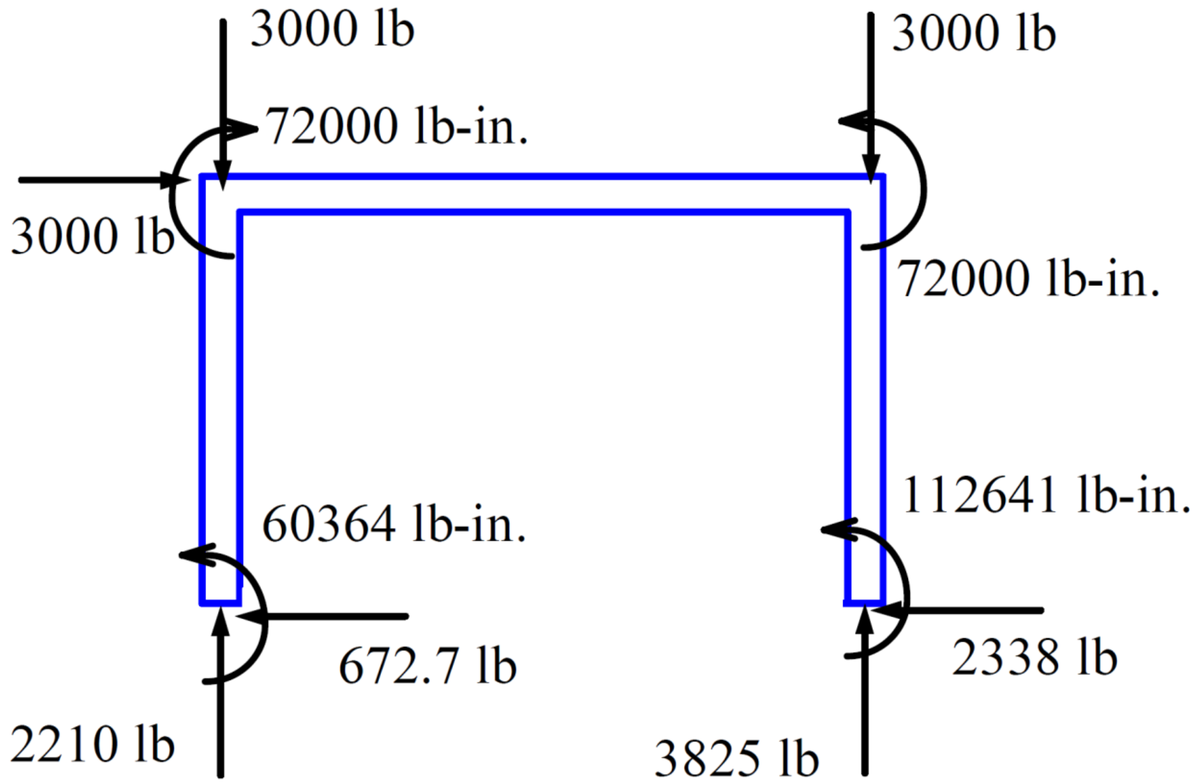
Solving this, we get

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.092\,\text{in.} \\ -0.00104\,\text{in.} \\ -0.00139\,\text{rad} \\ 0.0901\,\text{in.} \\ -0.0018\,\text{in.} \\ -3.88\times 10^{-5}\,\text{rad} \end{Bmatrix}$$

To calculate the reaction forces and moments at the two ends, we employ the element FE equations for element 2 and element 3. We obtain,

$$\begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672.7\,\text{lb} \\ 2210\,\text{lb} \\ 60364\,\text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_{4X} \\ F_{4Y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2338\,\text{lb} \\ 3825\,\text{lb} \\ 112641\,\text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix}$$

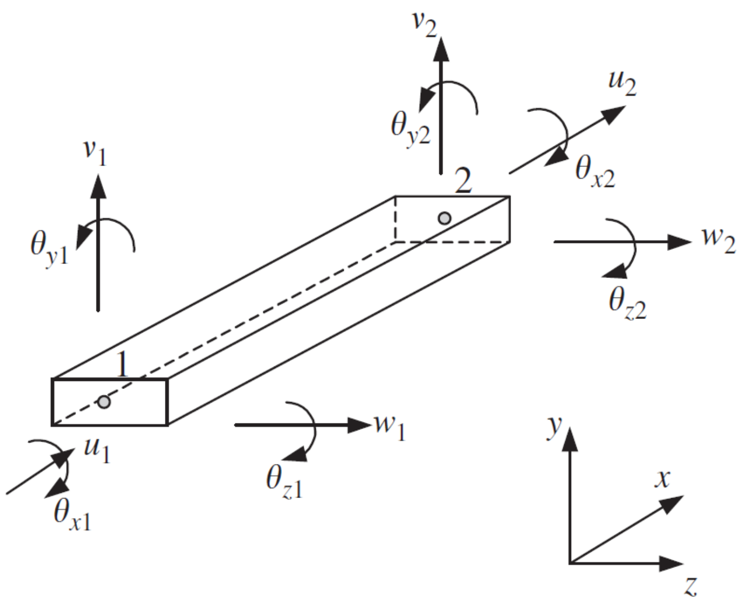
Check the results: Draw the free-body diagram of the frame. Equilibrium is maintained with the calculated forces and moments.

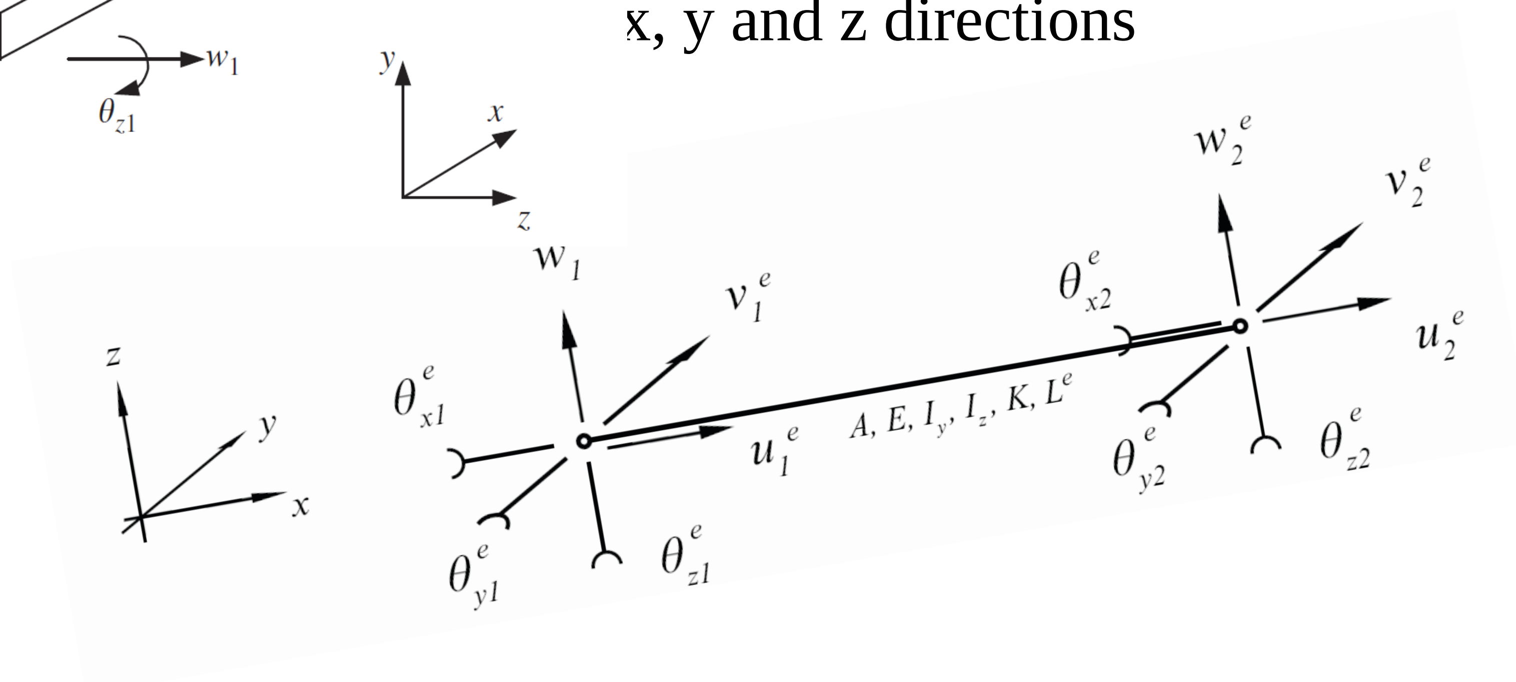


A 3D 12-freedom beam element defined in a local system

u_1 , v_1, w_1 : Translation at node 1 in x, y and z directions

Θ_{x1}, Θ_{y1}, Θ_{z1}, : Rotation at node 1 in x, y and z directions





المان تیر-میله در فضای سه بعدی

ماتریس سختی:

$$\{\; u_1^e \quad v_1^e \quad w_1^e \quad \theta_{x1}^e \quad \theta_{y1}^e \quad \theta_{z1}^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad w_2^e \quad \theta_{x2}^e \quad \theta_{y2}^e \quad \theta_{z2}^e \;\}$$

$$\boldsymbol{k}' = \begin{bmatrix} AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & b_z & 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & b_z \\ 0 & 0 & a_y & 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & -a_y & 0 & -b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & d_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & c_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & d_z \\ -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z \\ 0 & 0 & -a_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & a_y & 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & d_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & d_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$AS = \frac{AE}{L}\ ,\ \ TS = \frac{GJ}{L}$$

$$a_z = \frac{12EI_z}{L^3},\ b_z = \frac{6EI_z}{L^2},\ c_z = \frac{4EI_z}{L},\ d_z = \frac{2EI_z}{L}$$

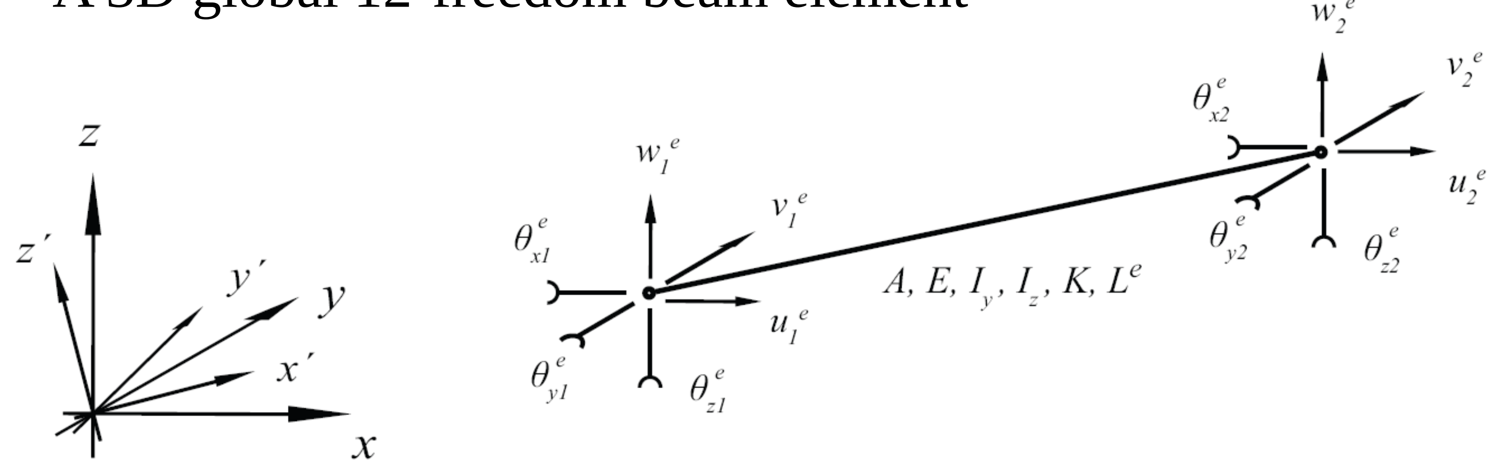
$$a_y = \frac{12EI_y}{L^3},\ b_y = \frac{6EI_y}{L^2},\ c_y = \frac{4EI_y}{L},\ d_y = \frac{2EI_y}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

G is the torsional modulus of the material and J is the torsional proportional constant for the cross section.

المان تیر–میله در فضای سه بعدی

A 3D global 12-freedom beam element



ماتریس انتقال:

$$k'u' = f' \xrightarrow[f' = T\,f]{u' = T\,u} k'Tu = Tf \xrightarrow{T^T \times} T^T k'Tu = f$$

$$k = T^T k' T$$

A 3D global 12-freedom beam element

$$\mathrm{k} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}} \mathrm{k}' \mathrm{T}$$

ماتریس انتقال:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

Direction cosines in $\boldsymbol{\lambda}$:

که در آن:

$$l_x = \cos(x', x), \quad m_x = \cos(x', y), \quad n_x = \cos(x', z)$$
$$l_y = \cos(y', x), \quad m_y = \cos(y', y), \quad n_y = \cos(y', z)$$
$$l_z = \cos(z', x), \quad m_z = \cos(z', y), \quad n_z = \cos(z', z)$$

المان تیر-میله در فضای سه بعدی

مولفه های ماتریس انتقال:

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m_x = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad n_x = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{kl} &= x_k - x_l \\ y_{kl} &= y_k - y_l \\ z_{kl} &= z_k - z_l \end{aligned} \right\} \quad k, l = 1, 2, 3$$

$$l_z = \frac{1}{2A_{123}}(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})$$

$$m_z = \frac{1}{2A_{123}}(z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})$$

$$n_z = \frac{1}{2A_{123}} + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$$

$$l_y = m_z n_x - n_z m_x$$

$$m_y = n_z l_x - l_z n_x$$

$$n_y = l_z m_x - m_z l_x$$

$$A_{123} = \sqrt{(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})^2 + (z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})^2 + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})^2}$$

If a distributed load with components w_y, w_z is applied on the element
Then the equivalent point loads at the ends of the member are:

$$f' = [0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{-w_z L^2}{12}, \frac{w_y L^2}{12}, 0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{w_z L^2}{12}, \frac{-w_y L^2}{12}]^T$$

$$f = \boldsymbol{T}^T f'$$

Input data for beam-bar elements:

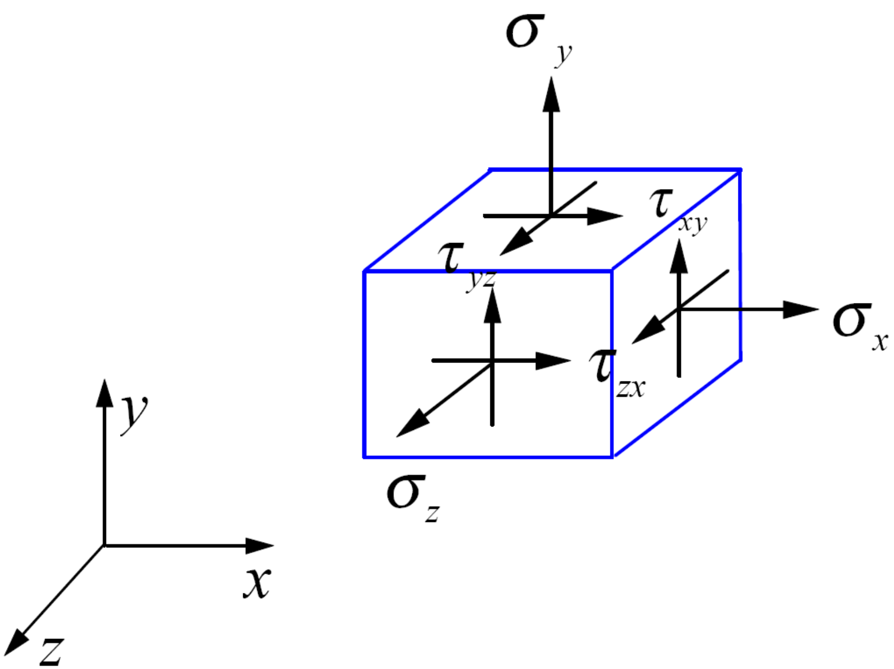
- (X, Y, Z) for each node
- E , A, G, J, I_z, I_y for each element in local coordinates

Calculate:

- The directional cosines
- The element stiffness matrix in global coordinates
- The element force vector in global coordinates
- Assemble the stiffness matrices to obtain the global stiffness matrix
- Assemble the load vectors to obtain the global load vector
- Solve the final equation to obtain the displacement at different nodes

مسایل جامدات دو بعدی

Two-Dimensional Problems



در حالت کلی هر المان دارای شش مولفه تنش و کرنش است:

برای تنش: $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{xy} , \tau_{yz} , \tau_{zx}$

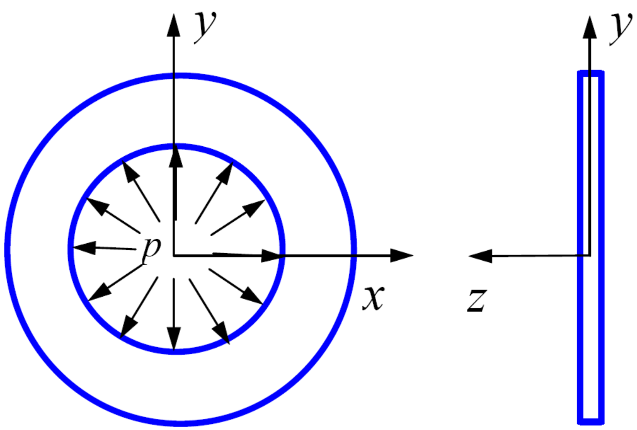
برای کرنش: $\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} , \gamma_{yz} , \gamma_{zx}$

مروری بر تئوری پایه جامدات

در شرایط خاص و برای حالت هایی از تنش و کرنش؛ می‌توان مسایل جامدات را با ساده‌سازی از حالت سه بعدی به دو بعدی تبدیل نمود.

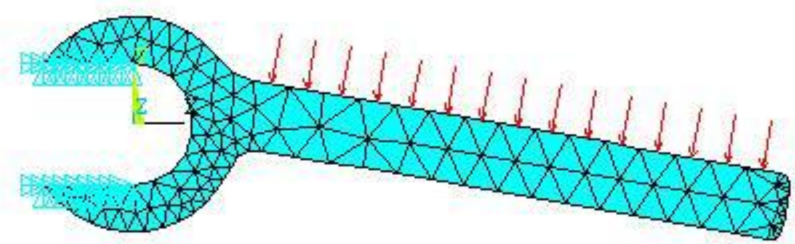
<u>*Plane stress:*</u>

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (\varepsilon_z \neq 0)$$



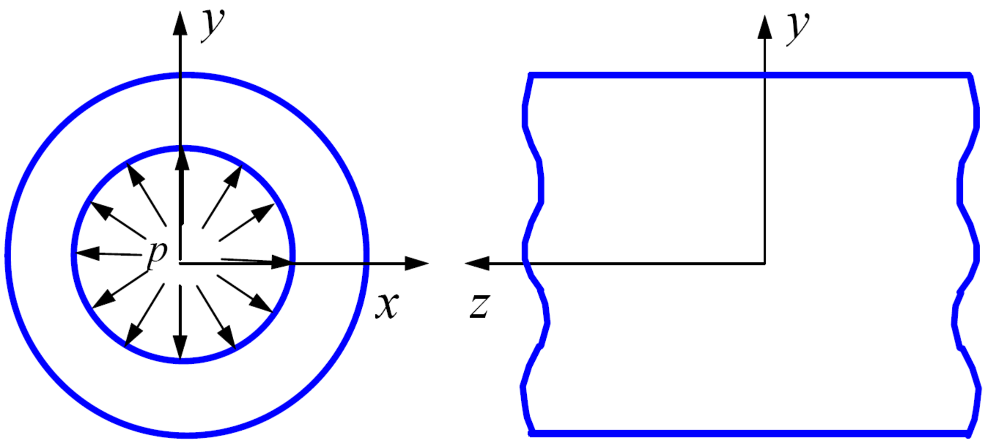
تنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی صفحه‌ای با ضخامت کم و ثابت؛ در صورتی که بارگذاری در همان صفحه xy صورت گیرد.

مثال:



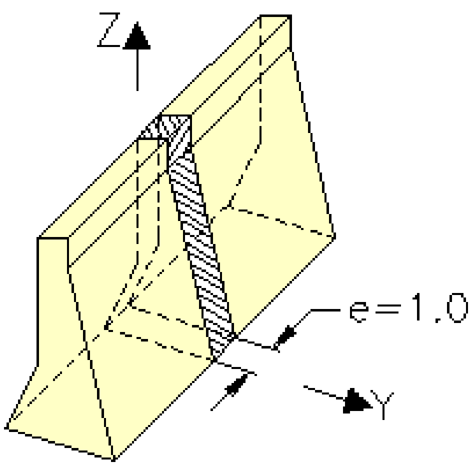
مروری بر تئوری پایه جامدات

plane strain: $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (\sigma_z \neq 0)$



کرنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی با ضخامت زیاد (طویل) و سطح مقطع یکنواخت؛ در صورتی که بارگذاری در راستای ضخامت (راستای Z) صورت گیرد.

مثال:



Plane stress: برای مسایل تنش صفحه‌ای الاستیک در یک سازه همسان:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \varepsilon = \mathbf{E}^{-1}\sigma + \varepsilon_0$$

ε_0، کرنش اولیه، E مدول الاستیسیته یانگ، ν نسبت پواسون و G مدول برشی است.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

which means that there are only two independent materials constants for ***homogeneous*** and ***isotropic*** materials.

Plane stress: می‌توان تنش‌ها را بر حسب کرنشها نیز از معادله قبل بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right) \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}_0$$

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

رابطه فوق برای حالت تنش صفحه‌ای برقرار است. در حالت کرنش صفحه‌ای لازم است مقادیر ثابت در معادلات بالا با مقادیر زیر جایگزین شوند:

$$E\rightarrow\frac{E}{1-\nu^2}\qquad \nu\rightarrow\frac{\nu}{1-\nu}\qquad G\rightarrow G$$

برای رابطه تنش‌ها بر حسب کرنشها در حالت کرنش صفحه‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right)$$

plane strain

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

کرنشهای اولیه به واسطه تغییرات درجه حرارت برابر است با:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha\Delta T\\ \alpha\Delta T\\ 0\end{Bmatrix}$$

α ضریب انبساط حرارتی و ΔT تغییرات درجه حرارت است.

روابط کرنش-تغییرمکان

برای مقادیر کوچک کرنش و دوران می توان نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

و به فرم ماتریسی:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \text{or} \quad \varepsilon = \mathbf{Du}$$

در این حالت واضح است اگر جابجایی به صورت چندجمله‌ای اختیار گردد، آنگاه درجه کرنش (و در نتیجه تنش) یک درجه کمتراز جابجایی خواهد بود.

معادلات تعادل

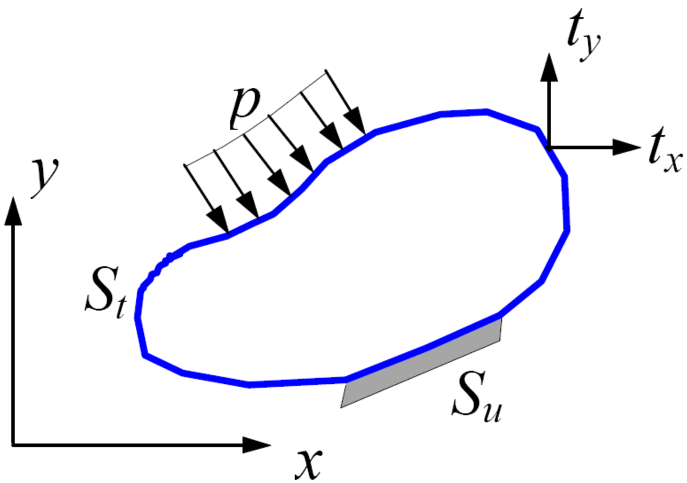
(از تئوری الاستیسیته) تنش در یک سازه باید در معادلات تعادل صدق نماید:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

در این رابطه f_x و f_y، نیروهای حجمی (نظیر نیروی وزن) است. در روش اجزای محدود معادلات تعادل به صورت تقریبی برقرار می‌شوند.

شرایط مرزی



مرز S برای یک سازه به دو قسمت S_u و S_t تقسیم می‌گردد بنابراین شرایط بر روی این دو مرز عبارت است از:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \qquad \text{on } S_u$$

$$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y, \qquad \text{on } S_t$$

t_x و t_y مولفه‌های بارگذاری در مرزها (مقایر تنش در مرزها) هستند و به صورت مقادیر معلوم در مسئله وارد می‌شوند.

در روش اجزای محدود انواع بارگذاری نظیر بارهای گسترده بر روی سطوح، بارگذاری‌های حجمی، نیروهای متمرکز، گشتاورها به صورت نیروهای نقطه‌ای در گره‌ها تبدیل خواهند شد.

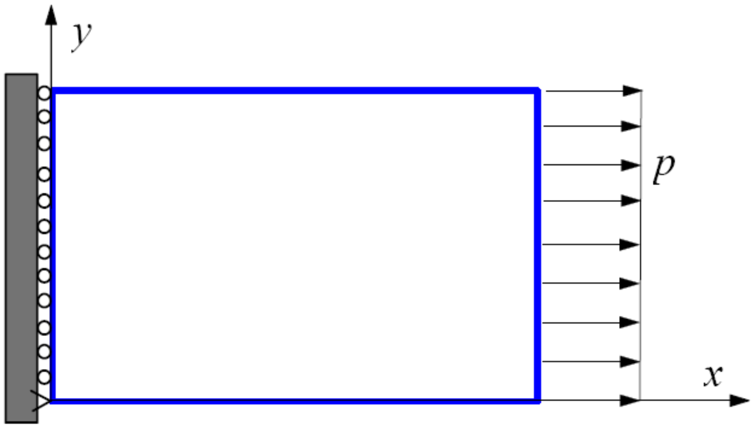
حل دقیق مسایل الاستیسیته

برای حل دقیق (تغییرمکان، کرنش و تنش) یک سازه می‌بایست معادلات تعادل برقرار گردند و همچنین شرایط مرزی و شرایط سازگاری مسئله را نیز ارضا شوند.

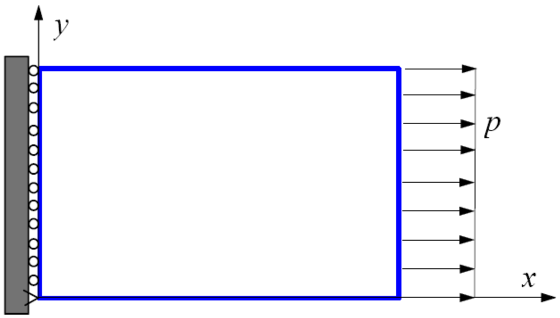
شرایط سازگاری: میدان تغییرمکان سازه باید به صورت پیوسته تغییر نماید و دارای گسستگی و همپوشانی نباشد.

Example

A plate is supported and loaded with distributed force p as shown in the figure. The material constants are E and ν.



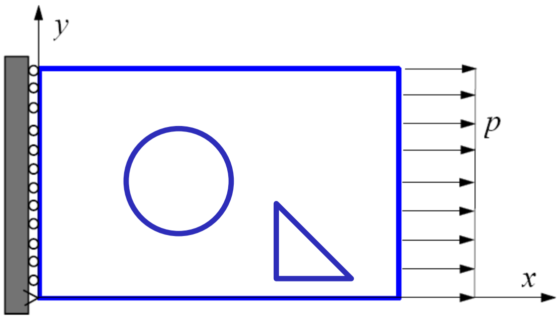
حل دقیق مسایل الاستیسیته



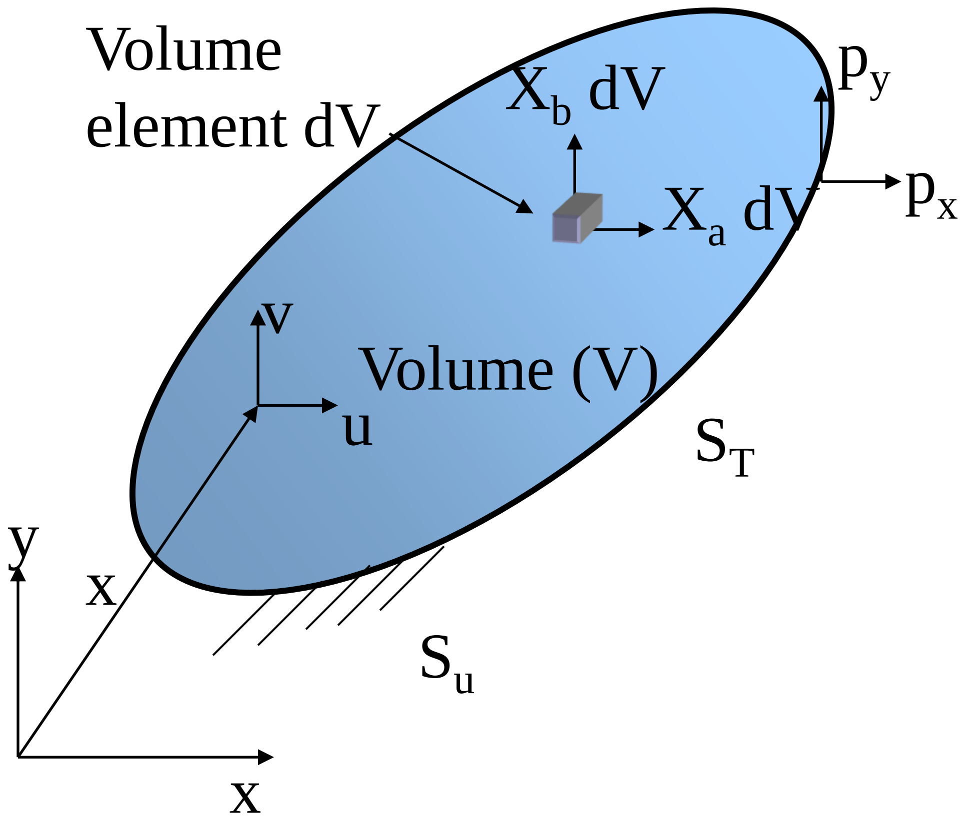
حل دقیق:

- تغییرمکان: $u = \frac{p}{E}x, \qquad v = -\nu \frac{p}{E} y$
- کرنش: $\varepsilon_x = \frac{p}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu \frac{p}{E},$
- تنش: $\sigma_x = p, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0$

Exact (or analytical) solutions for *simple* problems are numbered (suppose there is a hole in the plate!). That is why we need FEM!



2D Elasticity



S_u: Portion of the boundary on which displacements are prescribed (zero or nonzero)

S_T: Portion of the boundary on which tractions are prescribed (zero or nonzero)

Examples: concept of displacement field

یادآوری: الاستیسیته

Displacement field $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$

Strain - Displacement Relation $\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \boldsymbol{u}$

Stress - Strain Law $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\varepsilon = \boldsymbol{E}\,\partial\boldsymbol{u}$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathrm{u}\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \\ \mathrm{v}\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

For **plane stress**
(3 nonzero **stress** components)

$$\boldsymbol{E} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

For **plane strain**
(3 nonzero **strain** components)

$$\boldsymbol{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Strong formulation:

Equilibrium equations

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{X} = \mathbf{0} \quad in \;\; V$$

Boundary conditions

1. Displacement boundary conditions: Displacements are specified on portion S_u of the boundary

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{specified} \quad on \;\; S_u$$

2. Traction (force) boundary conditions: **Tractions** are specified on portion S_T of the boundary

Now, how do I express this mathematically?

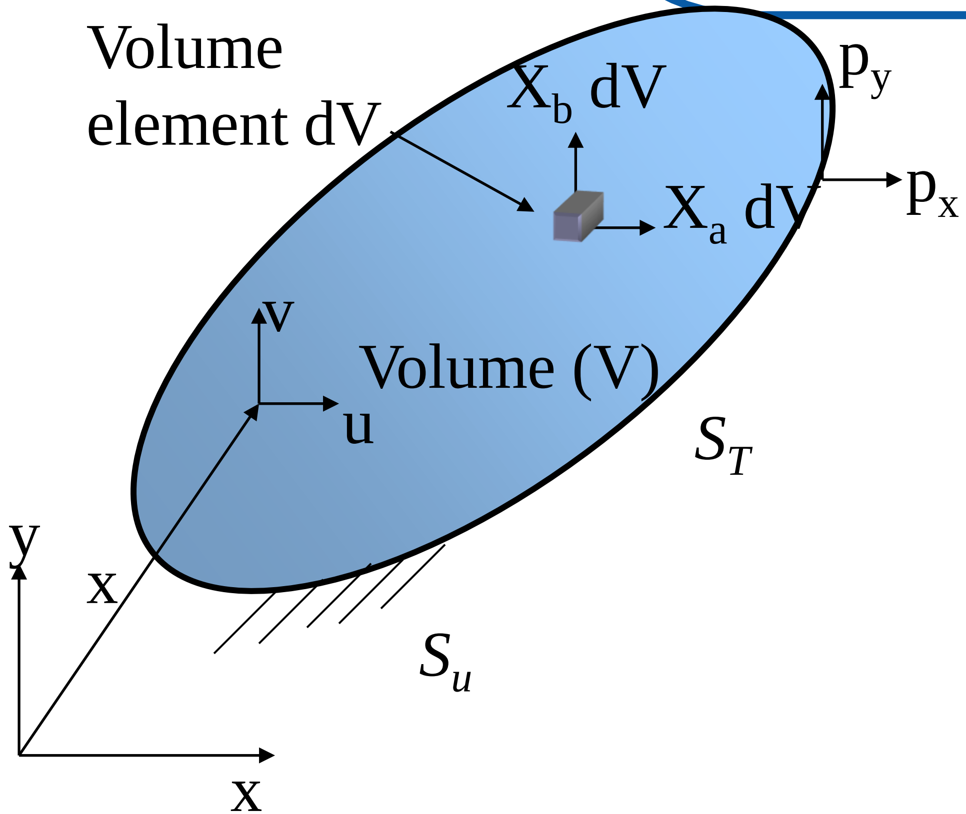
But in finite element analysis we **DO NOT** work with the strong formulation (why?), instead we use an equivalent **Principle of Minimum Potential Energy**

Principle of Minimum Potential Energy (2D)

Definition: For a linear elastic body subjected to body forces $\mathbf{X}=[X_a,X_b]^T$ and surface tractions $\boldsymbol{T}_S=[p_x,p_y]^T$, causing displacements $\boldsymbol{u}=[u,v]^T$ and strains $\boldsymbol{\varepsilon}$ and stresses $\boldsymbol{\sigma}$, the **potential energy** Π is defined as the strain energy minus the potential energy of the loads ($\mathbf{X}$ and $\mathbf{T}_S$)

$$\Pi=U-W$$

یادآوری: الاستیسیته



$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$W = \int_V \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{X}\, dV + \int_{S_T} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{T}_S\, dS$$

Strain energy of the elastic body

Using the stress-strain law $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

In 2D plane stress/plane strain:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

یادآوری: الاستیسیته

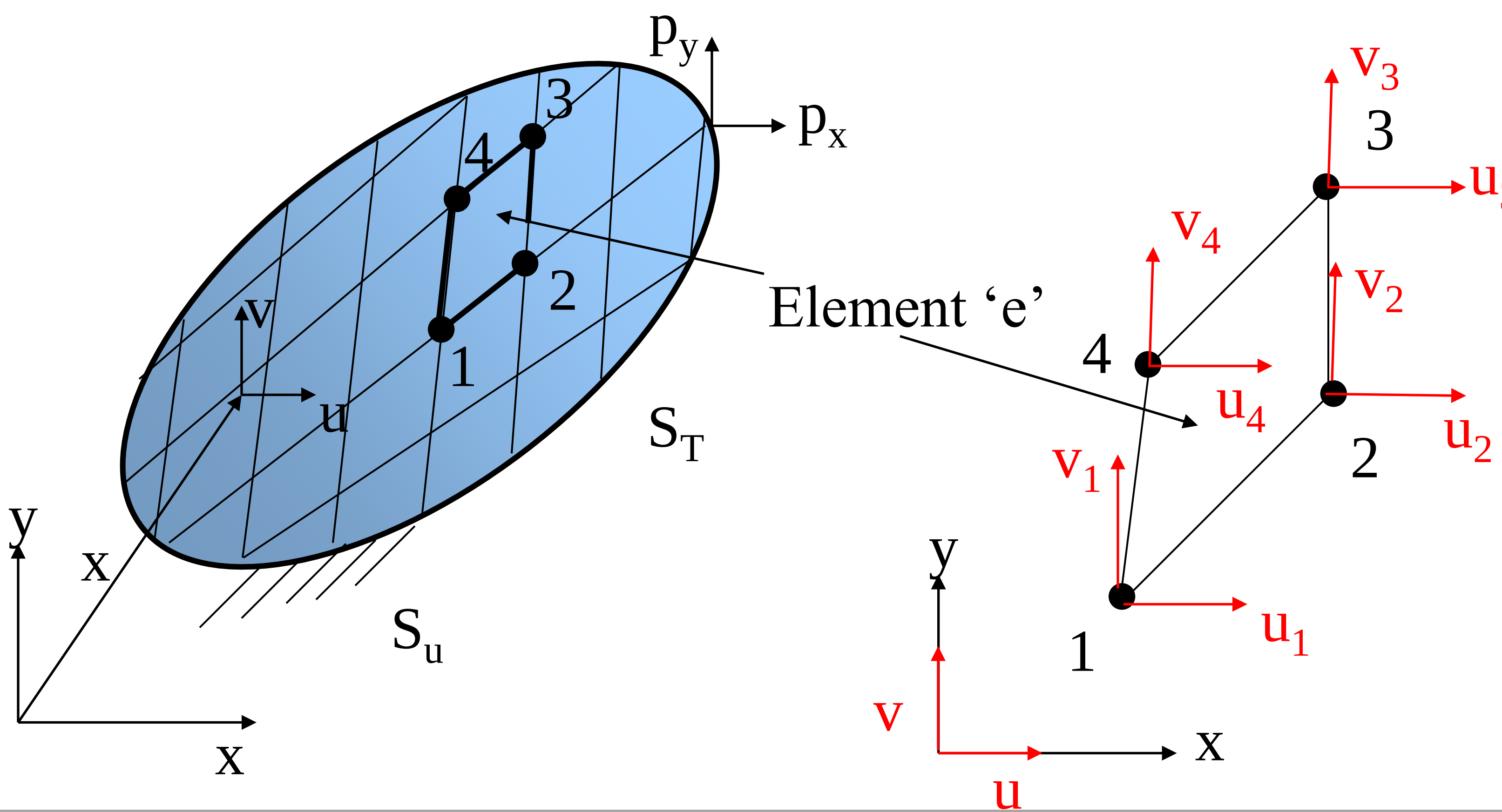
Principle of minimum potential energy: Among all **admissible** displacement fields the one that satisfies the equilibrium equations also render the potential energy Π a minimum.

“admissible displacement field”:

1. first derivative of the displacement components exist
2. satisfies the boundary conditions on S_u

Finite element formulation for 2D:

Step 1: Divide the body into **finite elements** connected to each other through special points ("**nodes**")



$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Total potential energy $$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}\, dV - \int_V \underline{u}^T \underline{X}\, dV - \int_{S_T} \underline{u}^T \underline{T}_S\, dS$$

Potential energy of element 'e':

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\int_{V^e} \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}\, dV - \int_{V^e} \underline{u}^T \underline{X}\, dV - \int_{S_T^e} \underline{u}^T \underline{T}_S\, dS$$

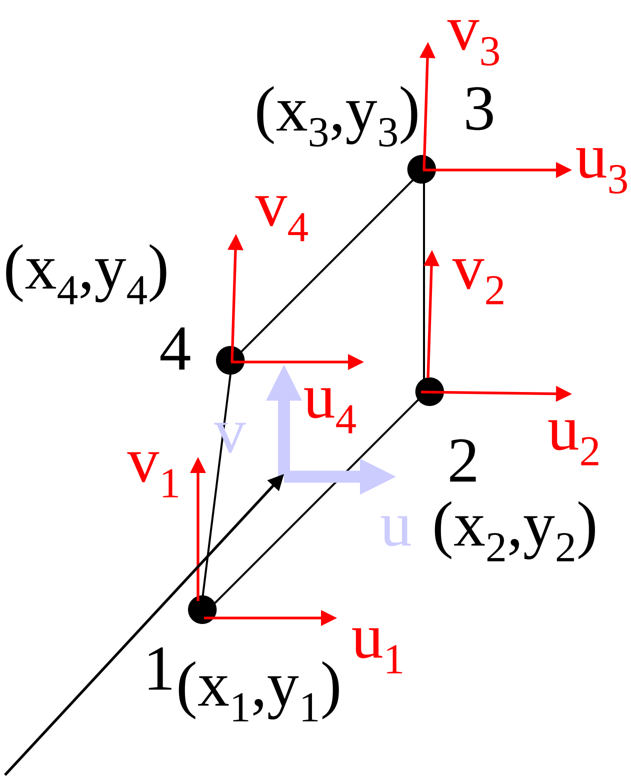
This term may or may not be present depending on whether the element is actually on S_T

Total potential energy = sum of potential energies of the elements

$$\Pi = \sum_e \Pi_e$$

Step 2: Describe the behavior of each element (i.e., derive the stiffness matrix of each element and the nodal load vector).

Inside the element 'e'



Displacement at any point x=(x,y)

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u\,(x, y) \\ v\,(x, y) \end{Bmatrix}$$

Nodal displacement vector

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

where

$u_1=u(x_1,y_1)$

$v_1=v(x_1,y_1)$

etc

یادآوری: الاستیسیته

Recall

Strain - Displacement Relation $\underline{\varepsilon} = \underline{\partial}\,\underline{u}$

Stress - Strain Law $\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{\varepsilon} = \underline{D}\,\underline{\partial}\,\underline{u}$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \underline{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

If we knew u then we could compute the strains and stresses within the element. But I DO NOT KNOW u!!

Hence we need to **approximate** u first (using **shape functions**) and then obtain the approximations for ε and σ (recall the case of a 1D bar)

This is accomplished in the following 3 Tasks in the next slide

TASK 1: APPROXIMATE THE DISPLACEMENTS WITHIN EACH ELEMENT

Displacement approximation in terms of shape functions

$$\boxed{\underline{u} = \underline{N}\,\underline{d}}$$

TASK 2: APPROXIMATE THE STRAIN and STRESS WITHIN EACH ELEMENT

Strain approximation $\boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{B}\,\underline{d}}$

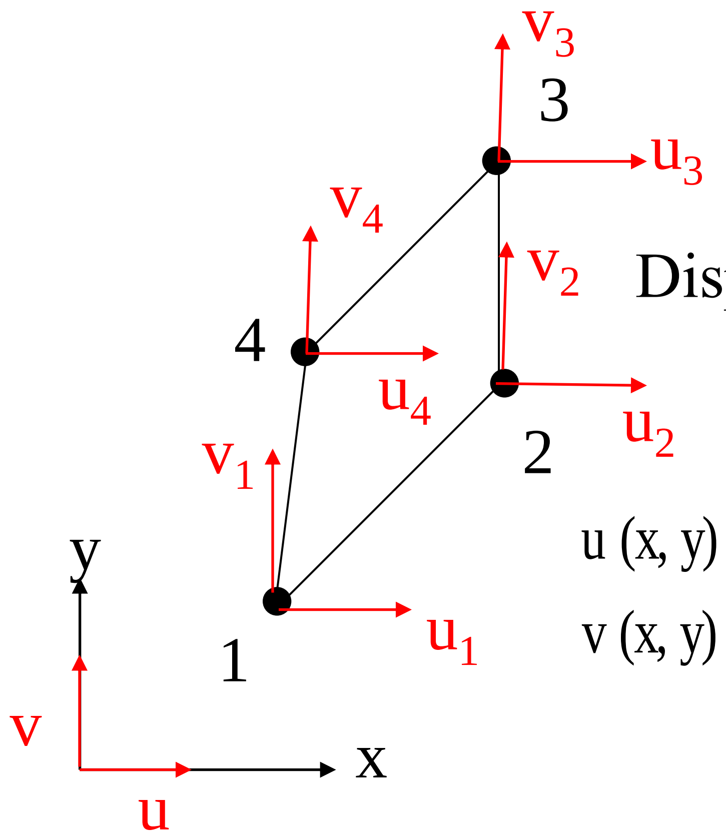
Stress approximation $\boxed{\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{B}\,\underline{d}}$

TASK 3: DERIVE THE STIFFNESS MATRIX OF EACH ELEMENT USING THE PRINCIPLE OF MIN. POT ENERGY

We'll see these for a generic element in 2D today and then derive expressions for specific finite elements in the next few classes

TASK 1: APPROXIMATE THE DISPLACEMENTS WITHIN EACH ELEMENT

Displacement approximation in terms of shape functions



Displacement approximation within element 'e'

$$u\,(x,y) \approx N_1(x,y)\,u_1 + N_2(x,y)\,u_2 + N_3(x,y)\,u_3 + N_4(x,y)\,u_4$$

$$v\,(x,y) \approx N_1(x,y)\,v_1 + N_2(x,y)\,v_2 + N_3(x,y)\,v_3 + N_4(x,y)\,v_4$$

یادآوری: الاستیسیته

$$u(x,y) \approx N_1(x,y)\,u_1 + N_2(x,y)\,u_2 + N_3(x,y)\,u_3 + N_4(x,y)\,u_4$$

$$v(x,y) \approx N_1(x,y)\,v_1 + N_2(x,y)\,v_2 + N_3(x,y)\,v_3 + N_4(x,y)\,v_4$$

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \hline u_3 \\ v_3 \\ \hline u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{u} = \underline{N}\,\underline{d}}$$

We'll derive specific expressions of the shape functions for different finite elements later