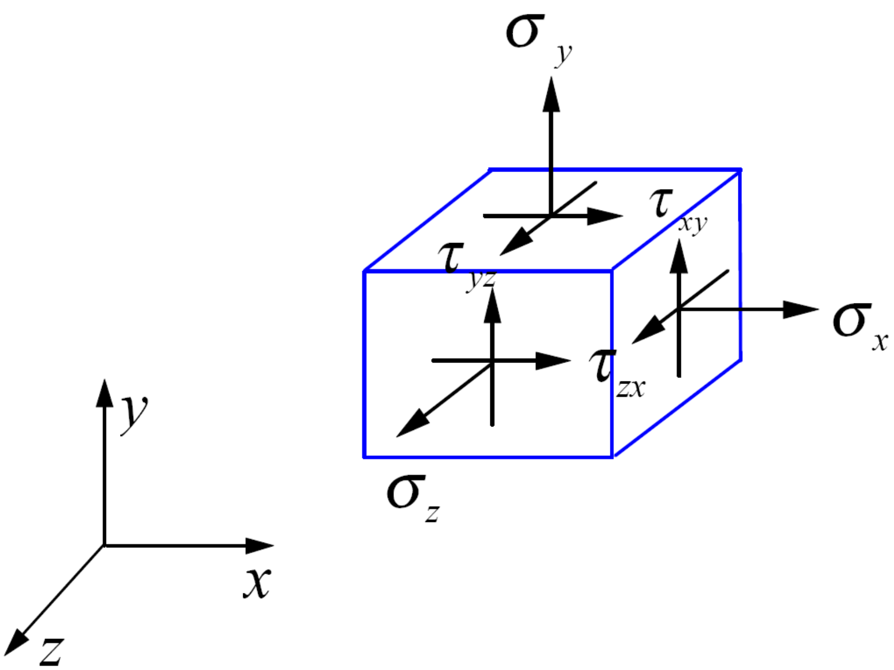
مسایل جامدات دو بعدی

Two-Dimensional Problems



در حالت کلی هر المان دارای شش مولفه تنش و کرنش است:

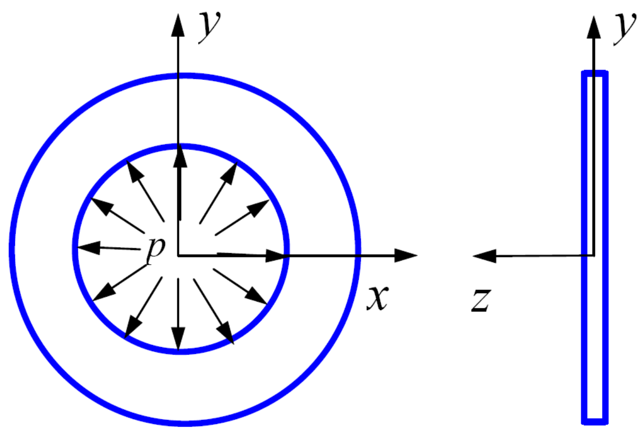
برای تنش: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

برای کرنش: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

مروری بر تئوری پایه جامدات

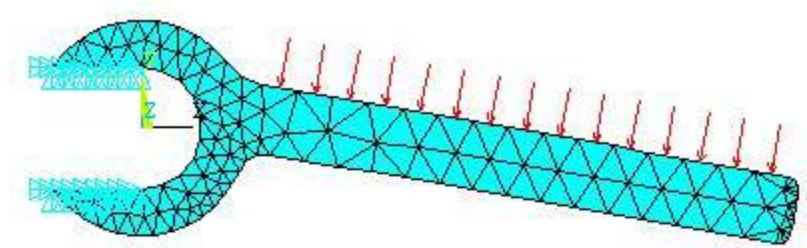
در شرایط خاص و برای حالت هایی از تنش و کرنش؛ می‌توان مسایل جامدات را با ساده‌سازی از حالت سه بعدی به دو بعدی تبدیل نمود.

Plane stress: $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (\varepsilon_z \neq 0)$



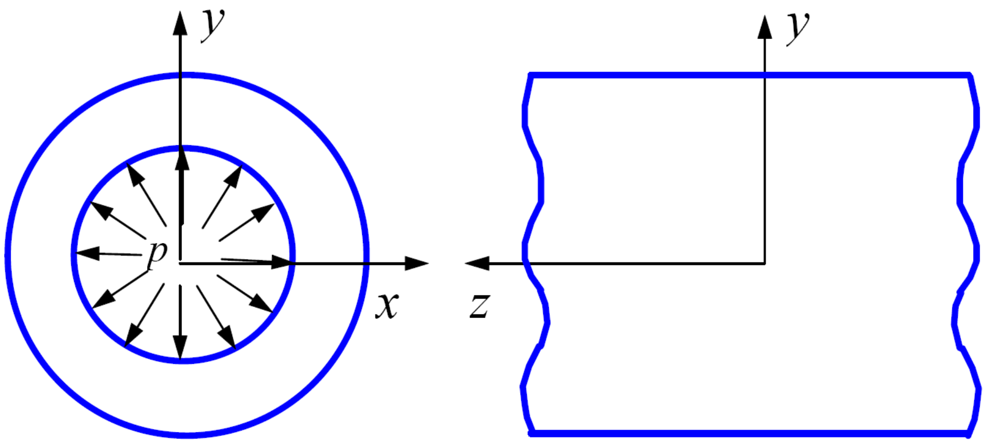
تنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی صفحه‌ای با ضخامت کم و ثابت؛ در صورتی که بارگذاری در همان صفحه xy صورت گیرد.

مثال:



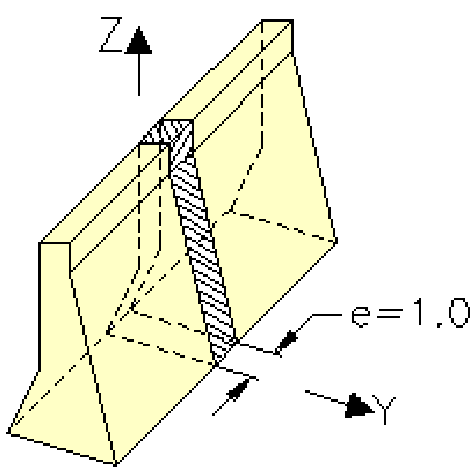
مروری بر تئوری پایه جامدات

plane strain: $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (\sigma_z \neq 0)$



کرنش صفحه‌ای: برای سازه‌هایی با ضخامت زیاد (طویل) و سطح مقطع یکنواخت؛ در صورتی که بارگذاری در راستای ضخامت (راستای Z) صورت گیرد.

مثال:



Plane stress: برای مسایل تنش صفحه‌ای الاستیک در یک سازه همسان:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}$$ یا $$\varepsilon = \mathbf{E}^{-1}\sigma + \varepsilon_0$$

ε_0، کرنش اولیه، E مدول الاستیسیته یانگ، νنسبت پواسون و G مدول برشی است.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

which means that there are only two independent materials constants for ***homogeneous*** and ***isotropic*** materials.

مروری بر تئوری پایه جامدات

Plane stress: می‌توان تنش‌ها را بر حسب کرنشها نیز از معادله قبل بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right)$$

یا

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}_0$$

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

رابطه فوق برای حالت تنش صفحه‌ای برقرار است. در حالت کرنش صفحه‌ای لازم است مقادیر ثابت در معادلات بالا با مقادیر زیر جایگزین شوند:

$$E\rightarrow\frac{E}{1-\nu^2}\qquad \nu\rightarrow\frac{\nu}{1-\nu}\qquad G\rightarrow G$$

برای رابطه تنش‌ها بر حسب کرنشها در حالت کرنش صفحه‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}\right)$$ plane strain

σ_0، مقادیر تنش اولیه است.

کرنشهای اولیه به واسطه تغییرات درجه حرارت برابر است با:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha\Delta T\\ \alpha\Delta T\\ 0\end{Bmatrix}$$

α ضریب انبساط حرارتی و ΔT تغییرات درجه حرارت است.

مروری بر تئوری پایه جامدات

روابط کرنش-تغییرمکان

برای مقادیر کوچک کرنش و دوران می توان نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

و به فرم ماتریسی:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \text{or} \quad \varepsilon = \mathbf{Du}$$

در این حالت واضح است اگر جابجایی به صورت چندجمله‌ای اختیار گردد، آنگاه درجه کرنش (و در نتیجه تنش) یک درجه کمتراز جابجایی خواهد بود.

معادلات تعادل

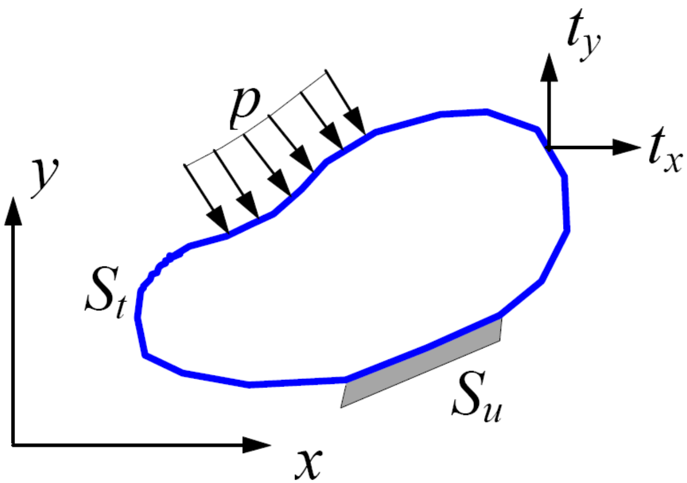
(از تئوری الاستیسیته) تنش در یک سازه باید در معادلات تعادل صدق نماید:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

در این رابطه f_X و f_Y، نیروهای حجمی (نظیر نیروی وزن) است. در روش اجزای محدود معادلات تعادل به صورت تقریبی برقرار می‌شوند.

شرایط مرزی



مرز S برای یک سازه به دو قسمت S_u و S_t تقسیم می‌گردد بنابراین شرایط بر روی این دو مرز عبارت است از:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \qquad \text{on } S_u$$

$$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y, \qquad \text{on } S_t$$

t_x و t_y مولفه‌های بارگذاری در مرزها (مقایر تنش در مرزها) هستند و به صورت مقادیر معلوم در مسئله وارد می‌شوند.

در روش اجزای محدود انواع بارگذاری نظیر بارهای گسترده بر روی سطوح، بارگذاری‌های حجمی، نیروهای متمرکز، گشتاورها به صورت نیروهای نقطه‌ای در گره‌ها تبدیل خواهند شد.

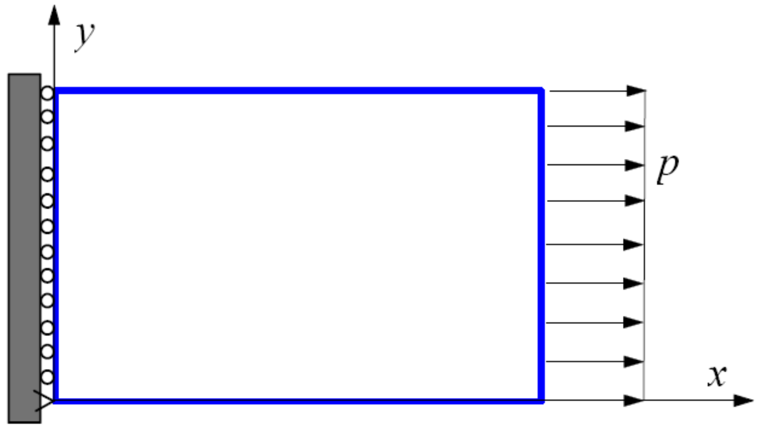
حل دقیق مسایل الاستیسیته

برای حل دقیق (تغییرمکان، کرنش و تنش) یک سازه می‌بایست معادلات تعادل برقرار گردند و همچنین شرایط مرزی و شرایط سازگاری مسئله را نیز ارضا شوند.

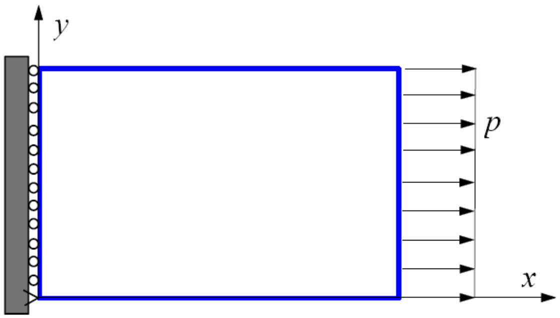
شرایط سازگاری: میدان تغییرمکان سازه باید به صورت پیوسته تغییر نماید و دارای گسستگی و همپوشانی نباشد.

Example

A plate is supported and loaded with distributed force p as shown in the figure. The material constants are E and ν.



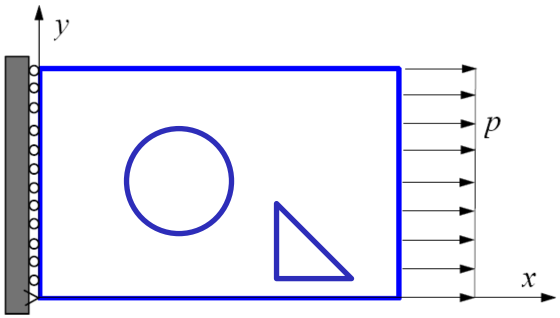
حل دقیق مسایل الاستیسیته



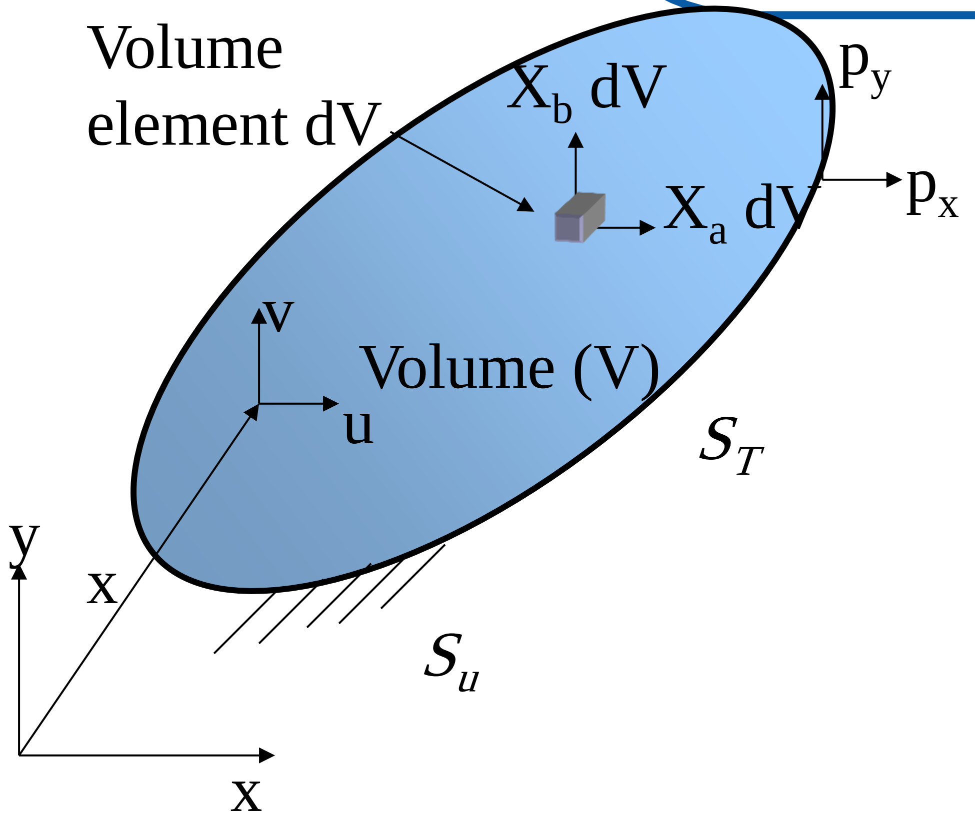
حل دقیق:

- تغییرمکان: $u = \frac{p}{E}x, \qquad v = -\nu\frac{p}{E}y$
- کرنش: $\varepsilon_x = \frac{p}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{p}{E},$
- تنش: $\sigma_x = p, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0$

Exact (or analytical) solutions for *simple* problems are numbered (suppose there is a hole in the plate!). That is why we need FEM!



یادآوری: الاستیسیته



$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$W = \int_V \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{X}\, dV + \int_{S_T} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{T}_S\, dS$$

Strain energy of the elastic body

Using the stress-strain law $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\; dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}\; dV$$

In 2D plane stress/plane strain:

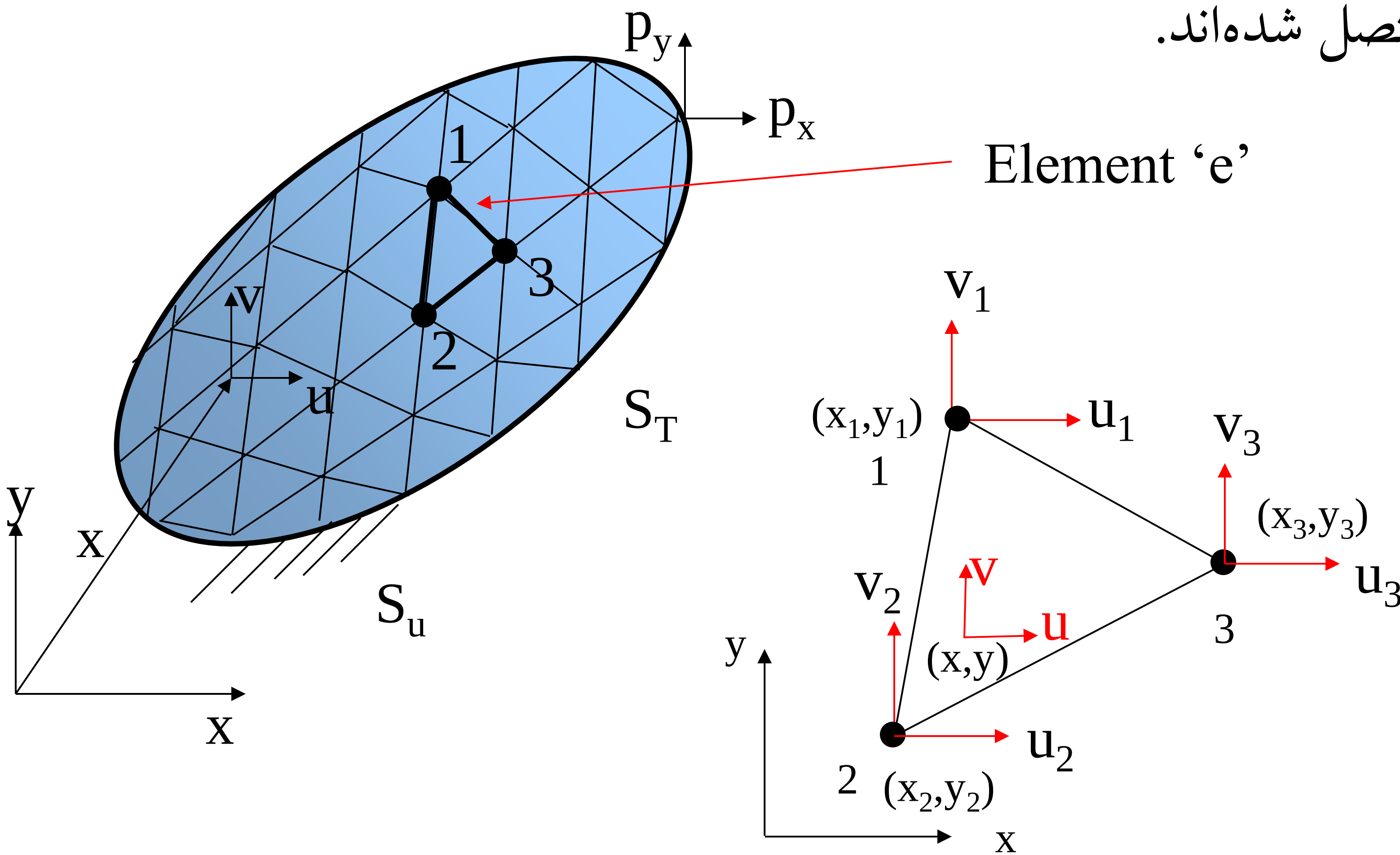
$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\; dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

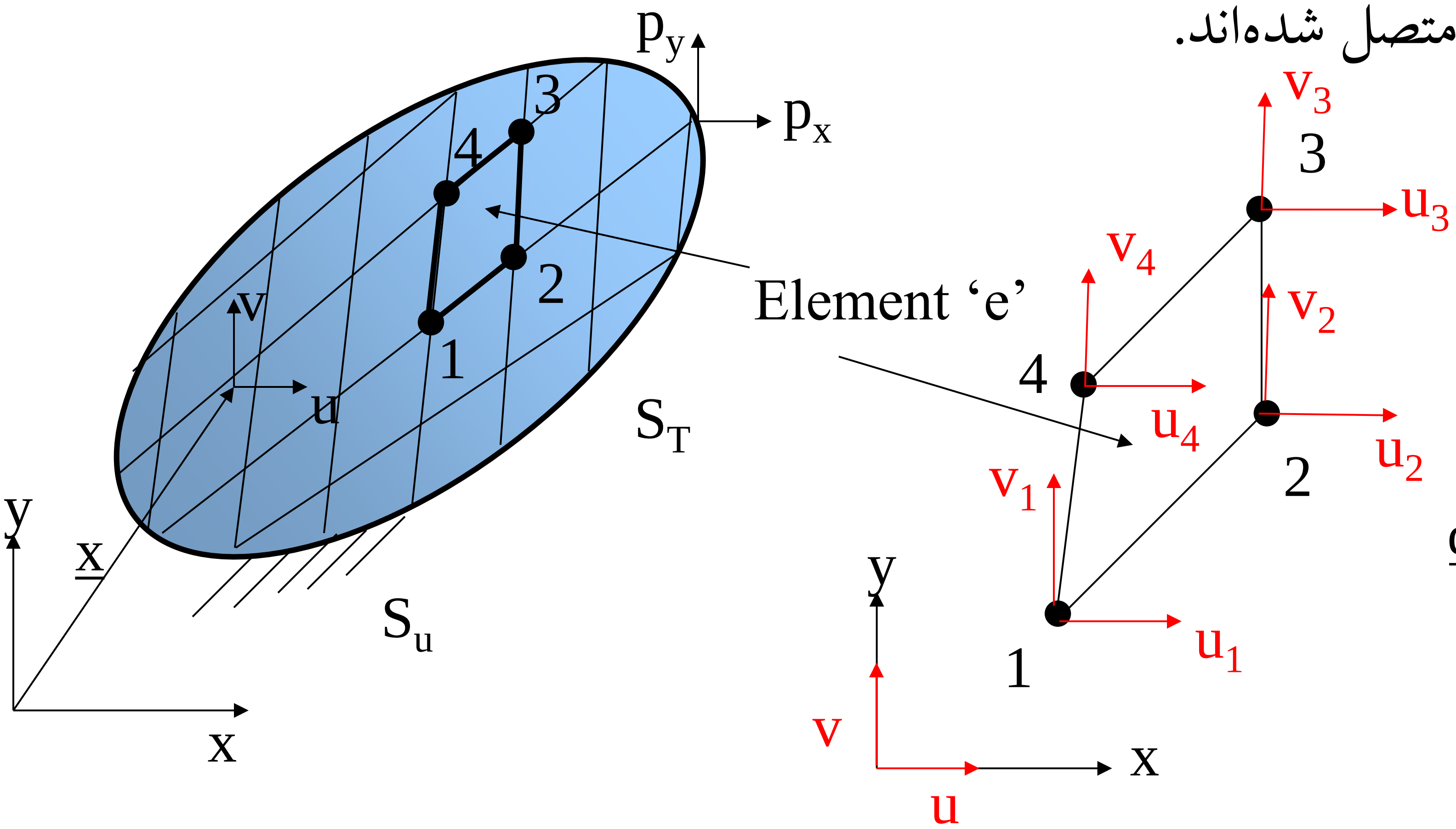
جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.



$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

جسم دو بعدی به اجزای محدودی تقسیم بندی شده و به کمک گره‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند.



$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

تغییرمکان (u, v) برای المان صفحه‌ای به صورت درونیابی از تغییرمکان گره‌ها (u_i, v_i) توسط توابع شکل، N_i، به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{Nd}$$

در رابطه فوق $\mathbf{N}$، ماتریس توابع شکل، $\mathbf{u}$ بردار تغییرمکان و $\mathbf{d}$ بردار تغییرمکان گره‌ها است.

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

مثال: تغییرمکان (u, v) برای المان مثلثی

$$\mathrm{u}(\mathrm{x,y}) \approx N_1\mathrm{u}_1 + N_2\mathrm{u}_2 + N_3\mathrm{u}_3$$

$$\mathrm{v}(\mathrm{x,y}) \approx N_1\mathrm{v}_1 + N_2\mathrm{v}_2 + N_3\mathrm{v}_3$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathrm{u}\,(\mathrm{x,y}) \\ \mathrm{v}\,(\mathrm{x,y}) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{v}_1 \\ \hdashline \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{v}_2 \\ \hdashline \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{v}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_{2\times1} = \mathbf{N}_{2\times6}\,\mathbf{d}_{\,6\times1}}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_1 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_2 & \boldsymbol{0} & \mathrm{N}_3 \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه کرنش- تغییرمکان خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \mathbf{Du} = \mathbf{DNd}, \qquad \text{or} \qquad \varepsilon = \mathbf{Bd}$$

ماتریس **B=DN**، ماتریس کرنش–تغییرمکان نامیده می‌شود.

انرژی ذخیره شده در یک المان عبارت است از:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\varepsilon)^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T \mathbf{E}\varepsilon \, dV$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV \mathbf{d}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{k}\mathbf{d} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV$$

روش اجزای محدود در مسایل دو بعدی

ماتریس سختی

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \, dV$$

بر خلاف حالت یک بعدی، در اینجا **E**، یک ماتریس است که از رابطه تنش-کرنش به دست می‌آید (معادلات تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای).

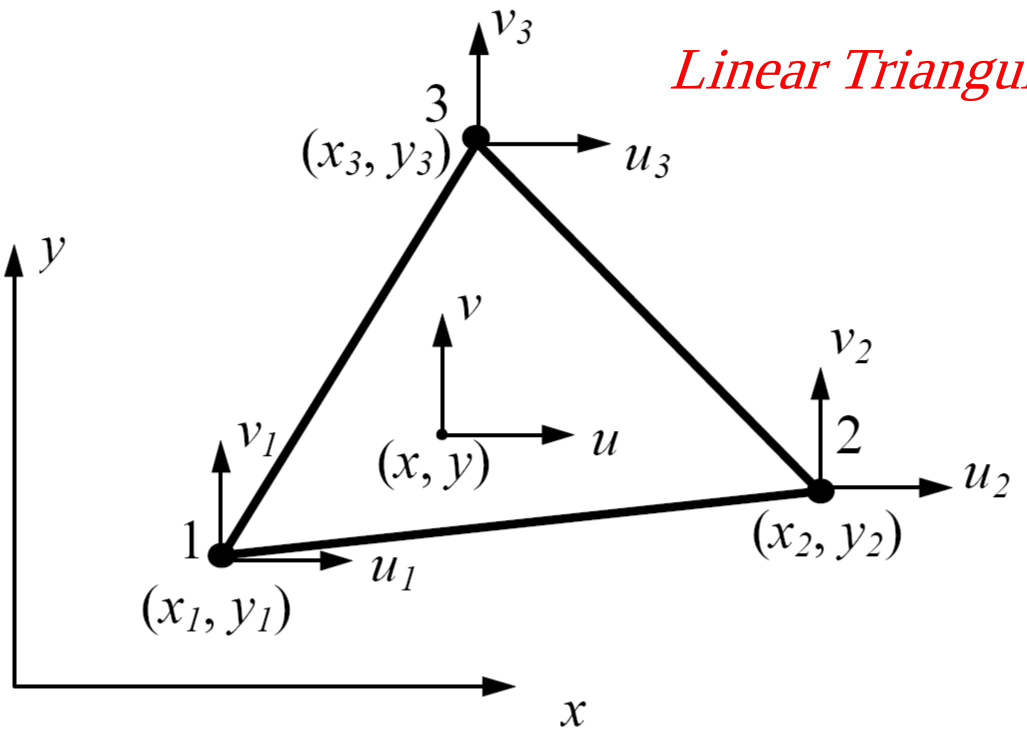
ماتریس **k** یک ماتریس متقارن است زیرا ماتریس **E**، متقارن است.
برای یک ماده با خواص مشخص، ماتریس **k** بستگی کامل به ماتریس **B** و در نتیجه به توابع شکل دارد. بنابراین دقت روش اجزای محدود برای بررسی سازه به انتخاب توابع شکل برمی‌گردد.

المان مثلثی خطی

المانهای مورد استفاده در مسایل دو بعدی المانهای مثلثی خطی و درجه دو، و المانهای مربعی خطی و درجه دو هستند.

Constant Strain Triangle (CST or T3)

Linear Triangular Element



المان مثلثی خطی

در رئوس این المان سه گره وجود دارد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. هر گره دارای دو درجه آزادی (جابجایی در جهت x و y) است. تغییرمکان در داخل المان به صورت توابع خطی در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y, \quad v = b_4 + b_5 x + b_6 y \qquad (*)$$

b_i $(i=1,2,\ldots 6)$ اعداد ثابتی هستند.

با تغییرمکان فوق مقادیر کرنش عبارت است از:

$$\varepsilon_x = b_2, \quad \varepsilon_y = b_6, \quad \gamma_{xy} = b_3 + b_5$$

که مقادیر ثابتی برای کل المان خواهد بود. از این رو المان مثلثی خطی، المان مثلثی کرنش ثابت نیز نامیده می‌شود.

المان مثلثی خطی

تغییرمکان در گره‌ها عبارت است از:

$$u_1 = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1$$
$$u_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2$$
$$\vdots$$
$$v_3 = b_4 + b_5 x_3 + b_6 y_3$$

با حل این شش معادله میتوان مقادیر b_i $(i=1,2,\dots 6)$ برحسب تغییرمکان گره‌ها و مختصات گره‌ها به دست آورد. با جایگزینی مقادیر b_i در معادله (*) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

در این رابطه توابع شکل به صورت توابعی خطی از مختصات عبارت است از:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\}$$

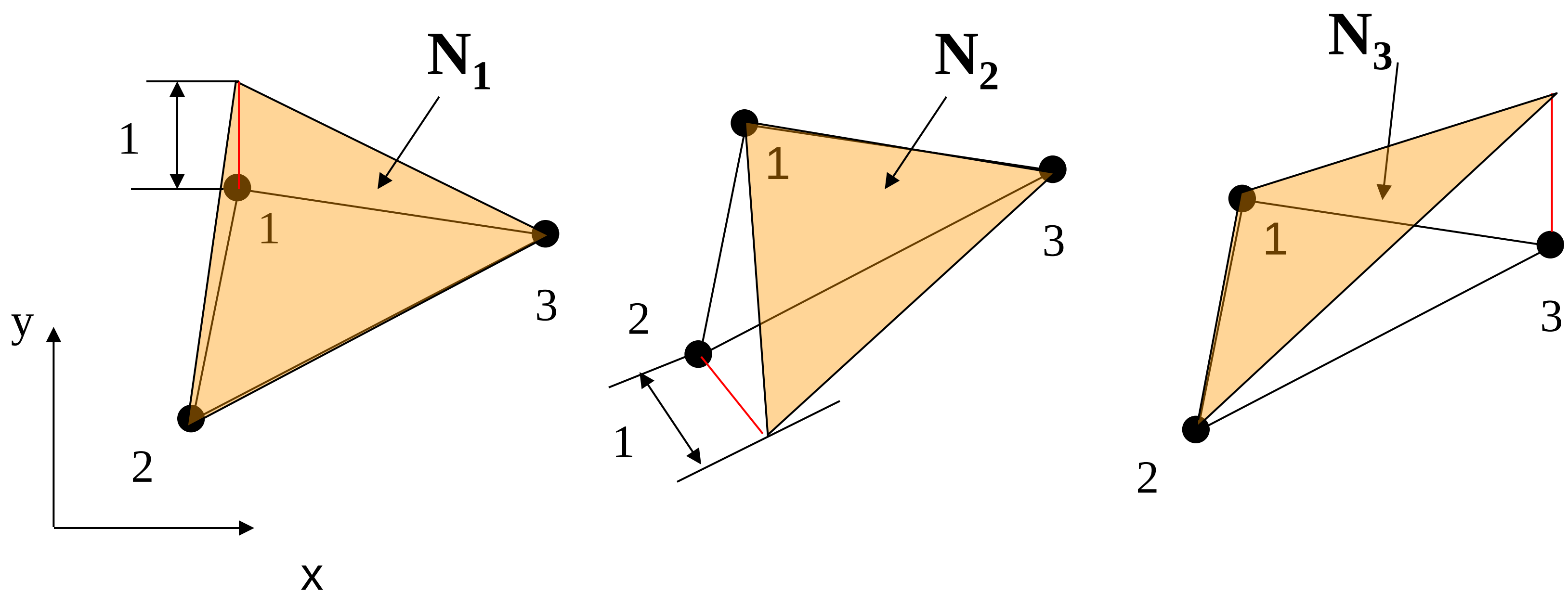
$$N_3 = \frac{1}{2A}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}$$

که در آن:

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:



$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{at node 'i'} \\ 0 & \text{at other nodes} \end{cases}$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

برای هر نقطه از المان:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{N}_{\mathrm{i}} = 1$$

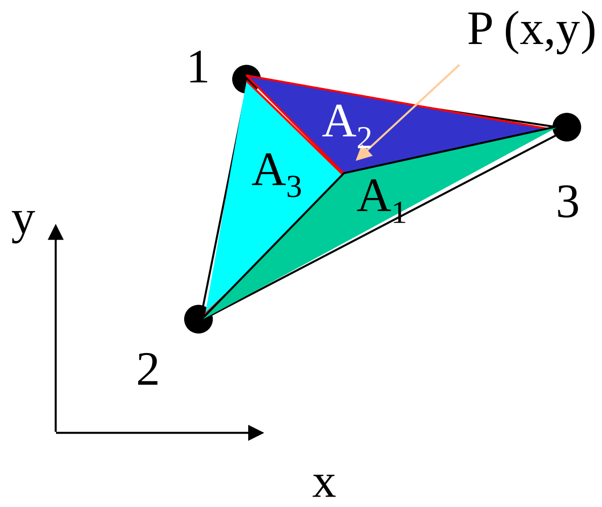
$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{N}_{\mathrm{i}} x_i = x$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{N}_{\mathrm{i}} y_i = y$$

المان مثلثی خطی

خصوصیات توابع شکل در المان مثلثی خطی:

برای هر نقطه از المان:



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$

المان مثلثی خطی

مقایر کرنش عبارت است از:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\mathbf{B}\,\mathbf{d}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3(x,y)}{\partial x}\end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

مقایر کرنش عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

که در آن $(i, j = 1, 2, 3)$ $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ است.

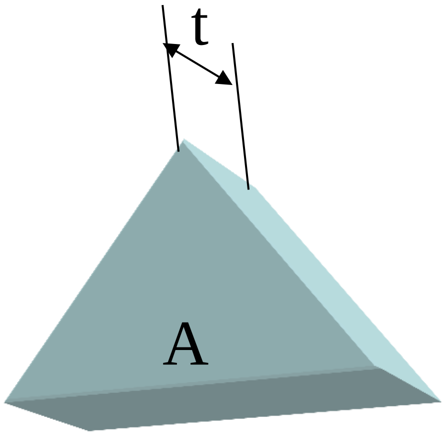
کرنشها برای کل المان مقادیر ثابتی هستند. با توجه به رابطه تنش-کرنش، تنش نیز برای کل المان ثابت خواهد بود .

$$\boxed{\sigma = \mathbf{EBd}}$$

المان مثلثی خطی

❖ ماتریس سختی برای المان برابر است با:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \, dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B})$$



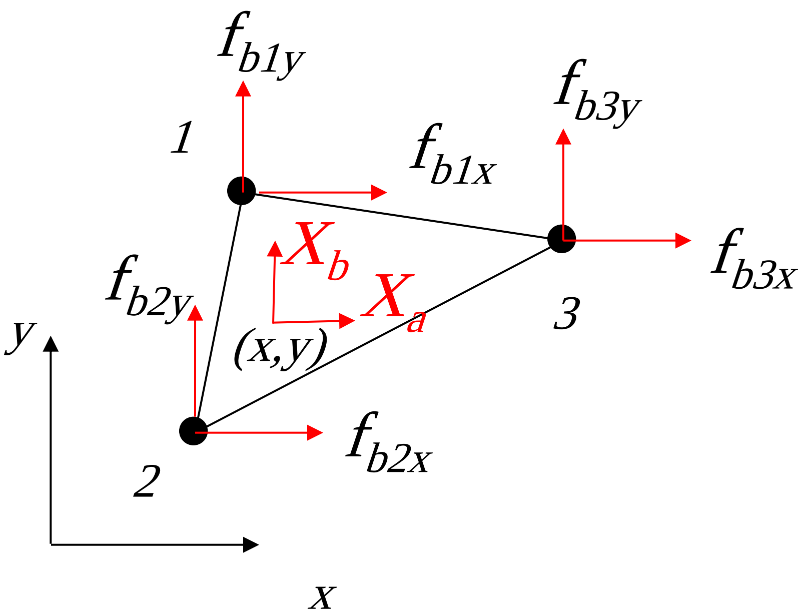
که یک ماتریس ۶×۶ متقارن خواهد بود.

t=thickness of the element
A=surface area of the element

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

$$\boldsymbol{f} = \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X}\ dV}_{f_b} + \underbrace{\int_{S_T{}^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S\ dS}_{f_S}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_b = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X}\, dV = t\int_{A^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{X}\, dA}$$



$$f_b = \begin{Bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \\ f_{b2x} \\ f_{b2y} \\ f_{b3x} \\ f_{b3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1 X_a\ dA \\ t\int_{A^e} N_1 X_b\ dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_a\ dA \\ t\int_{A^e} N_2 X_b\ dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_a\ dA \\ t\int_{A^e} N_3 X_b\ dA \end{Bmatrix}$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

مثال

If $X_a=1$ and $X_b=0$

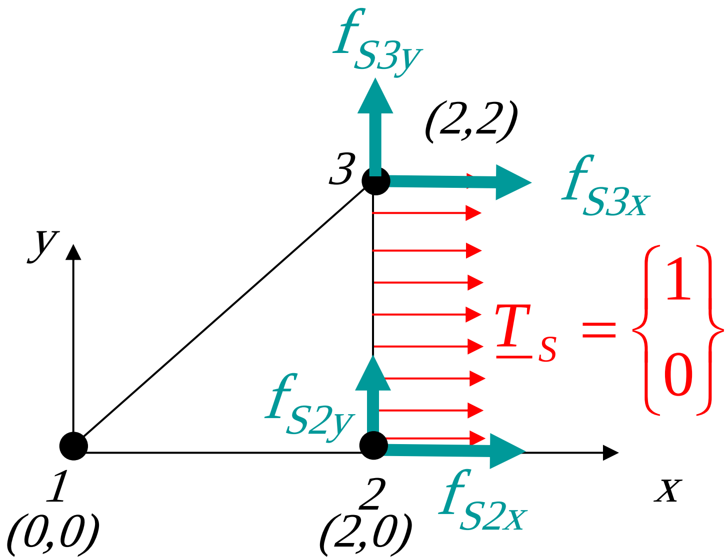
$$f_b=\begin{Bmatrix} f_{b1x}\\ f_{b1y}\\ f_{b2x}\\ f_{b2y}\\ f_{b3x}\\ f_{b3y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1X_a\ dA\\ t\int_{A^e} N_1X_b\ dA\\ t\int_{A^e} N_2X_a\ dA\\ t\int_{A^e} N_2X_b\ dA\\ t\int_{A^e} N_3X_a\ dA\\ t\int_{A^e} N_3X_b\ dA\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} t\int_{A^e} N_1dA\\ 0\\ t\int_{A^e} N_2\ dA\\ 0\\ t\int_{A^e} N_3dA\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{tA}{3}\\ 0\\ \frac{tA}{3}\\ 0\\ \frac{tA}{3}\\ 0\end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

$$\boldsymbol{f}_S = \int_{S_T{}^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S \, dS$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

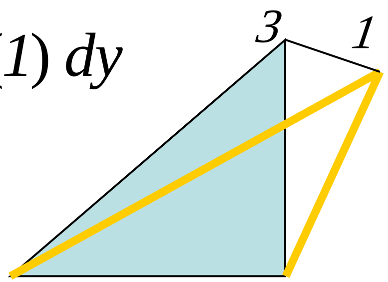
مثال



$$\boldsymbol{f}_S = \int_{l_{2-3}{}^e} \boldsymbol{N}^T \Big|_{along\ 2-3} \boldsymbol{T}_S \, dS$$

$$f_{S_{3x}} = t\int_{l_{2-3}{}^e} N_3\Big|_{along\ 2-3} (1)\, dy$$

$$= t\left(\frac{1}{2}\right) \times 2 \times 1 = t$$



Similarly, compute

$$f_{S_{2x}} = t$$

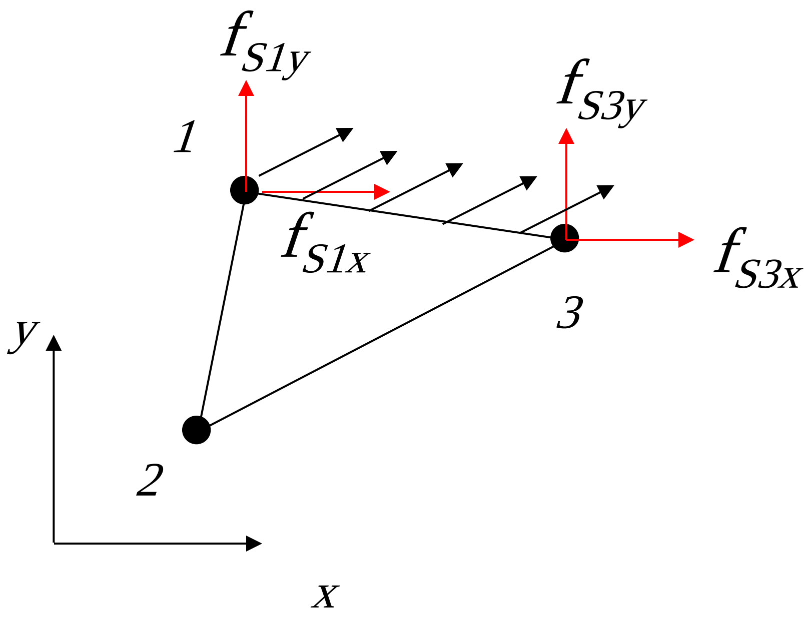
$$f_{S_{2y}} = 0$$

$$f_{S_{3y}} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_S = \int_{S_T{}^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{T}_S \; dS}$$

❖ نیروهای معادل در گره‌ها

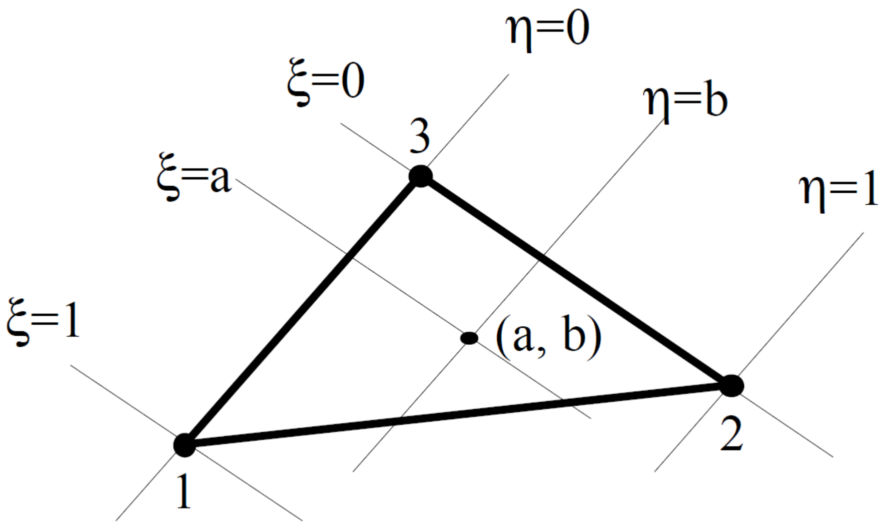
تمرین:



$$\boldsymbol{f}_S = t\int_{l_{1-3}{}^e} \boldsymbol{N}^T \Big|_{along\;1-3} \boldsymbol{T}_S \; dS$$

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

برای مختصات طبیعی (ξ,η) می توان توابع شکل به صورت زیر تعریف نمود :



$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

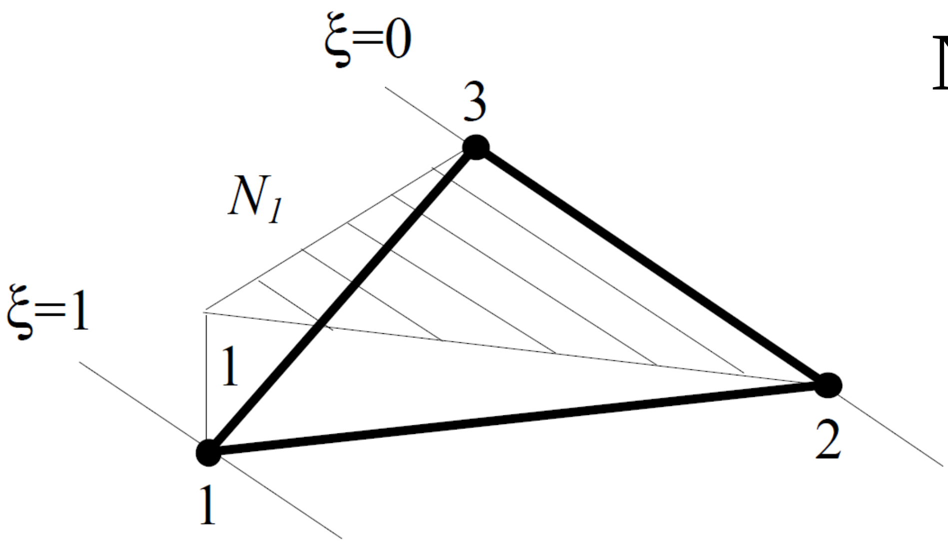
در این صورت:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

المان مثلثی خطی

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{در نقطه } i: \\ 0, & \text{در نقاط دیگر:} \end{cases}$$



المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

در اینجا دو دستگاه مختصات داریم: یکی مختصات طبیعی (ξ,η) که محلی است و دیگری دستگاه سراسری (x,y). رابطه این دو عبارت است از:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \qquad \rightarrow \qquad x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 \qquad\qquad y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

که در آن:

$$x_{ij} = x_i - x_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

تغییرمکان (u,v) در داخل المان قابل بیان برحسب (ξ,η) ویا برحسب (x,y) است.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

که در آن $\boldsymbol{J}$ به عنوان ژاکوبین ماتریس انتقال شناخته می شود و برابر است با:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13} = 2A$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 - u_3 \\ u_2 - u_3 \end{Bmatrix}$$

به صورت مشابه:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_3 \end{Bmatrix}$$

استفاده از معادلات فوق و رابطه $\varepsilon = \mathbf{Du} = \mathbf{DNd} = \mathbf{Bd}$ می‌توان ماتریس کرنش-تغییرمکان را به دست آورد.

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

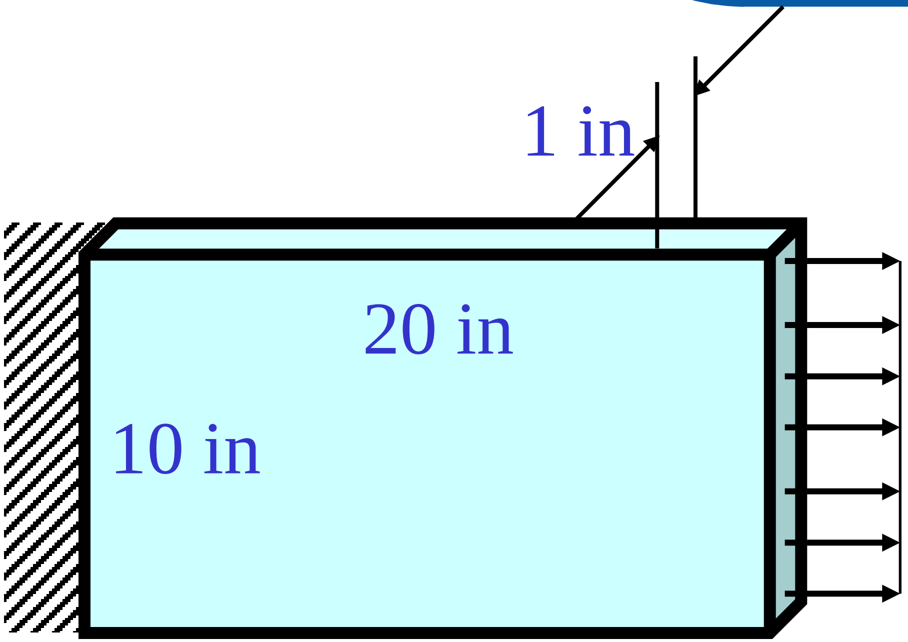
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

کاربردهای مهم المان مثلثی خطی:

* – استفاده برای سطوحی که دارای تغییرات کم کرنش هستند.
* – استفاده برای سطوحی که دارای شبکه انتقالی (از شبکه ریز به شبکه درشت) است.
* – قابل استفاده برای تخمین سریع و اولیه در مسایل دو بعدی
* – عدم استفاده در سطوحی که دارای تمرکز تنش و یا سطوح بحرانی سازه نظیر اطراف سوراخ‌ها و گوشه‌ها

المان مثلثی خطی

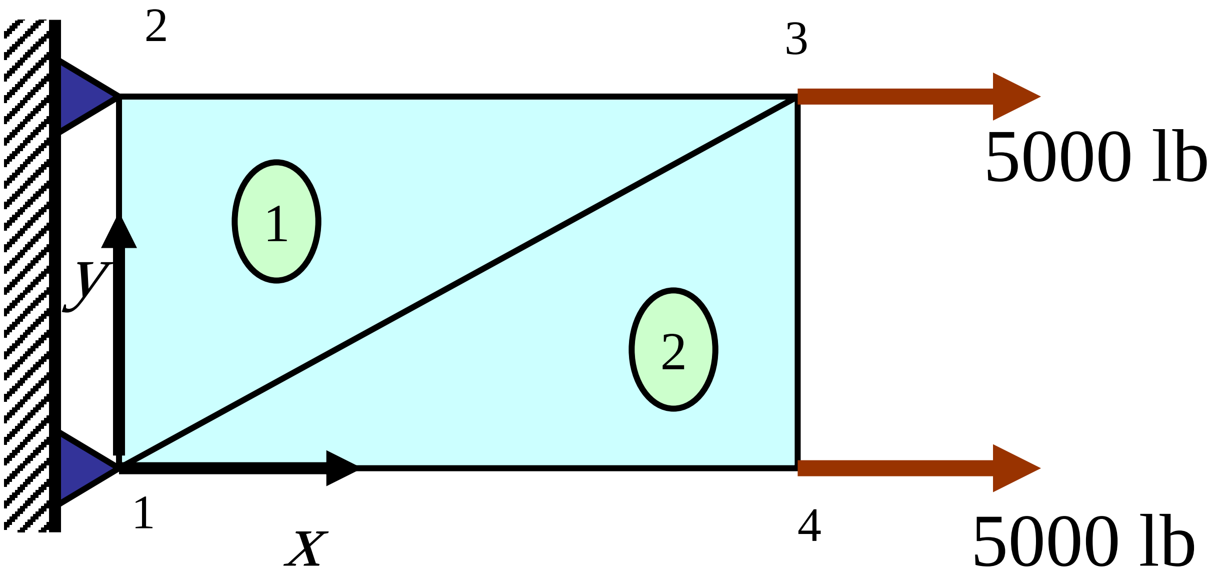
مثال : یک صفحه که در انتها تحت کشش قرار گرفته است.



$E = 30 \times 10^6$ psi

$\nu = 0.30$

مدل‌سازی مسئله با دو المان و نیروهای گره‌ای معادل



$$F = \frac{1}{2} T\, A$$

$$F = \frac{1}{2}(1000\ \text{psi})(1\ \text{in} \times 10\ \text{in})$$

$$F = 5000\ \text{lb}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه نیروها و تغییر مکان گره ها

$$[k] = t\,A\,[B]^T [E][B]$$

$$A = \frac{1}{2} b\,h = 100\,\text{in}^2$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}$$

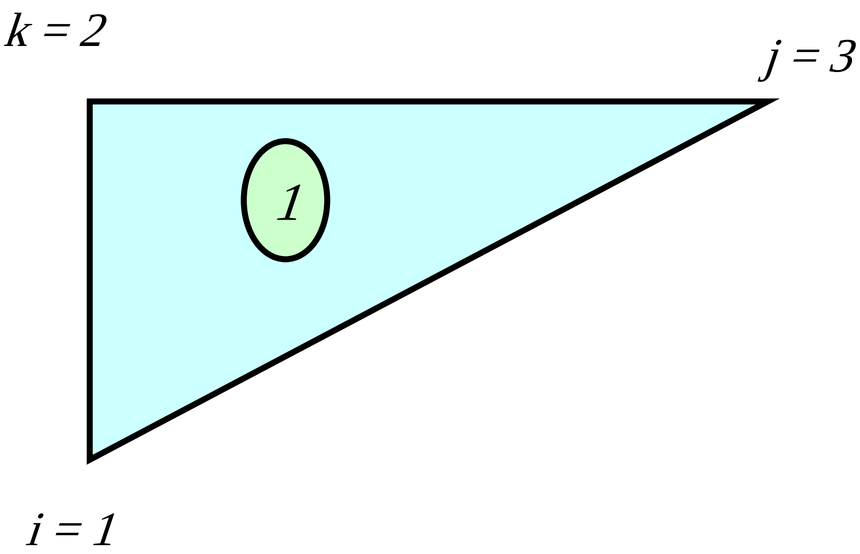
$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K]\{d\} = \{F\}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

المان اول



$$y_{jk} = y_j - y_k = 10 - 10 = 0$$
$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$
$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 10 = -10$$
$$x_{kj} = x_k - x_j = 0 - 20 = -20$$
$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 0 = 0$$
$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

المان اول

$$E = 30\times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{30\times 10^6 \text{ psi}}{(1-0.3^2)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.3}{2} \end{bmatrix} = \frac{30\times 10^6 \text{ psi}}{(0.91)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی المان اول

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}0&0&10&0&-10&0\\0&-20&0&0&0&20\\-20&0&0&10&20&-10\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&0.3&0\\0.3&1&0\\0&0&0.35\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[E]=\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}0&0&-7\\-6&20&0\\10&3&0\\0&0&3.5\\-10&-3&7\\6&20&-3.5\end{bmatrix}$$

$$[k]=t\,A\,[B]^T[E][B]=$$

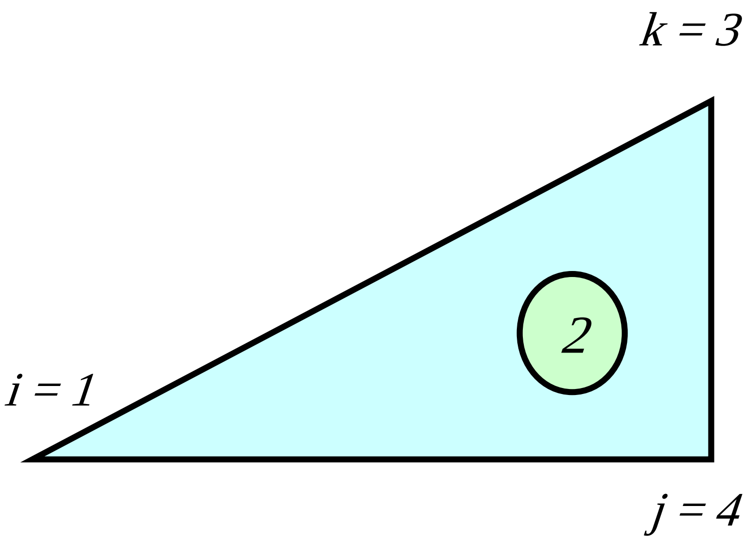
$$(1)(100)\frac{30\times10^6\text{ psi}}{(200)^2(0.91)}\begin{bmatrix}0&0&-7\\-6&20&0\\10&3&0\\0&0&3.5\\-10&-3&7\\6&20&-3.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&10&0&-10&0\\0&-20&0&0&0&20\\-20&0&0&10&20&-10\end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی المان اول

$$\left[\, k^{(1)} \,\right] = \frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی



المان دوم

$$y_{jk} = y_j - y_k = 0 - 10 = -10$$

$$y_{ki} = y_k - y_i = 10 - 0 = 10$$

$$y_{ij} = y_i - y_j = 0 - 0 = 0$$

$$x_{ki} = x_k - x_j = 20 - 20 = 0$$

$$x_{ik} = x_i - x_k = 0 - 20 = -20$$

$$x_{ji} = x_j - x_i = 20 - 0 = 20$$

$$[B] = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی

المان دوم

$$[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[E]=\frac{30\times10^{6}\ \mathrm{psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0\\ 0.3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[E]=\frac{30\times10^{6}\ \mathrm{psi}}{(200)(0.91)}\begin{bmatrix}-10 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3.5\\ 10 & 0 & -20\\ 0 & -20 & 10\\ 0 & 0 & 20\\ 0 & 20 & 0\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{k}]=t\,A\,[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}[E][\mathrm{B}]=$$

$$(1)(100)\frac{30\times10^{6}\ \mathrm{psi}}{(200)^{2}(0.91)}\begin{bmatrix}-10 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3.5\\ 10 & 0 & -20\\ 0 & -20 & 10\\ 0 & 0 & 20\\ 0 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

ماتریس سختی

المان دوم

$$\left[k^{(2)} \right] = \frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

سوار کردن ماتریس سختی

$$[\mathbf{K}]=\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\mathbf{k}_{11}^{(1)}+\mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)}+\mathbf{k}_{13}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ \hdashline
\mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & 0 \\ \hdashline
\mathbf{k}_{21}^{(1)}+\mathbf{k}_{31}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)}+\mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{k}_{32}^{(2)} \\ \hdashline
\mathbf{k}_{21}^{(2)} & 0 & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)}
\end{array}\right]$$

سوار کردن ماتریس سختی

$$[K]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} k_{11}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{13}^{(1)} & k_{12}^{(1)}+k_{13}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ \hdashline k_{31}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & 0 \\ \hdashline k_{21}^{(1)}+k_{31}^{(2)} & k_{23}^{(1)} & k_{22}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ \hdashline k_{21}^{(2)} & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{array}\right]=$$

$$\frac{75000}{0.91}\begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 & 0 & -130 & -100 & 60 \\ 0 & 435 & 60 & -400 & -130 & 0 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & 240 & -130 & -100 & 71 & 0 & 0 \\ 70 & -400 & -130 & 435 & 60 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & -130 & -100 & 60 & 240 & 0 & -140 & 70 \\ -130 & 0 & 70 & -35 & 0 & 435 & 60 & -400 \\ -100 & 70 & 0 & 0 & -140 & 60 & 240 & -130 \\ 60 & -35 & 0 & 0 & 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه

$$\begin{Bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{75000}{0.91} \begin{bmatrix} 240 & 0 & -140 & 70 \\ 0 & 435 & 60 & -400 \\ -140 & 60 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & -130 & 435 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 609.6 \\ 4.2 \\ 663.7 \\ 104.1 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \text{ in}$$

Compare with:

$$\delta = \frac{PL}{AE} = 670 \times 10^{-6} \text{ in}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه کرنش‌ها در المان اول

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B]\{d\}=\frac{1}{(200)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{1y}\\ d_{3x}\\ d_{3y}\\ d_{2x}\\ d_{2y}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(200)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20\\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 609.6\times10^{-6}\text{ in}\\ 4.2\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{(200)}\begin{Bmatrix}6096\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 42\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}30.48\times10^{-6}\text{ in}\\ 0\\ 0.21\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه تنش‌ها در المان اول

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} = \frac{30\times10^6 \text{ psi}}{(0.91)} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30.48\times10^{-6} \text{ in} \\ 0 \\ 0.21\times10^{-6} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1005 \\ 301 \\ 2.4 \end{Bmatrix} \text{psi}$$

المان مثلثی خطی

محاسبه کرنش‌ها

در المان دوم

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B]\{d\}=\frac{1}{200}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x}\\ d_{1y}\\ d_{4x}\\ d_{4y}\\ d_{3x}\\ d_{3y}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{200}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20\\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 663.7\times10^{-6}\text{ in}\\ 104.1\times10^{-6}\text{ in}\\ 609.6\times10^{-6}\text{ in}\\ 4.2\times10^{-6}\text{ in}\end{Bmatrix}$$

تنش‌ها در المان دوم

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[E]\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}995\\ -1.2\\ -2.4\end{Bmatrix}\text{psi}$$

Principal stresses:

محاسبه تنش‌های
اصلی در المان دوم

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min}$$

Principal angle:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Principal stresses:

محاسبه تنش‌های اصلی در المان دوم

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = \frac{995 + (-1.2)}{2} + \left[\left(\frac{995 - (-1.2)}{2}\right)^2 + (-2.4)^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = 497 + 498 = 995 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{995 + (-1.2)}{2} - 498 = -1.1 \text{ psi}$$

Principal angle:

$$\theta_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2(-2.4)}{995 - (-1.2)}\right] = 0^\circ$$

المان مثلثی خطی

مثال ۲: یک تیر که در انتها تحت خمش خالص قرار گرفته است.