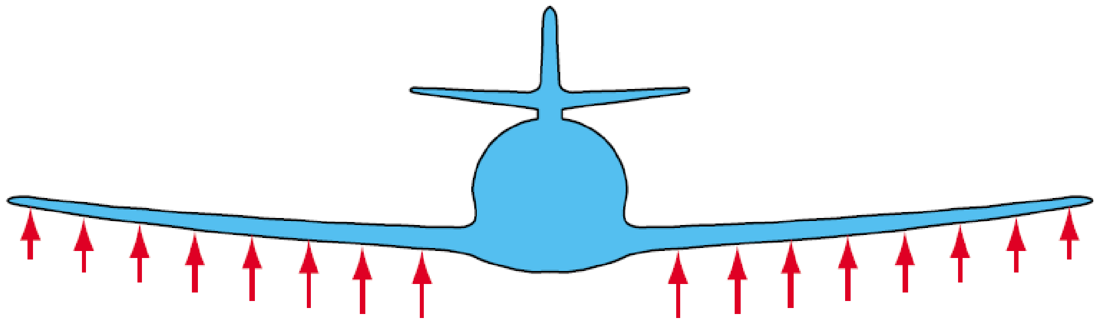
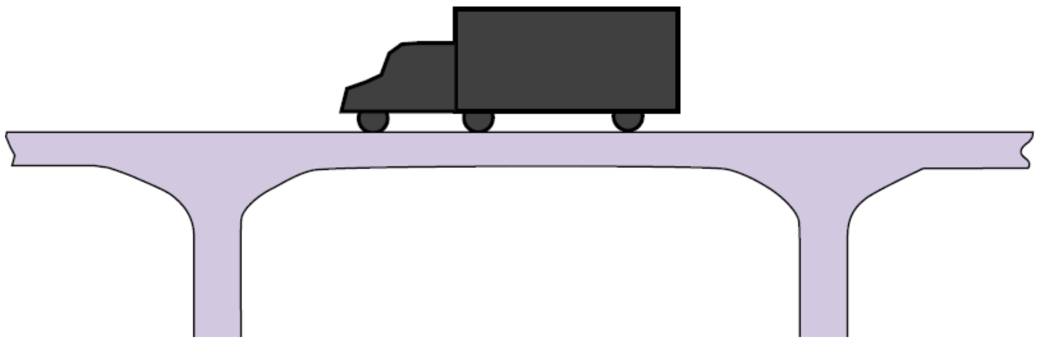
المان تیر صفحه‌ای

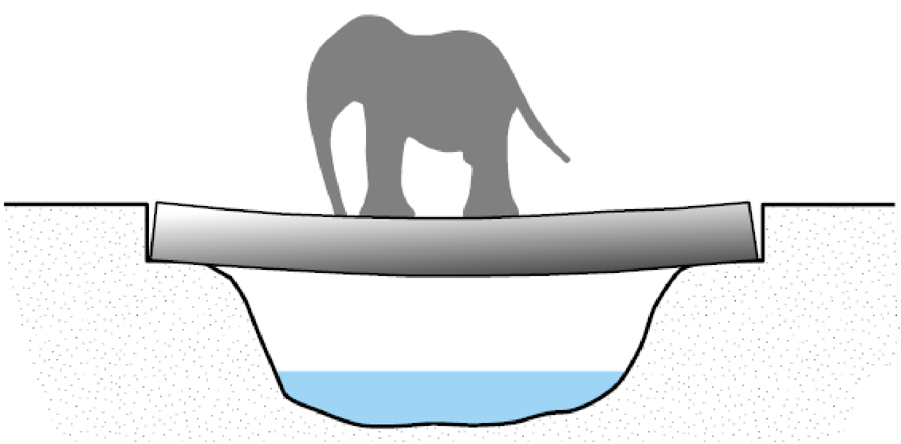
Simple Plane Beam Element

Beam Element المان تیر

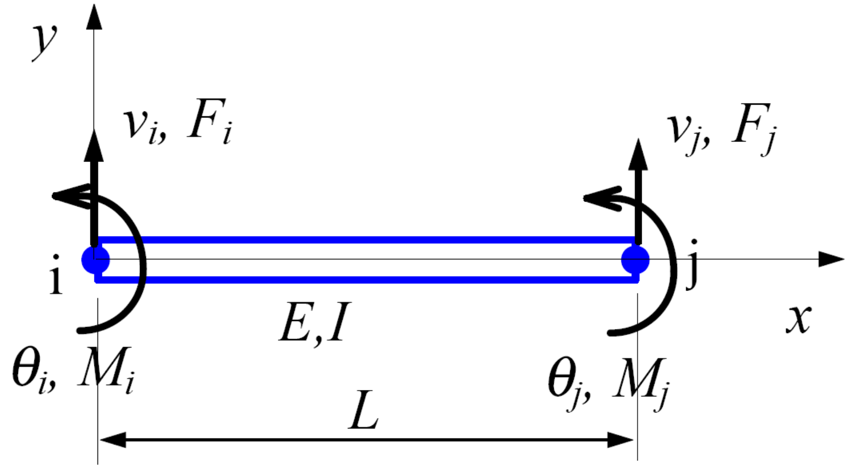


Cantilever





Simply Supported



L: طول تیر

I: ممان اینرسی سطح مقطع تیر

E : مدول الاستیسیته

$v = v(x)$: تغییرمکان (عرضی) محور خنثی

$\theta = \dfrac{dv}{dx}$: دوران حول محور z

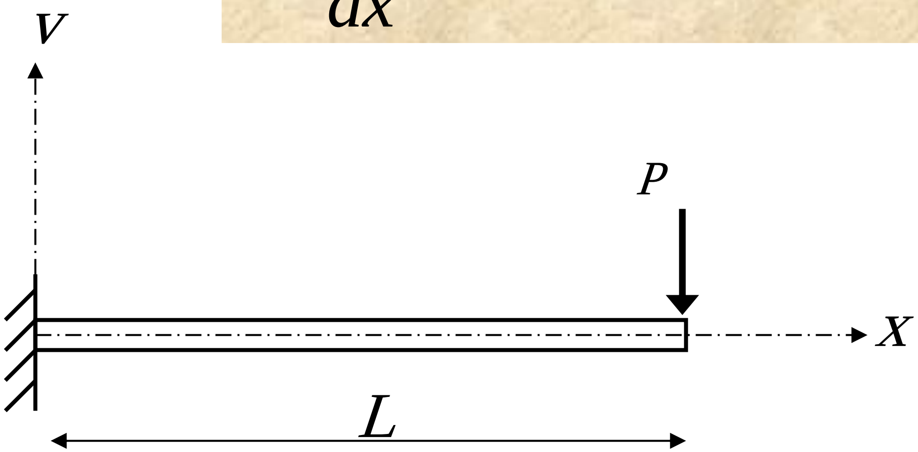
$F=F(x)$: نیروی برشی

$M=M(x)$: ممان حول محور z

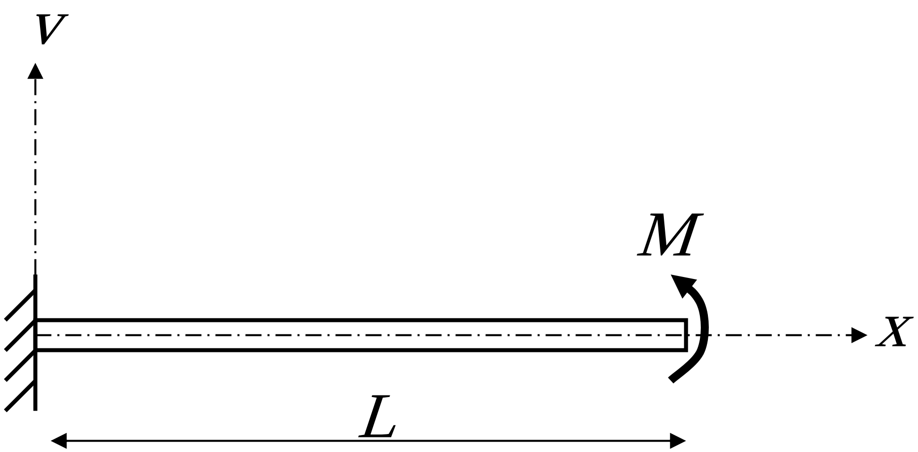
المان تیر صفحه ای

یادآوری:

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x), \qquad \sigma = -\frac{My}{I}$$

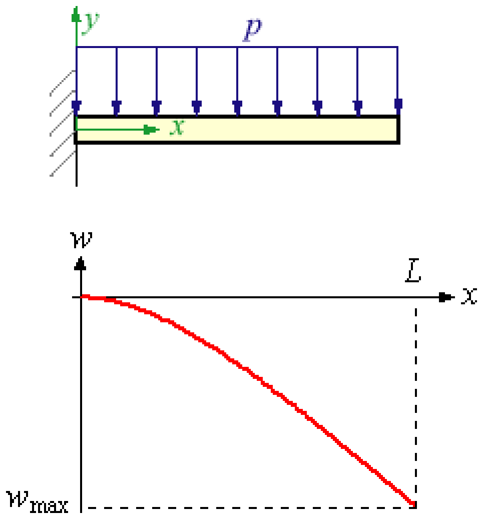


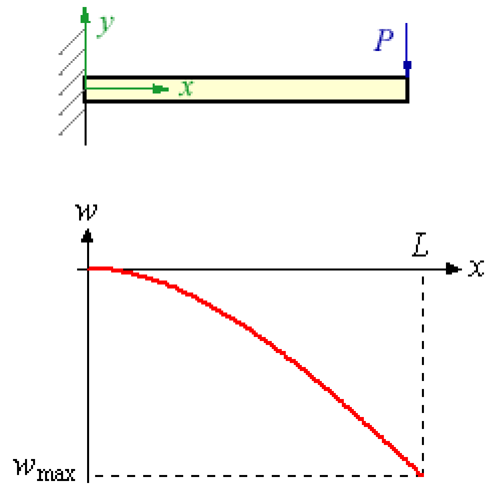
$$v_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}, \quad \theta_{max} = -\frac{PL^2}{2EI}$$

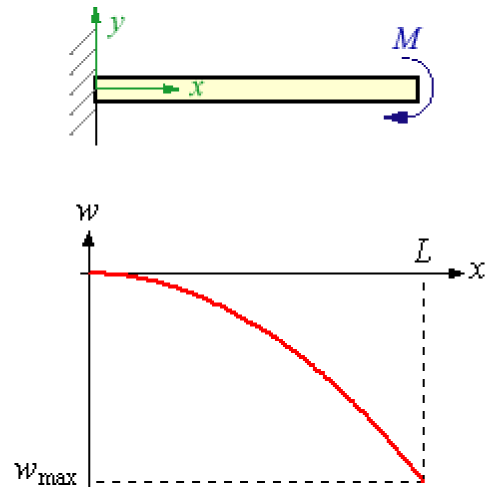


$$v_{max} = \frac{ML^2}{2EI}, \quad \theta_{max} = \frac{ML}{EI}$$

المان تیر صفحه ای







$$w(x) = -\frac{p\,x^2\left(6\,L^2 - 4\,x\,L + x^2\right)}{24\,EI}$$

$$w_{max} = w(L) = -\frac{p\,L^4}{8\,EI}$$

$$w(x) = -\frac{P\,x^2\,(3\,L - x)}{6\,EI}$$

$$w_{max} = w(L) = -\frac{PL^3}{3\,EI}$$

$$w(x) = -\frac{M\,x^2}{2\,EI}$$

$$w_{max} = w(L) = -\frac{M\,L^2}{2\,EI}$$

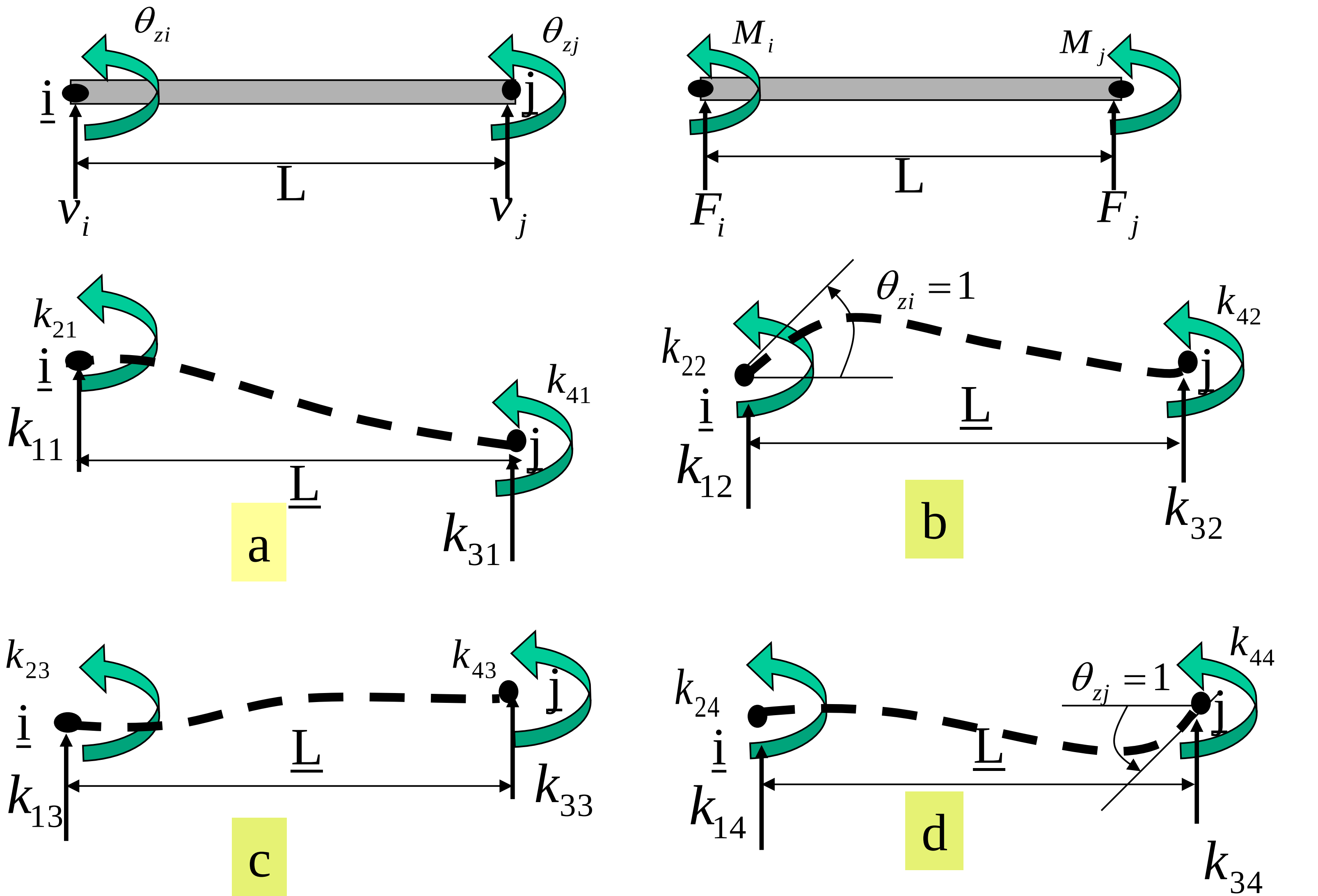
محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم

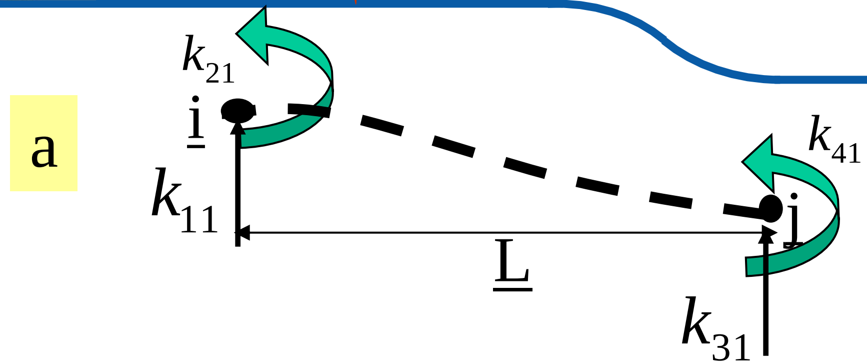
یادآوری :

ستون nام ماتریس (K) بیانگر نیروهای اعمال شده به المان است وقتی که تغییر مکان در گره nام برابر یک و تغییرمکان در بقیه گره‌ها صفر باشند.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancelto{1}{v_i} \\ \cancelto{0}{\theta_i} \\ \cancelto{0}{v_j} \\ \cancelto{0}{\theta_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم





برای گره ۱، در حالت a:

$$v_1 = 1 \quad @\,node\ 1 \Rightarrow \frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1$$

برای گره ۱ ، در حالت a:

$$\theta_{z1} = 0 \quad @\,\mathrm{node}\ 1 \Rightarrow -\frac{\mathrm{k}_{11}\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} + \frac{\mathrm{k}_{21}\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} = 0$$

تعادل نیرو در جهت y،
در حالت a:

$$\sum (Force)_y = 0 \Rightarrow k_{11} + k_{31} = 0$$

تعادل ممان حول
گره ۲ ، در حالت a:

$$\sum (Moment)_{node\,2} = 0 \Rightarrow k_{21} + k_{41} - k_{11}L = 0$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش مستقیم

❖ با نوشتن معادلات تعادل برای بقیه حالتها (b,c,d) بقیه عناصر ماتریس سختی،

k، به دست می‌آید.

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{matrix} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{matrix} \\ \dfrac{EI}{L^3} & \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

مقدار انرژی ذخیره شده در تیر برابر است با:

$$U=\frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon dV=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A\left(-\frac{My}{I}\right)^T\frac{1}{E}\left(-\frac{My}{I}\right)dAdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L M^T\frac{1}{EI}Mdx=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^T EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L(\mathbf{Bu})^T EI(\mathbf{Bu})dx$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\left(\int_0^L\mathbf{B}^T EI\mathbf{B}dx\right)\mathbf{u}$$

ماتریس سختی:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B}dx$$

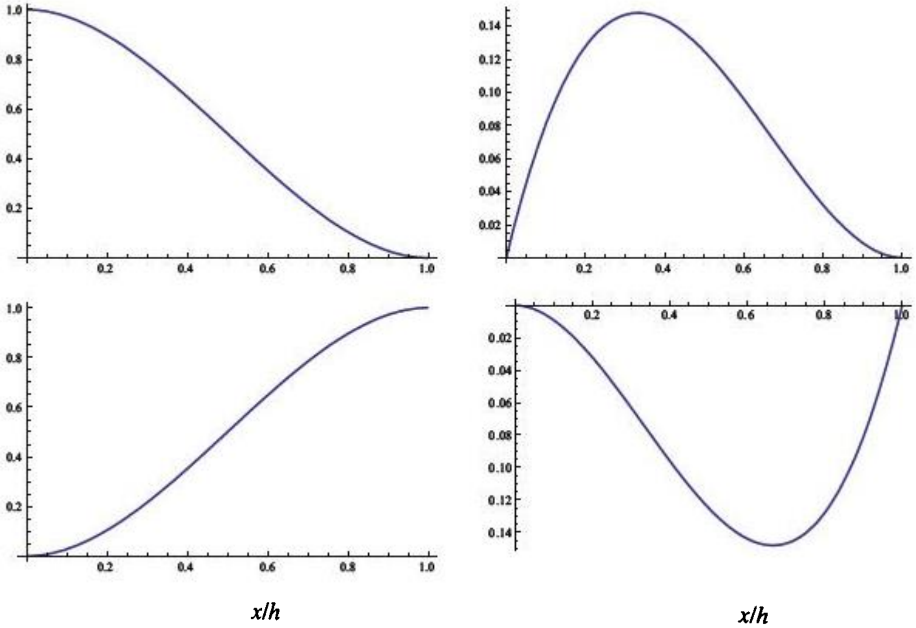
برای المان تیر توابع شکل به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$N_1(x) = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$$

$$N_2(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2$$

$$N_3(x) = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$$

$$N_4(x) = -x^2/L + x^3/L^2$$



Assume displacement function (Without distributing loading, w(x)=0)

(A) *satisfy basic beam D.E.* $(EI\dfrac{d^4v}{dx^4}=0)$ $\qquad v(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

(B) 4 *total D.O.Fs* $(v_i,\theta_i,v_j,\theta_j)$

(C) *satisty the conditions of displacement & slope continuity at nodes.*

Express v(x) as a function of nodal displacements as follows.

$$v(0)=v_i=a_4$$

$$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_i=a_3$$

$$v(L)=v_j=a_1L^3+a_2L^2+a_3L+a_4$$

$$\frac{dv(L)}{dx}=\theta_j=3a_1L^2+2a_2L+a_3$$

$$\therefore v(x)=\left[\frac{2}{L^3}(v_i-v_j)+\frac{1}{L^2}(\theta_i+\theta_j)\right]x^3+\left[-\frac{3}{L^2}(v_i-v_j)-\frac{1}{L}(2\theta_i+\theta_j)\right]x^2+\theta_i x+v_i$$

In matrix form, we have

$$v = [N]\{u\} = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{L^3}\left(2x^3 - 3x^2L + L^3\right) \;,\quad N_2 = \frac{1}{L^3}\left(x^3L - 2x^2L^2 + xL^3\right)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3}\left(-2x^3 + 3x^2L\right) \;,\quad N_4 = \frac{1}{L^3}\left(Lx^3 - L^2x^2\right)$$

$$N_1, N_2, N_3, N_4 : shape \quad functions \quad for \quad a \quad beam \quad element.$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

تغییرمکان در المان را برحسب تغییرمکان گره برابر است با

$$v(x)=\mathbf{Nu}=\begin{bmatrix}N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_i\\ \theta_i\\ v_j\\ \theta_j\end{Bmatrix}$$

دقت کنید که همگی توابع درجه ۳ هستند و برای توابع شکل داریم:

$$N_1+N_3=1$$

$$N_2+N_3L+N_4=x$$

که بیانگر توانایی بیان حرکت جسم صلب توسط این توابع شکل است.

در حرکت جسم صلب اولا جسم حرکت انتقالی دارد یعنی باید جابجایی تمام تیر برابر با V باشد بنابراین

$$v = [N]\{u\} = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ V \\ 0 \end{Bmatrix} = (N_1 + N_3)V = V$$

پس: $N_1 + N_3 = 1$

در حرکت جسم صلب ثانیا جسم حرکت انتقالی و دورانی دارد مثلا انتقال V و دوران Cدرجه حول نقطه $x=0$ بنابراین

$$v = [N]\{u\} = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} V \\ C \\ V + CL \\ C \end{Bmatrix} = N_1 V + N_2 C + N_3 V + N_3 CL + N_4 C$$

$$= (N_1 + N_3)V + (N_2 + N_3 L + N_4)C = V + Cx$$

پس:

$$N_1 + N_3 = 1$$

$$N_2 + N_3 L + N_4 = x$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

مقدار انحنای تیر برابر است با:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{Nu} = \mathbf{Bu}$$

بنابراین ماتریس کرنش-تغییرمکان (B) تیر برابر است با:

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N} = \left[N_1''(x) \quad N_2''(x) \quad N_3''(x) \quad N_4''(x) \right]$$

$$= \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

بنابراین برای المان تیر داریم:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B}dx$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- روش دیگر

با قرار ماتریس B وانتگرال‌گیری ماتریس سختی:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس سختی برای المان تیر صفحه‌ای- حالت کلی

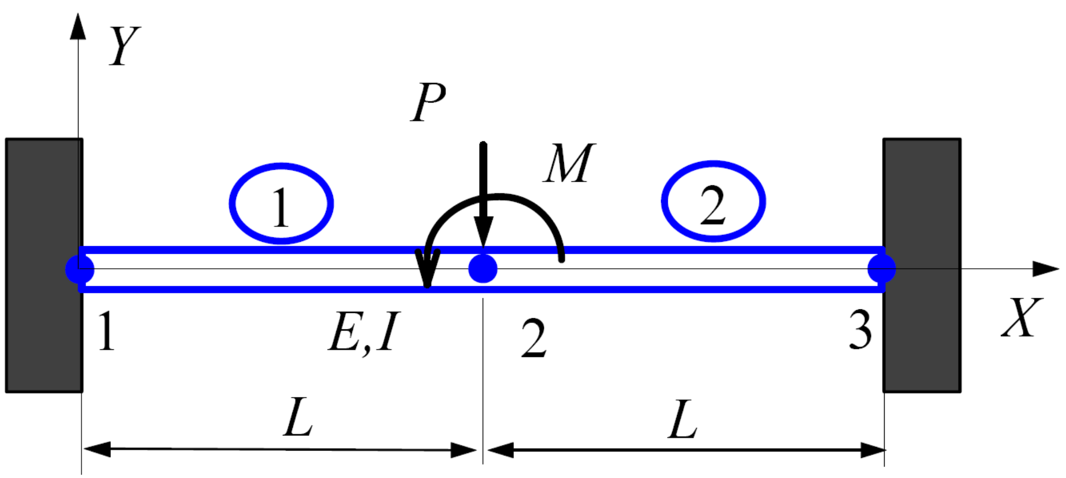
❖ با ترکیب سختی محوری (المان میله)، می توان ماتریس سختی برای المان تیر صفحه ای در حالت کلی را به دست آورد

$$
\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad u_i & \quad v_i & \quad \theta_i & \quad u_j & \quad v_j & \quad \theta_j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}
$$

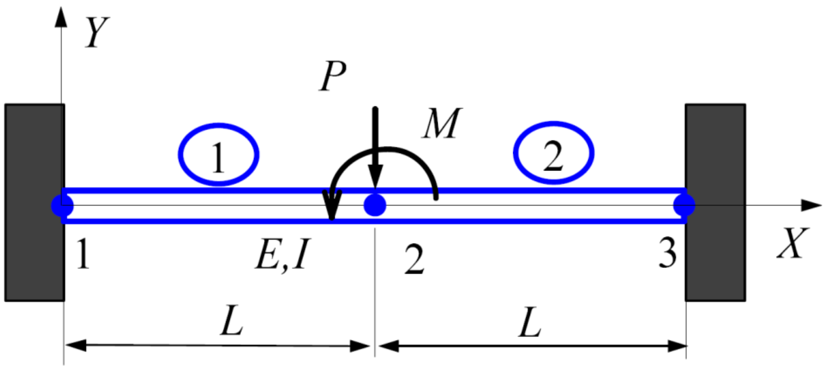
مثال ۱: برای تیر زیر که در دو انتها گیردار شده است، نیروی P و گشتاور M در وسط تیر اعمال می‌گردد مطلوبست:

الف- تغییرمکان و چرخش زاویه‌ای در گره وسط تیر؟

ب- گشتاور و نیروهای عکس‌العمل در دو انتهای تیر؟



المان تیر: مثال ۱



ماتریس سختی برای دو المان تیر عبارتند از:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

با سوار کردن ماتریس‌های سختی داریم:

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$F_{2Y} = -P, \qquad M_2 = M,$$

$$v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

المان تیر: مثال ۱

با اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

و با حل آن

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI}\begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}$$

از معادلات تعادل می‌توان دیگر مجهولات را به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 2P+3M/L \\ PL+M \\ 2P-3M/L \\ -PL+M \end{Bmatrix}$$

المان تیر: مثال ۱

از معادله زیر می‌توان مقدار تنش در دو انتهای تیر را به دست آورد:

$$\sigma = \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

Note that the FE solution is exact according to the simple beam theory, since no distributed load is present between the nodes. Recall that,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \quad \text{and} \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (V \text{ - shear force in the beam})$$

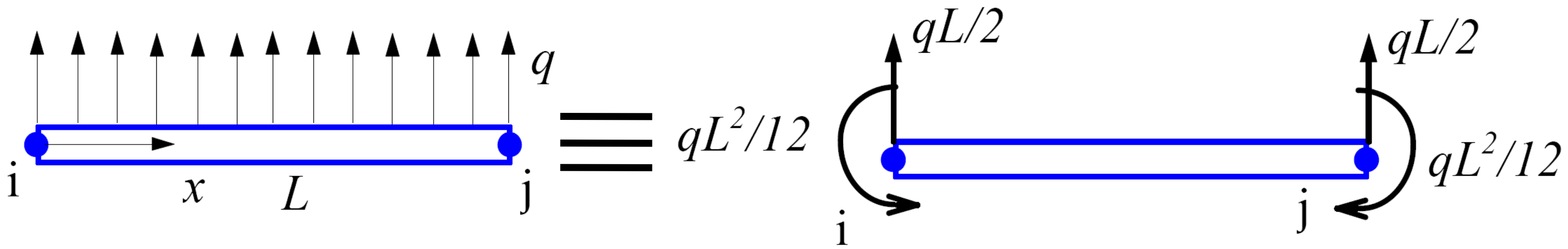
$$\frac{dV}{dx} = q \quad (q \text{ - distributed load on the beam})$$

Thus,

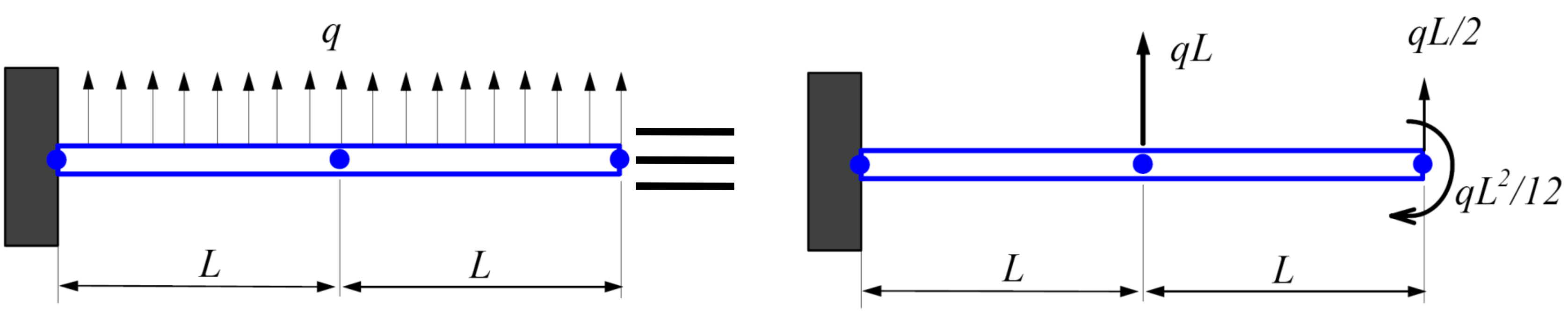
$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

If q(x)=0, then exact solution for the deflection v is a cubic function of x, which is what described by our shape functions.

❖ محاسبه نیروی معادل برای بارهای گسترده



با مساوی قرار دادن کار معادل می توان اثبات نمود.

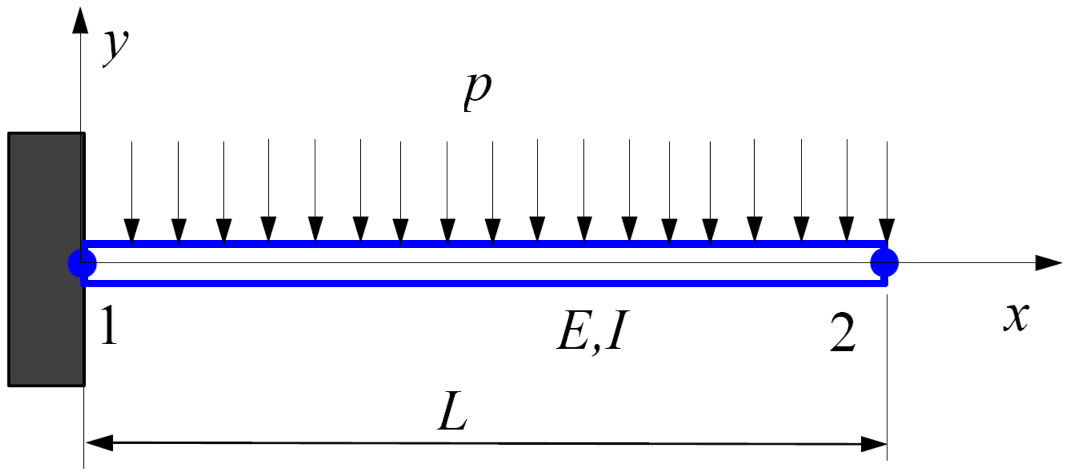


تمرین: اثبات نمایید.

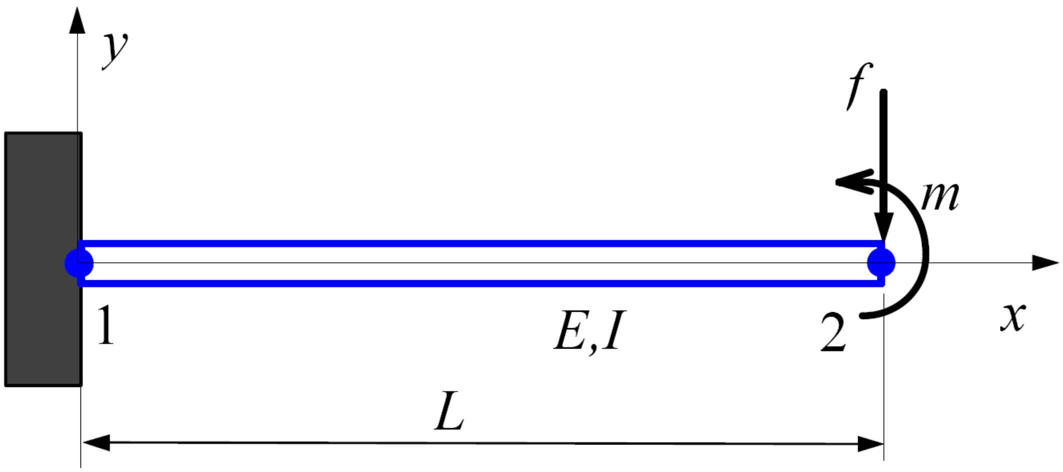
مثال ۲: برای تیر زیر که در یک انتها گیردار است، نیروی گسترده p بر روی تیر اعمال می‌شود مطلوبست:

الف- تغییرمکان و چرخش زاویه‌ای در گره سمت راست تیر؟

ب- گشتاور و نیروهای عکس‌العمل در گره سمت چپ تیر؟



با معادل قرار دادن کار معادل، نیروهای گره ای معادل برابر است با:



$$f = pL/2, \qquad m = pL^2/12$$

المان تیر: مثال ۲

با سوار کردن ماتریس‌های سختی داریم:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$F_{2Y} = -f, \qquad M_2 = m$$

$$v_1 = \theta_1 = 0$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ m \end{Bmatrix}$$

و با حل آن

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{Bmatrix} -2L^2 f + 3Lm \\ -3Lf + 6m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/8EI \\ -pL^3/6EI \end{Bmatrix} \quad \text{(A)}$$

These nodal values are the same as the exact solution. Note that the deflection $v(x)$ (for $0 < x < L$) in the beam by the FEM is, however, different from that by the exact solution. The exact solution by the simple beam theory is a 4th order polynomial of x, while the FE solution of v is only a 3rd order polynomial of x.

If the equivalent moment m is ignored, we have,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI}\begin{Bmatrix} -2L^2 f \\ -3Lf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/6EI \\ -pL^3/4EI \end{Bmatrix} \quad \text{(B)}$$

The errors in (B) will decrease if more elements are used. The equivalent moment m is often ignored in the FEM applications. The FE solutions still converge as more elements are applied.

From the FE equation, we can calculate the reaction force and moment as, where the result in (A) is used.

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

This force vector gives the total effective nodal forces which include the equivalent nodal forces for the distributed lateral load *p* given by,

$$\begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

The correct reaction forces can be obtained as follows,

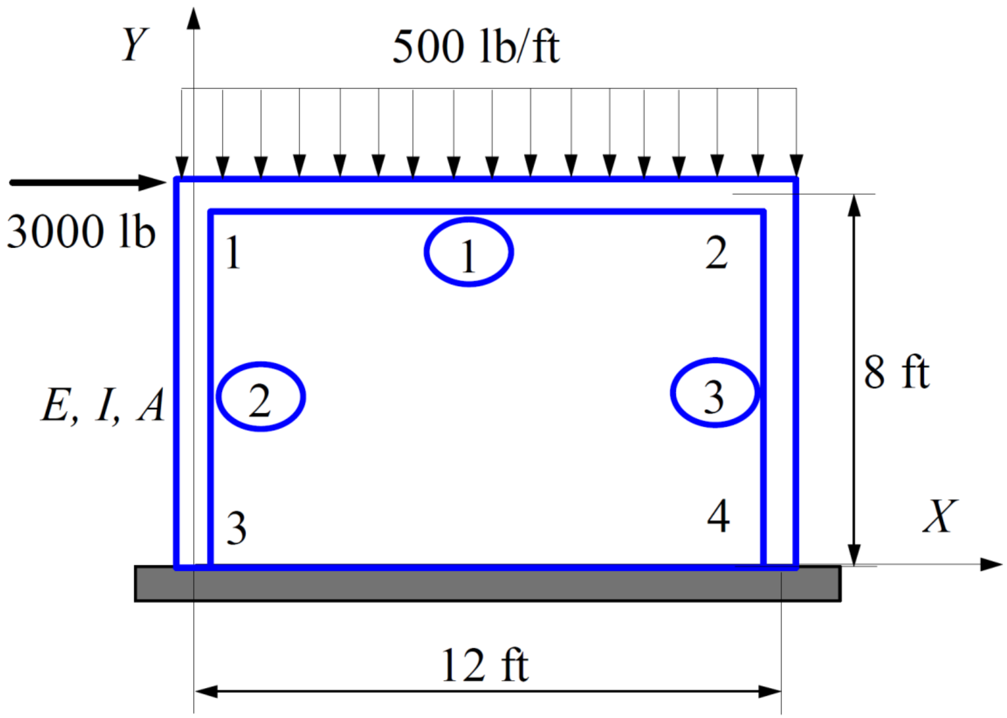
$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2/2 \end{Bmatrix}$$

Check the results!

FE Analysis of Frame Structures

Members in a frame are considered to be rigidly connected. Both forces and moments can be transmitted through their joints. We need the general beam element (combinations of bar and simple beam elements) to model frames.

المان تیر: مثال ۳

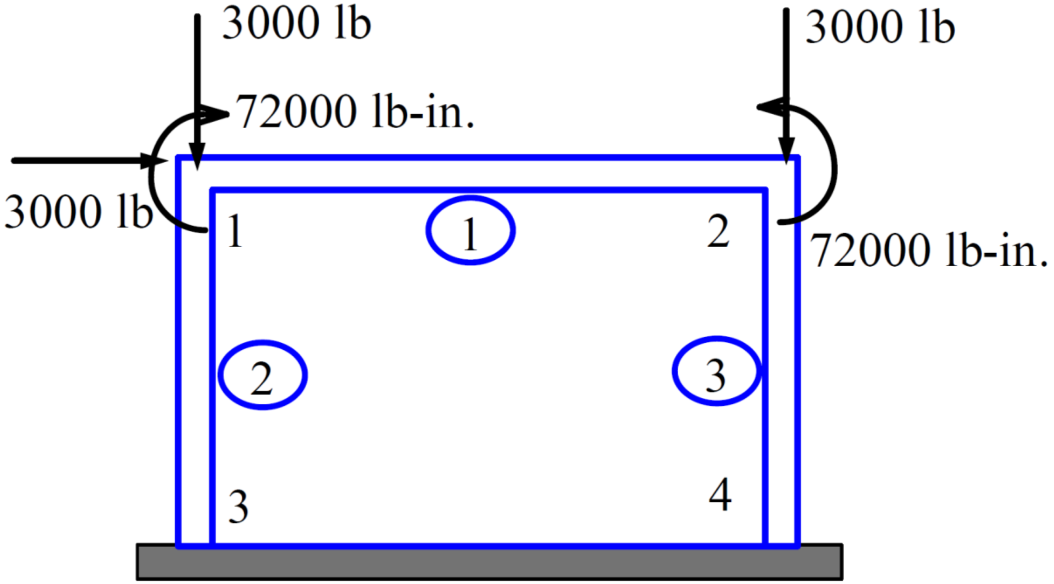


Given: $E = 30 \times 10^6$ psi, $I = 65$ in.^{4} , $A = 6.8$ in.^{2}

Find: Displacements and rotations of the two joints 1 and 2.

Solution:

Solution: For this example, we first convert the distributed load to its equivalent nodal loads.



In local coordinate system, the stiffness matrix for a general 2-D beam element is

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Element Connectivity Table

Element	*Node i (1)*	*Node j (2)*
1	1	2
2	3	1
3	4	2

For element 1

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1' = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 0 & 56.4 & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 0.784 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 0 & -56.4 & 5417 \end{bmatrix} \end{array}$$

For elements 2 and 3, we have the stiffness matrix in local system,

$$
\mathbf{k}_2' = \mathbf{k}_3' = 10^4 \times
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_i' & v_i' & \theta_i' & u_j' & v_j' & \theta_j' \end{array} \\
\begin{bmatrix}
212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\
0 & 2.65 & 127 & 0 & -2.65 & 127 \\
0 & 127 & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\
-212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\
0 & -2.65 & -127 & 0 & 2.65 & -127 \\
0 & 127 & 4063 & 0 & -127 & 8125
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

where i=3, j=1 for element 2 and i=4, j=2 for element 3.

In general, the transformation matrix **T** is,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

We have $l = 0$, $m = 1$ for both elements 2 and 3. Thus,

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using the transformation relation, $\mathbf{k}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}'\mathbf{T}$

we obtain the stiffness matrices in the global coordinate system for elements 2 and 3,

$$\mathbf{k}_2 = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix} \end{array}$$

and

$$\mathbf{k}_3 = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assembling the global FE equation and noticing the following boundary conditions,

$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{1X} = 3000\,\text{lb},\ F_{2X} = 0,\ F_{1Y} = F_{2Y} = -3000\,\text{lb},$$

$$M_1 = -72000\,\text{lb}\cdot\text{in.},\ M_2 = 72000\,\text{lb}\cdot\text{in.}$$

we obtain the condensed FE equation,

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 127 & 56.4 & 13542 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 144.3 & 0 & 127 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 213.3 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 127 & -56.4 & 13542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \end{Bmatrix}$$

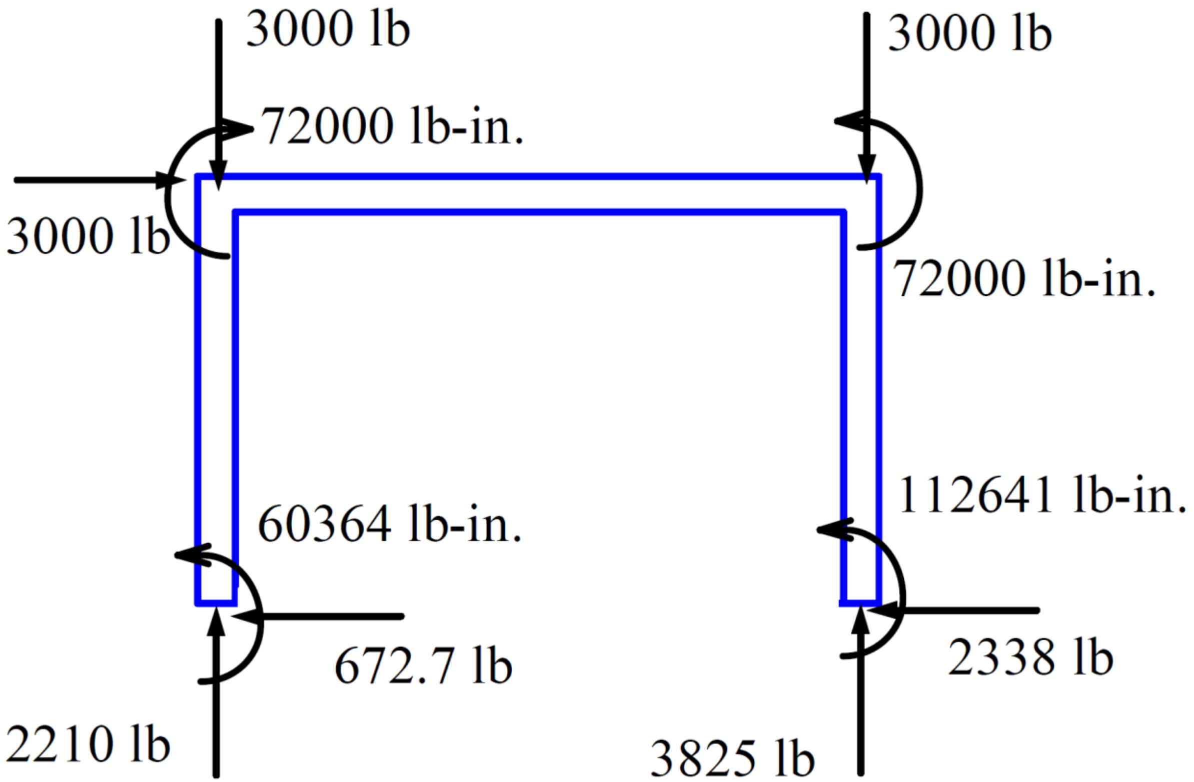
Solving this, we get

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.092\,\text{in.} \\ -0.00104\,\text{in.} \\ -0.00139\,\text{rad} \\ 0.0901\,\text{in.} \\ -0.0018\,\text{in.} \\ -3.88\times10^{-5}\,\text{rad} \end{Bmatrix}$$

To calculate the reaction forces and moments at the two ends,we employ the element FE equations for element 2 and element 3. We obtain,

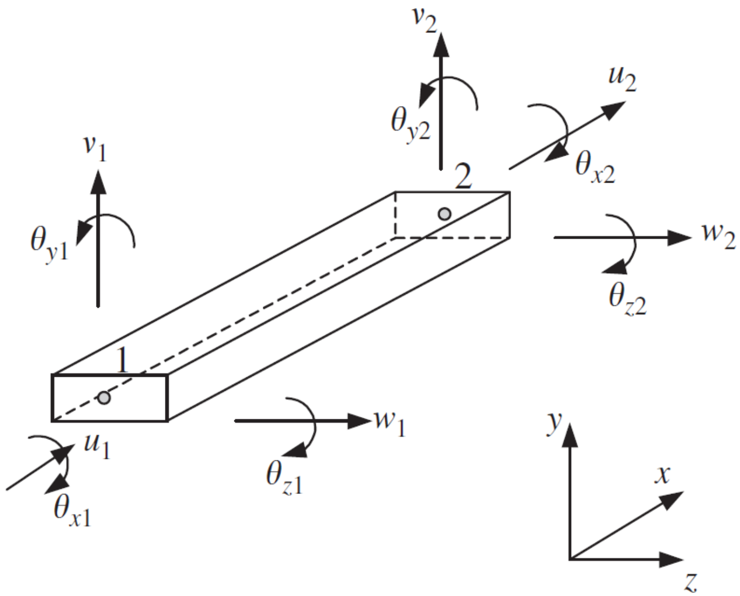
$$\begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672.7\,\text{lb} \\ 2210\,\text{lb} \\ 60364\,\text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_{4X} \\ F_{4Y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2338\,\text{lb} \\ 3825\,\text{lb} \\ 112641\,\text{lb}\cdot\text{in.} \end{Bmatrix}$$

Check the results: Draw the free-body diagram of the frame. Equilibrium is maintained with the calculated forces and moments.



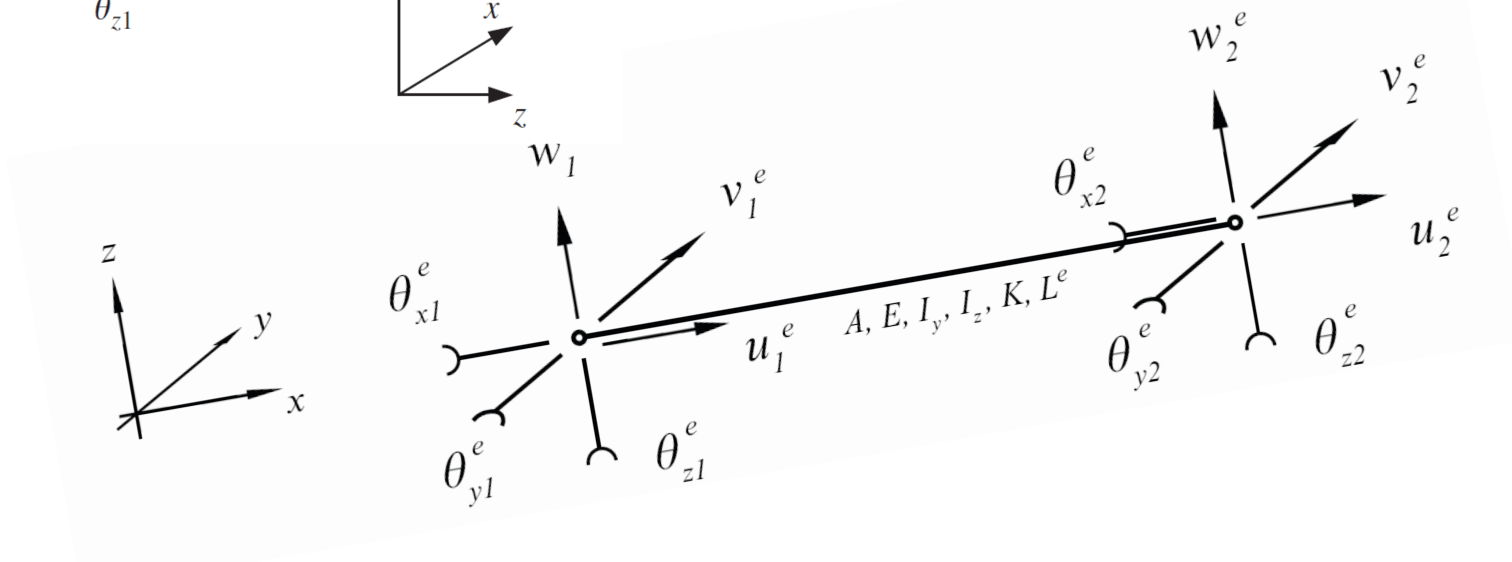
المان تیر–میله در فضای سه بعدی

A 3D 12-freedom beam element defined in a local system



u_1, v_1, w_1 : Translation at node 1 in x, y and z directions

Θ_{x1}, Θ_{y1}, Θ_{z1}, : Rotation at node 1 in x, y and z directions



المان تیر–میله در فضای سه بعدی

ماتریس سختی:

$$\{\; u_1^e \quad v_1^e \quad w_1^e \quad \theta_{x1}^e \quad \theta_{y1}^e \quad \theta_{z1}^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad w_2^e \quad \theta_{x2}^e \quad \theta_{y2}^e \quad \theta_{z2}^e \;\}$$

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & b_z & 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & b_z \\ 0 & 0 & a_y & 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & -a_y & 0 & -b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & d_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & c_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & d_z \\ -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & a_z & 0 & 0 & 0 & -b_z \\ 0 & 0 & -a_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & a_y & 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & TS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_y & 0 & d_y & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & d_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$AS = \frac{AE}{L}\ ,\ \ TS = \frac{GJ}{L}$$

$$a_z = \frac{12EI_z}{L^3},\ b_z = \frac{6EI_z}{L^2},\ c_z = \frac{4EI_z}{L},\ d_z = \frac{2EI_z}{L}$$

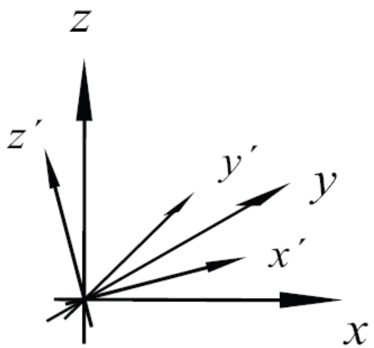
$$a_y = \frac{12EI_y}{L^3},\ b_y = \frac{6EI_y}{L^2},\ c_y = \frac{4EI_y}{L},\ d_y = \frac{2EI_y}{L}$$

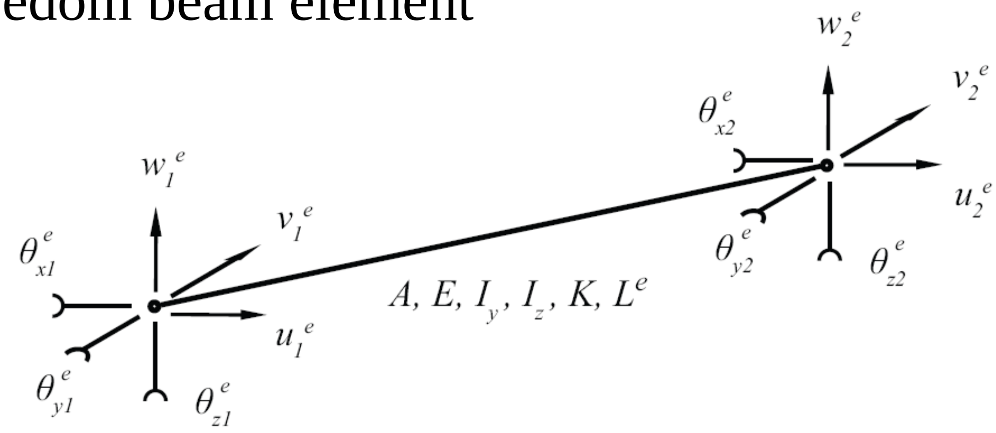
$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

G is the torsional modulus of the material and J is the torsional proportional constant for the cross section.

المان تیر–میله در فضای سه بعدی

A 3D global 12-freedom beam element





ماتریس انتقال:

$$k'u' = f' \xrightarrow[f'=T\,f]{u'=T\,u} k'Tu = Tf \xrightarrow{T^T \times} T^T k'Tu = f$$

$$k = T^T k' T$$

A 3D global 12-freedom beam element

$$\mathrm{k} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{k}'\mathrm{T}$$

ماتریس انتقال:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

Direction cosines in $\boldsymbol{\lambda}$:

که در آن:

$$l_x = \cos(x', x), \quad m_x = \cos(x', y), \quad n_x = \cos(x', z)$$
$$l_y = \cos(y', x), \quad m_y = \cos(y', y), \quad n_y = \cos(y', z)$$
$$l_z = \cos(z', x), \quad m_z = \cos(z', y), \quad n_z = \cos(z', z)$$

المان تیر-میله در فضای سه بعدی

مولفه های ماتریس انتقال:

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m_x = \frac{y_2 - y_1}{L}, \; n_x = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{kl} &= x_k - x_l \\ y_{kl} &= y_k - y_l \\ z_{kl} &= z_k - z_l \end{aligned}\right\} \quad k, l = 1, 2, 3$$

$$l_z = \frac{1}{2A_{123}}(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})$$

$$m_z = \frac{1}{2A_{123}}(z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})$$

$$n_z = \frac{1}{2A_{123}} + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})$$

$$l_y = m_z n_x - n_z m_x$$

$$m_y = n_z l_x - l_z n_x$$

$$n_y = l_z m_x - m_z l_x$$

$$A_{123} = \sqrt{(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21})^2 + (z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21})^2 + (x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21})^2}$$

If a distributed load with components w_y, w_z is applied on the element
Then the equivalent point loads at the ends of the member are:

$$f' = [0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{-w_z L^2}{12}, \frac{w_y L^2}{12}, 0, \frac{w_y L}{2}, \frac{w_z L}{2}, 0, \frac{w_z L^2}{12}, \frac{-w_y L^2}{12}]^T$$

$$f = \boldsymbol{T}^T f'$$

المان تیر–میله در فضای سه بعدی

Input data for beam-bar elements:

- (X, Y, Z) for each node
- E , A, G, J, I_z, I_y for each element in local coordinates

Calculate:

- The directional cosines
- The element stiffness matrix in global coordinates
- The element force vector in global coordinates
- Assemble the stiffness matrices to obtain the global stiffness matrix
- Assemble the load vectors to obtain the global load vector
- Solve the final equation to obtain the displacement at different nodes