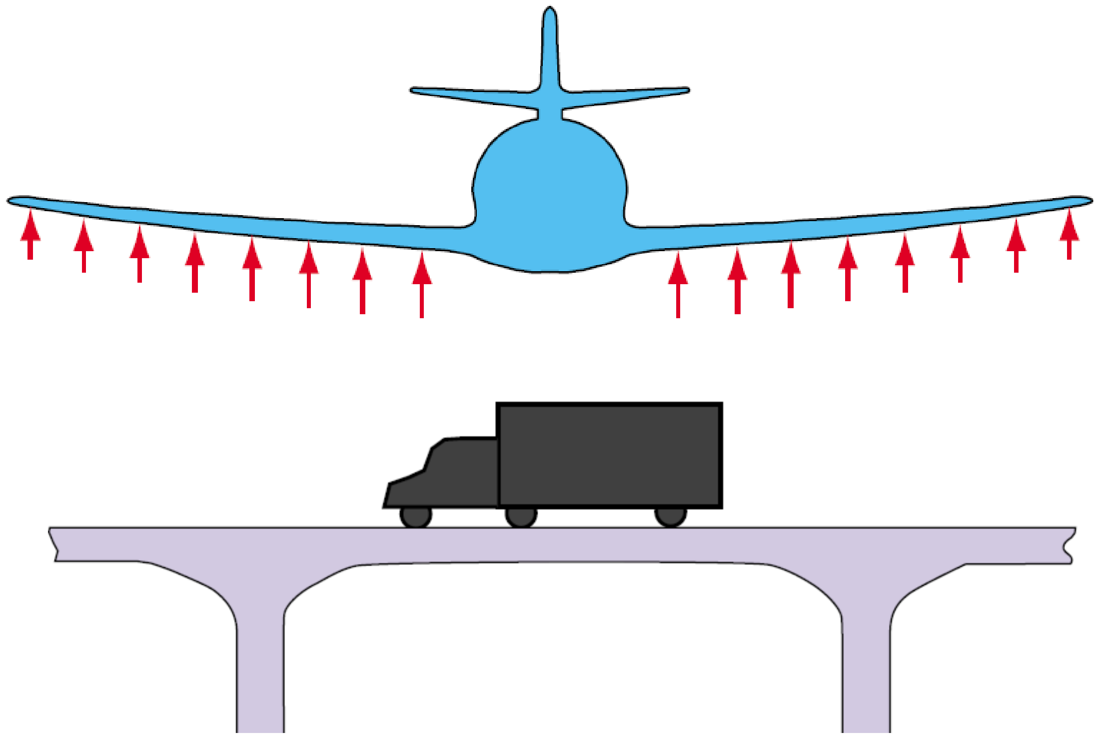
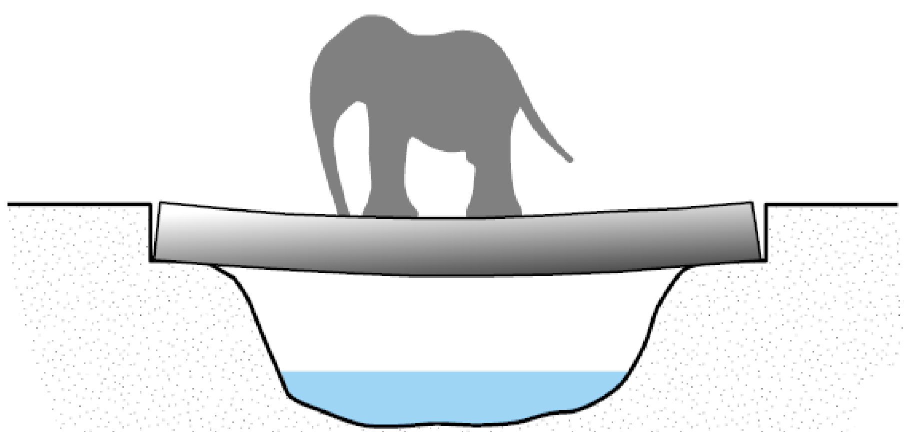
المان تیر صفحه‌ای

Simple Plane Beam Element

Beam Element المان تیر

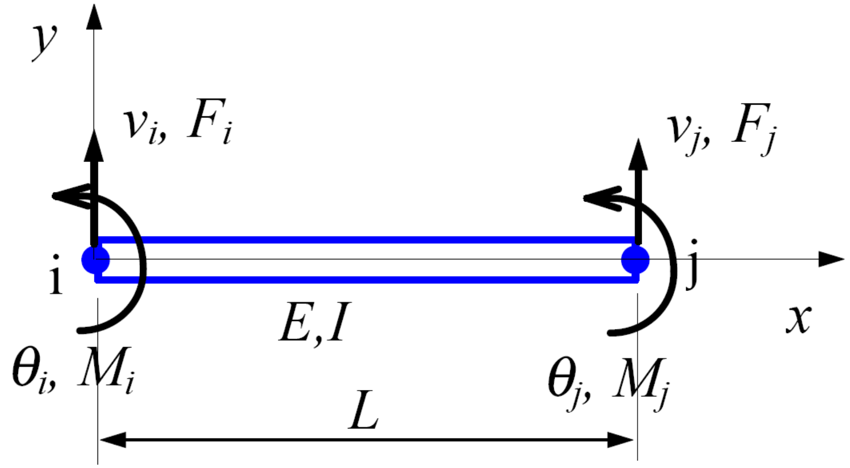


Cantilever



Simply Supported

المان تیر صفحه ای



L: طول تیر

I: ممان اینرسی سطح مقطع تیر

E : مدول الاستیسیته

$v = v(x)$: تغییرمکان (عرضی) محور خنثی

$\theta = \dfrac{dv}{dx}$: دوران حول محور z

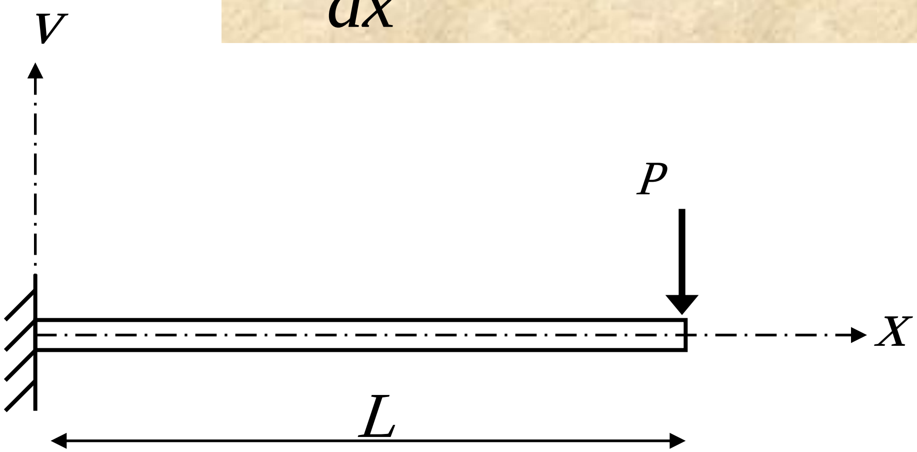
$F = F(x)$: نیروی برشی

$M = M(x)$: ممان حول محور z

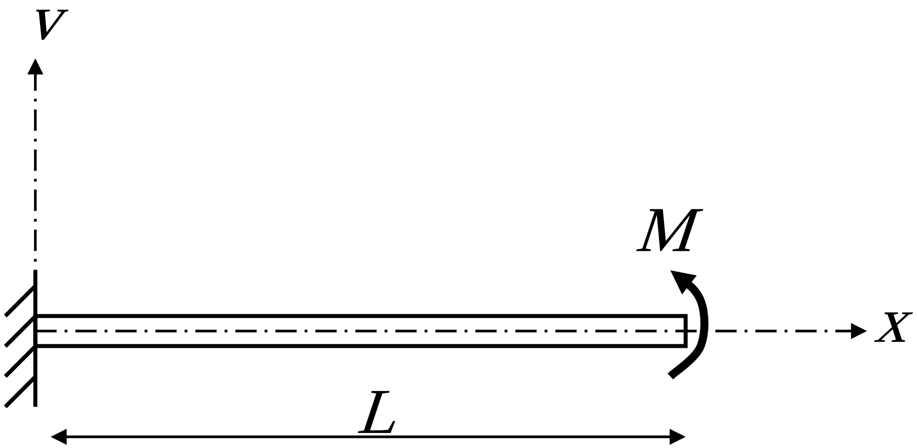
المان تیر صفحه ای

یادآوری:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x), \qquad \sigma = -\frac{My}{I}$$



$$v_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}, \quad \theta_{max} = -\frac{PL^2}{2EI}$$



$$v_{max} = \frac{ML^2}{2EI}, \quad \theta_{max} = \frac{ML}{EI}$$

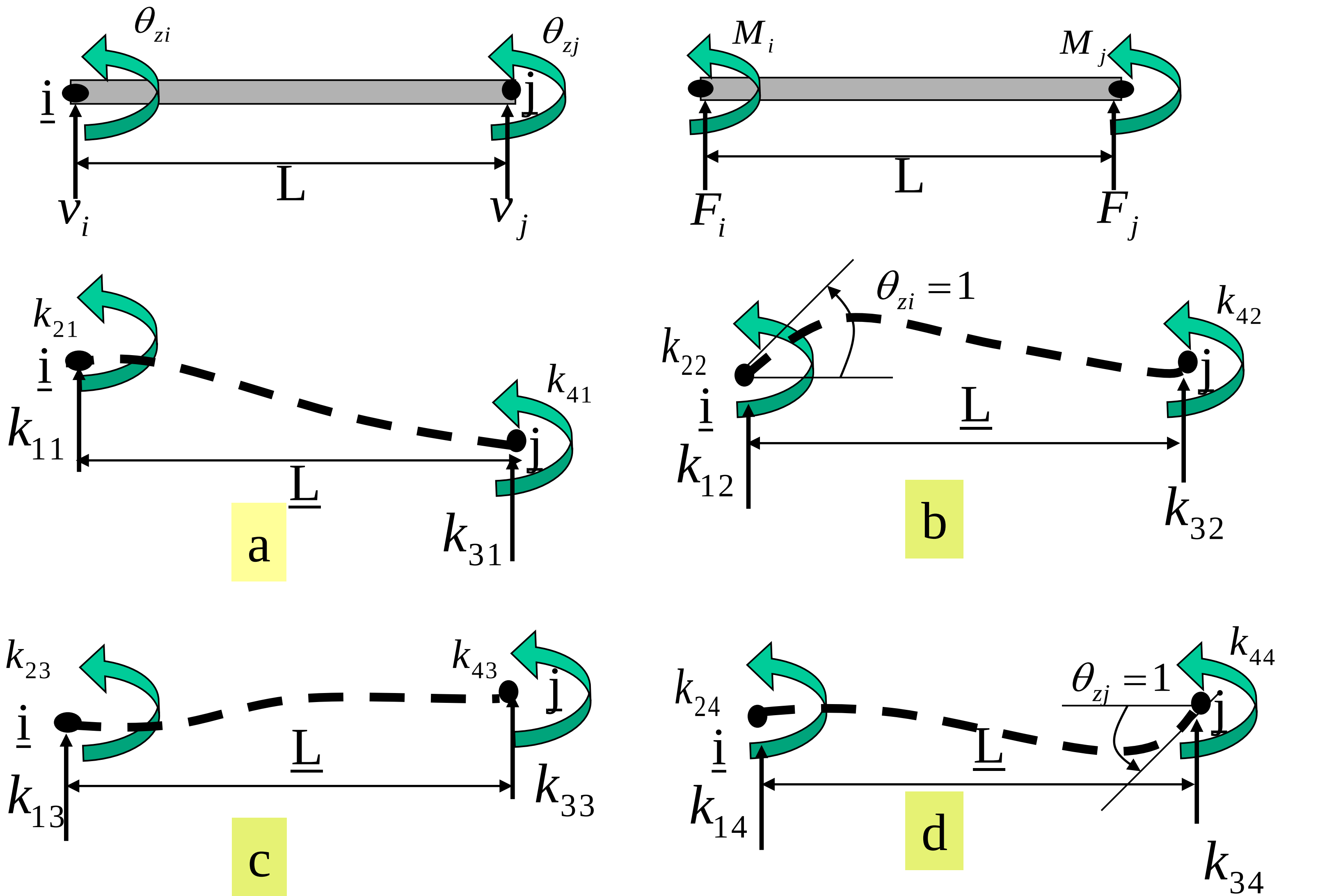
محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم

يادآوری :

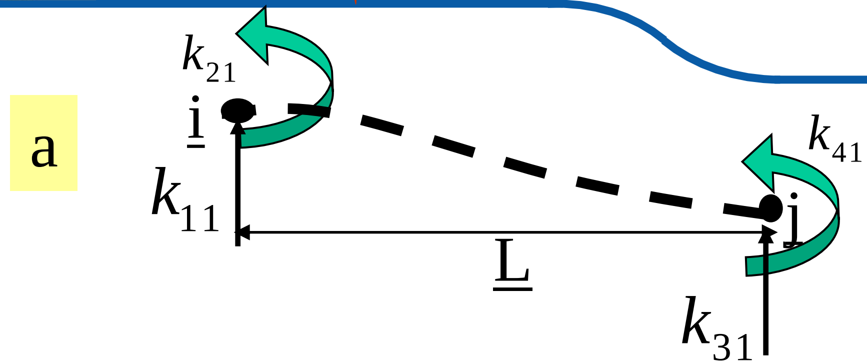
ستون nام ماتریس (K) بیانگر نیروهای اعمال شده به المان است وقتی که تغییر مکان در گره nام برابر یک و تغییرمکان در بقیه گره‌ها صفر باشند.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{v_i} \\ \cancel{\theta_i} \\ \cancel{v_j} \\ \cancel{\theta_j} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم



محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم



برای گره ۱، در حالت a:

$$v_1 = 1 \quad @node\ 1 \Rightarrow \frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1$$

برای گره ۱ ، در حالت a:

$$\theta_{z1} = 0 \quad @\text{node } 1 \Rightarrow -\frac{k_{11}L^2}{2EI} + \frac{k_{21}L}{EI} = 0$$

تعادل نیرو در جهت y، در حالت a:

$$\sum (Force)_y = 0 \Rightarrow k_{11} + k_{31} = 0$$

تعادل ممان حول گره ۲ ، در حالت a:

$$\sum (Moment)_{node2} = 0 \Rightarrow k_{21} + k_{41} - k_{11}L = 0$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم

❖ با نوشتن معادلات تعادل برای بقیه حالتها (b,c,d) بقیه عناصر ماتریس سختی، $\boldsymbol{k}$، به دست می‌آید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{array} \\ \dfrac{EI}{L^3} & \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

مقدار انرژی ذخیره شده در تیر برابر است با:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(-\frac{My}{I}\right)^T \frac{1}{E}\left(-\frac{My}{I}\right) dA dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^T EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L (\mathbf{Bu})^T EI (\mathbf{Bu}) dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx\right)\mathbf{u}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

ماتریس سختی:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B}dx$$

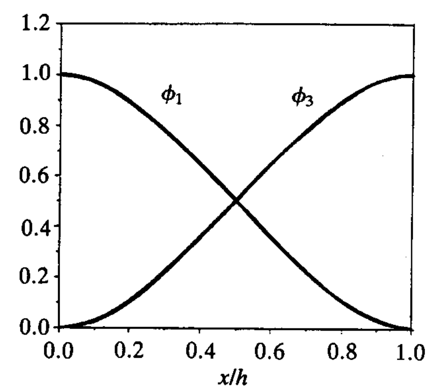
برای المان تیر توابع شکل به صورت زیر معرفی می‌شوند:

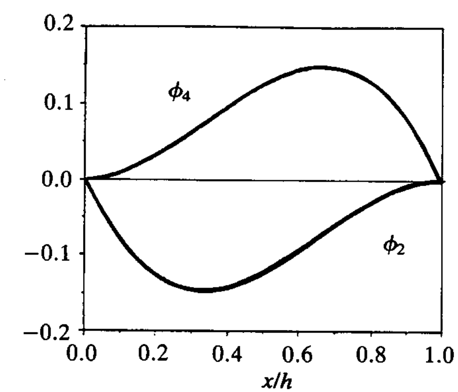
$$N_1(x) = 1 - 3x^2 / L^2 + 2x^3 / L^3$$

$$N_2(x) = x - 2x^2 / L + x^3 / L$$

$$N_3(x) = 3x^2 / L^2 - 2x^3 / L^3$$

$$N_4(x) = -x^2 / L + x^3 / L^2$$





Assume displacement function (Without distributing loading, w(x)=0)

(A) *satisfy basic beam D.E.* $(EI\dfrac{d^4v}{dx^4}=0)$ $\qquad v(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

(B) 4 *total D.O.Fs* $(v_i,\theta_i,v_j,\theta_j)$

(C) *satisty the conditions of displacement & slope continuity at nodes.*

Express v(x) as a function of nodal displacements as follows.

$$v(0)=v_i=a_4$$

$$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_i=a_3$$

$$v(L)=v_j=a_1L^3+a_2L^2+a_3L+a_4$$

$$\frac{dv(L)}{dx}=\theta_j=3a_1L^2+2a_2L+a_3$$

$$\therefore v(x)=\left[\frac{2}{L^3}(v_i-v_j)+\frac{1}{L^2}(\theta_i+\theta_j)\right]x^3+\left[-\frac{3}{L^2}(v_i-v_j)-\frac{1}{L}(\theta_i+\theta_j)\right]x^2+\theta_i x+v_i$$

In matrix form, we have

$$v=[N]\{u\}=[N_1,N_2,N_3,N_4]\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$N_1=\frac{1}{L^3}\left(2x^3-3x^2L+L^3\right)\ ,\quad N_2=\frac{1}{L^3}\left(x^3L-2x^2L^2+xL^3\right)$$

$$N_3=\frac{1}{L^3}\left(-2x^3+3x^2L\right)\ ,\quad N_4=\frac{1}{L^3}\left(Lx^3-L^2x^2\right)$$

$$N_1,N_2,N_3,N_4:\textit{shape functions for a beam element.}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

تغییرمکان در المان را برحسب تغییرمکان گره برابر است با

$$v(x) = \mathbf{Nu} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

دقت کنید که همگی توابع درجه ۳ هستند و برای توابع شکل داریم:

$$N_1 + N_3 = 1$$

$$N_2 + N_3 L + N_4 = x$$

که بیانگر توانایی بیان حرکت جسم صلب توسط این توابع شکل است.

مقدار انحنای تیر برابر است با:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

بنابراین ماتریس کرنش-تغییرمکان (B) تیر برابر است با:

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N} = \left[N_1''(x) \quad N_2''(x) \quad N_3''(x) \quad N_4''(x) \right]$$

$$= \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

بنابراین برای المان تیر داریم:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B}\, dx$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم

با قرار ماتریس B وانتگرال‌گیری ماتریس سختی:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- حالت کلی

❖ با ترکیب سختی محوری (المان میله)، می توان ماتریس سختی برای المان تیر صفحه ای در حالت کلی را به دست آورد

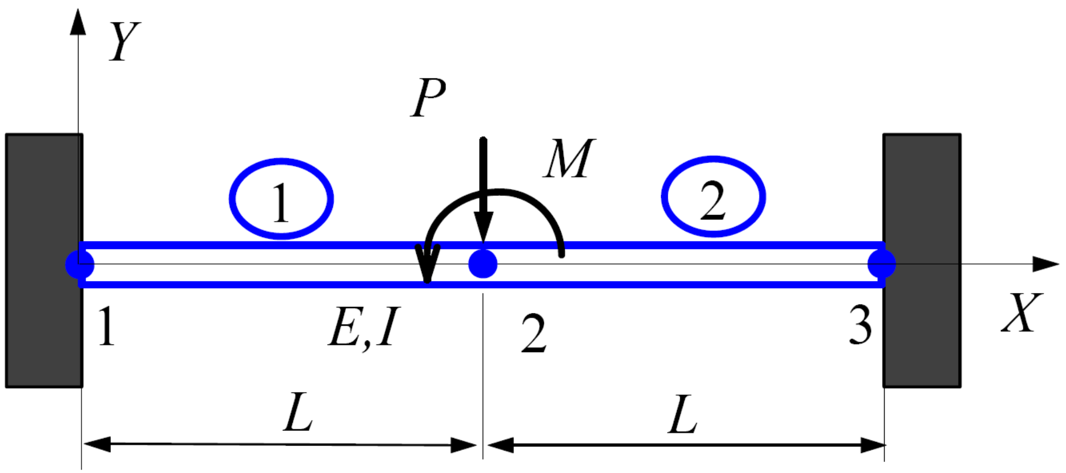
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

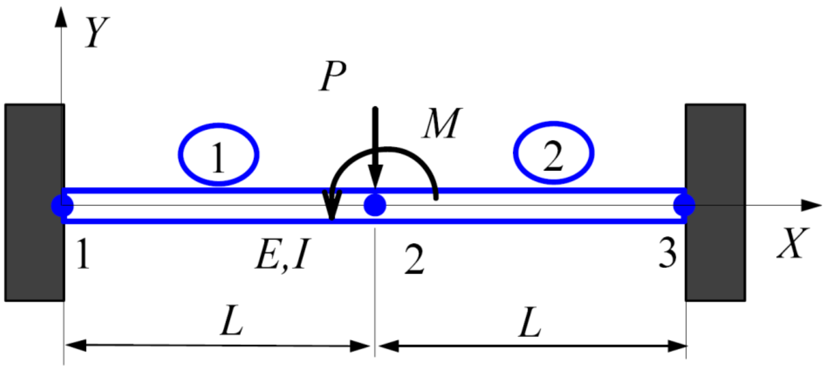
المان تیر: مثال ۱

مثال ۱: برای تیر زیر که در دو انتها گیردار شده است، نیروی P و گشتاور M در وسط تیر اعمال می‌گردد مطلوبست:

الف- تغییرمکان و چرخش زاویه‌ای در گره وسط تیر؟

ب- گشتاور و نیروهای عکس‌العمل در دو انتهای تیر؟





ماتریس سختی برای دو المان تیر عبارتند از:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \mathbf{k}_1 = \dfrac{EI}{L^3} & \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = \dfrac{EI}{L^3} & \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

با سوار کردن ماتریس‌های سختی داریم:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ \hdashline -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ \hdashline 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array}\right] \end{array} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$F_{2Y} = -P, \qquad M_2 = M,$$

$$v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

المان تیر: مثال ۱

با اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

و با حل آن

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI}\begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}$$

از معادلات تعادل می‌توان دیگر مجهولات را به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 2P+3M/L \\ PL+M \\ 2P-3M/L \\ -PL+M \end{Bmatrix}$$

المان تیر: مثال ۱

از معادله زیر می‌توان مقدار تنش در دو انتهای تیر را به دست آورد:

$$\sigma = \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

Note that the FE solution is exact according to the simple beam theory, since no distributed load is present between the nodes. Recall that,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \quad \text{and} \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (V \text{ - shear force in the beam})$$

$$\frac{dV}{dx} = q \quad (q \text{ - distributed load on the beam})$$

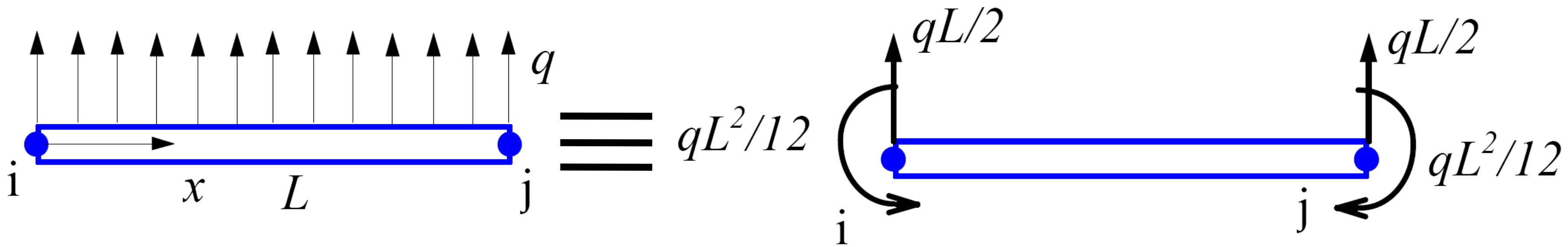
Thus,

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

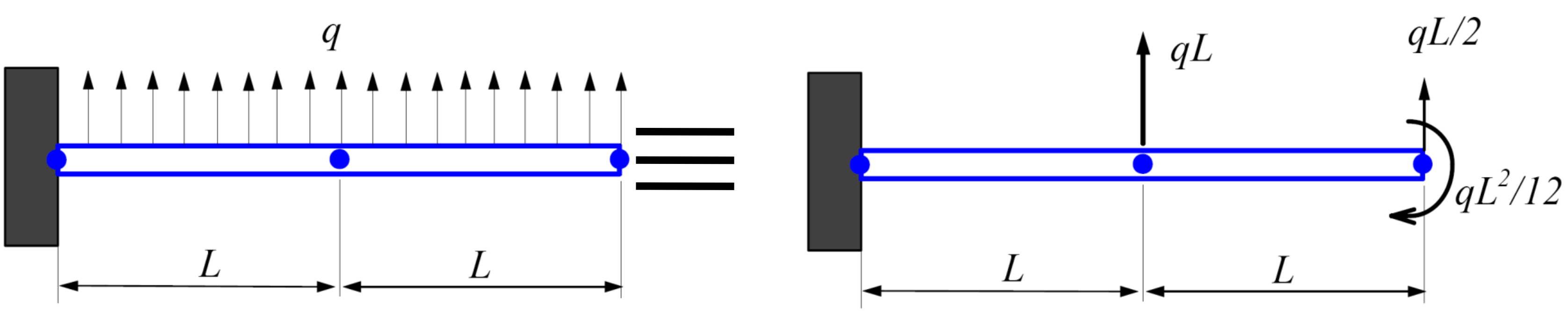
If q(x)=0, then exact solution for the deflection v is a cubic function of x, which is what described by our shape functions.

المان تیر؛ نیروی معادل

❖ محاسبه نیروی معادل برای بارهای گسترده



با مساوی قرار دادن کار معادل می توان اثبات نمود.

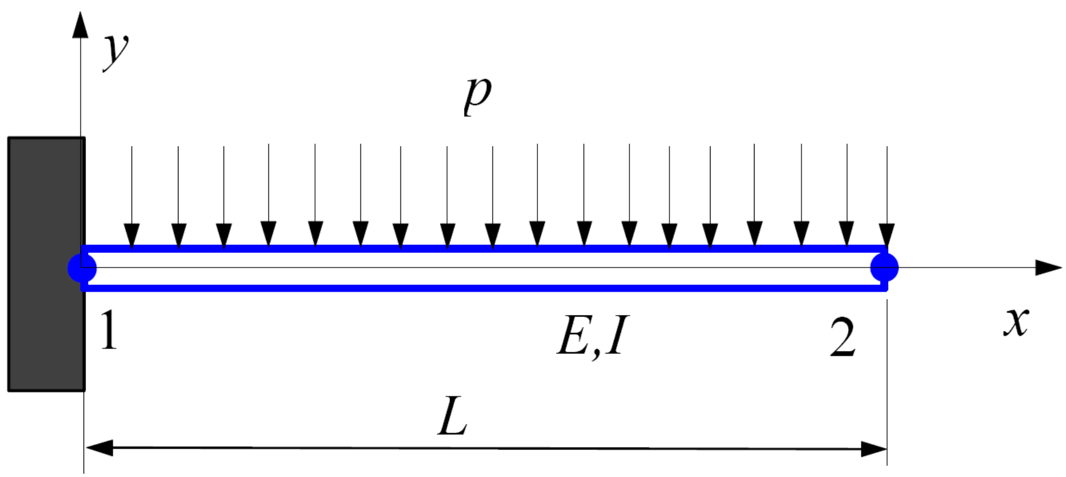


تمرین: اثبات نمایید.

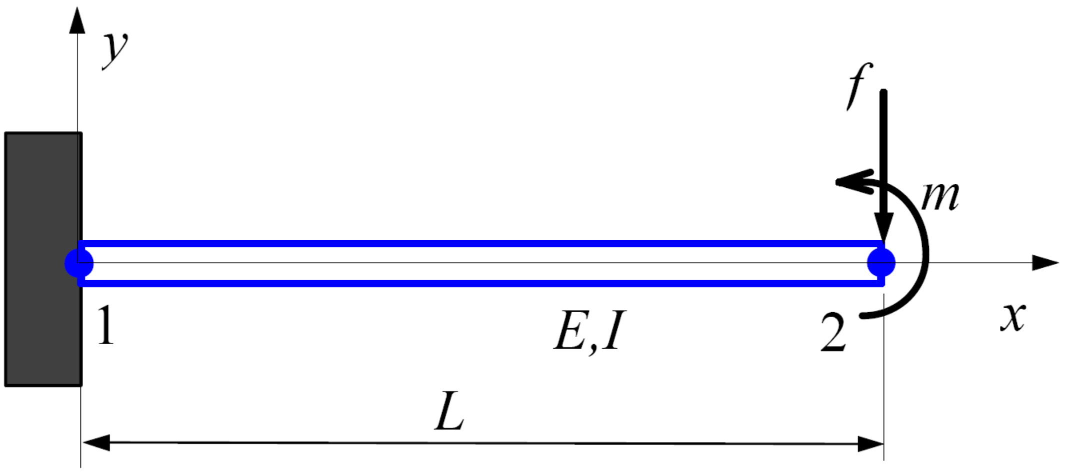
مثال ۲: برای تیر زیر که در یک انتها گیردار است، نیروی گسترده p بر روی تیر اعمال می‌شود مطلوبست:

الف- تغییرمکان و چرخش زاویه‌ای در گره سمت راست تیر؟

ب- گشتاور و نیروهای عکس‌العمل در گره سمت چپ تیر؟



با معادل قرار دادن کار معادل، نیروهای گره ای معادل برابر است با:



$$f = pL/2, \qquad m = pL^2/12$$

المان تیر: مثال ۲

با سوار کردن ماتریس‌های سختی داریم:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$F_{2Y} = -f, \qquad M_2 = m$$

$$v_1 = \theta_1 = 0$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ m \end{Bmatrix}$$

المان تیر: مثال ۲

و با حل آن

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI}\begin{Bmatrix} -2L^2 f + 3Lm \\ -3Lf + 6m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/8EI \\ -pL^3/6EI \end{Bmatrix} \qquad \text{(A)}$$

These nodal values are the same as the exact solution. Note that the deflection $v(x)$ (for $0 < x < L$) in the beam by the FEM is, however, different from that by the exact solution. The exact solution by the simple beam theory is a 4th order polynomial of x, while the FE solution of v is only a 3rd order polynomial of x.

If the equivalent moment m is ignored, we have,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI}\begin{Bmatrix} -2L^2 f \\ -3Lf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/6EI \\ -pL^3/4EI \end{Bmatrix} \quad \text{(B)}$$

The errors in (B) will decrease if more elements are used. The equivalent moment m is often ignored in the FEM applications. The FE solutions still converge as more elements are applied.

From the FE equation, we can calculate the reaction force and moment as, where the result in (A) is used.

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

This force vector gives the total effective nodal forces which include the equivalent nodal forces for the distributed lateral load p given by,

$$\begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

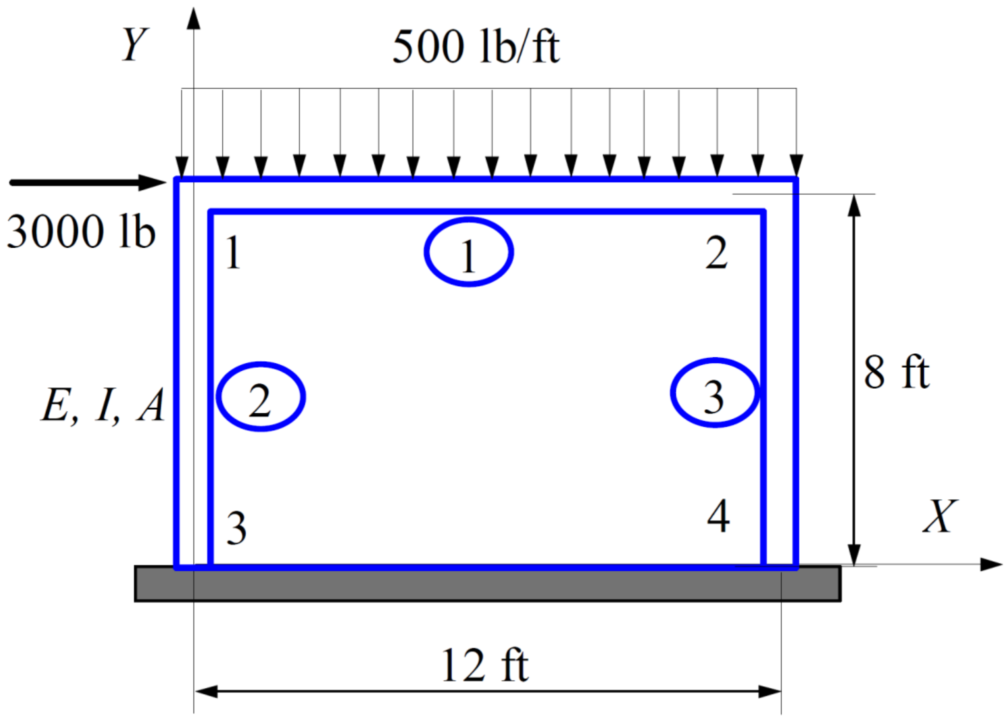
The correct reaction forces can be obtained as follows,

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2/2 \end{Bmatrix}$$

Check the results!

FE Analysis of Frame Structures

Members in a frame are considered to be rigidly connected. Both forces and moments can be transmitted through their joints. We need the general beam element (combinations of bar and simple beam elements) to model frames.

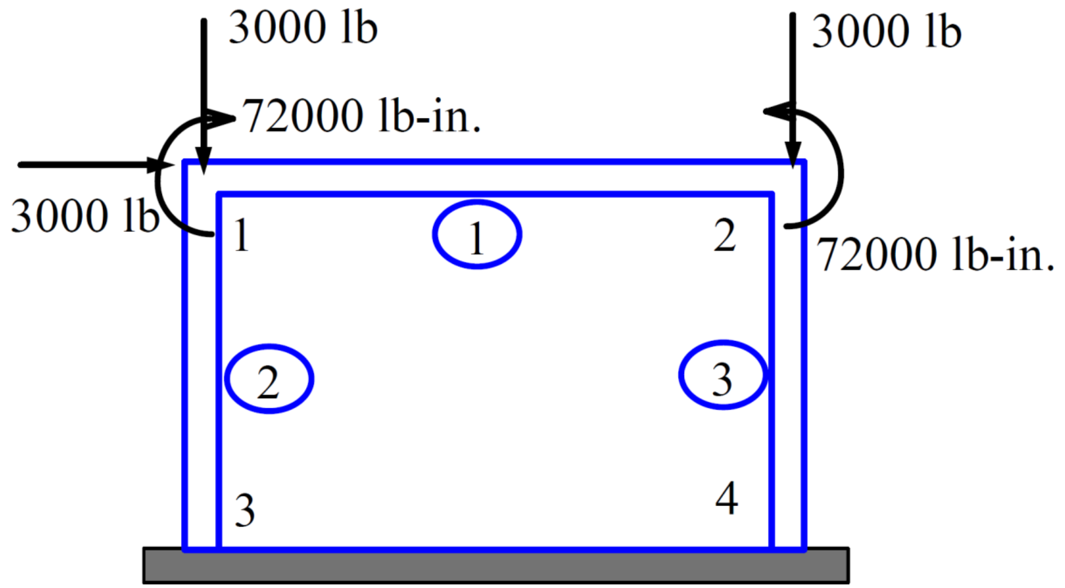


Given: $E = 30 \times 10^6$ psi, $I = 65$ in.^{4}, $A = 6.8$ in.^{2}

Find: Displacements and rotations of the two joints 1 and 2.

Solution:

Solution: For this example, we first convert the distributed load to its equivalent nodal loads.



In local coordinate system, the stiffness matrix for a general 2-D beam element is

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Element Connectivity Table

Element	*Node i (1)*	*Node j (2)*
1	1	2
2	3	1
3	4	2

For element 1

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1' = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 0 & 56.4 & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 0.784 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 0 & -56.4 & 5417 \end{bmatrix} \end{array}$$

For elements 2 and 3, we have the stiffness matrix in local system,

$$
\mathbf{k}_2' = \mathbf{k}_3' = 10^4 \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_i' & v_i' & \theta_i' & u_j' & v_j' & \theta_j' \end{array} \\
\begin{bmatrix}
212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\
0 & 2.65 & 127 & 0 & -2.65 & 127 \\
0 & 127 & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\
-212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\
0 & -2.65 & -127 & 0 & 2.65 & -127 \\
0 & 127 & 4063 & 0 & -127 & 8125
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

where i=3, j=1 for element 2 and i=4, j=2 for element 3.

In general, the transformation matrix **T** is,

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

We have $l = 0$, $m = 1$ for both elements 2 and 3. Thus,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using the transformation relation, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}'\mathbf{T}$

we obtain the stiffness matrices in the global coordinate system for elements 2 and 3,

$$
\mathbf{k}_2 = 10^4 \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\
0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\
-127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\
-2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\
0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\
-127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

and

$$
\mathbf{k}_3 = 10^4 \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\
0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\
-127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\
-2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\
0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\
-127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Assembling the global FE equation and noticing the following boundary conditions,

$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{1X} = 3000\,\text{lb},\ \ F_{2X} = 0,\ \ F_{1Y} = F_{2Y} = -3000\,\text{lb},$$

$$M_1 = -72000\,\text{lb}\cdot\text{in.},\ \ M_2 = 72000\,\text{lb}\cdot\text{in.}$$

we obtain the condensed FE equation,

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 127 & 56.4 & 13542 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 144.3 & 0 & 127 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 213.3 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 127 & -56.4 & 13542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \end{Bmatrix}$$

Solving this, we get

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.092\,\text{in.} \\ -0.00104\,\text{in.} \\ -0.00139\,\text{rad} \\ 0.0901\,\text{in.} \\ -0.0018\,\text{in.} \\ -3.88\times 10^{-5}\,\text{rad} \end{Bmatrix}$$

To calculate the reaction forces and moments at the two ends,we employ the element FE equations for element 2 and element 3. We obtain,

$$\begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672.7\,\text{lb} \\ 2210\ \text{lb} \\ 60364\ \text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_{4X} \\ F_{4Y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2338\,\text{lb} \\ 3825\ \text{lb} \\ 112641\ \text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix}$$

Check the results: Draw the free-body diagram of the frame. Equilibrium is maintained with the calculated forces and moments.