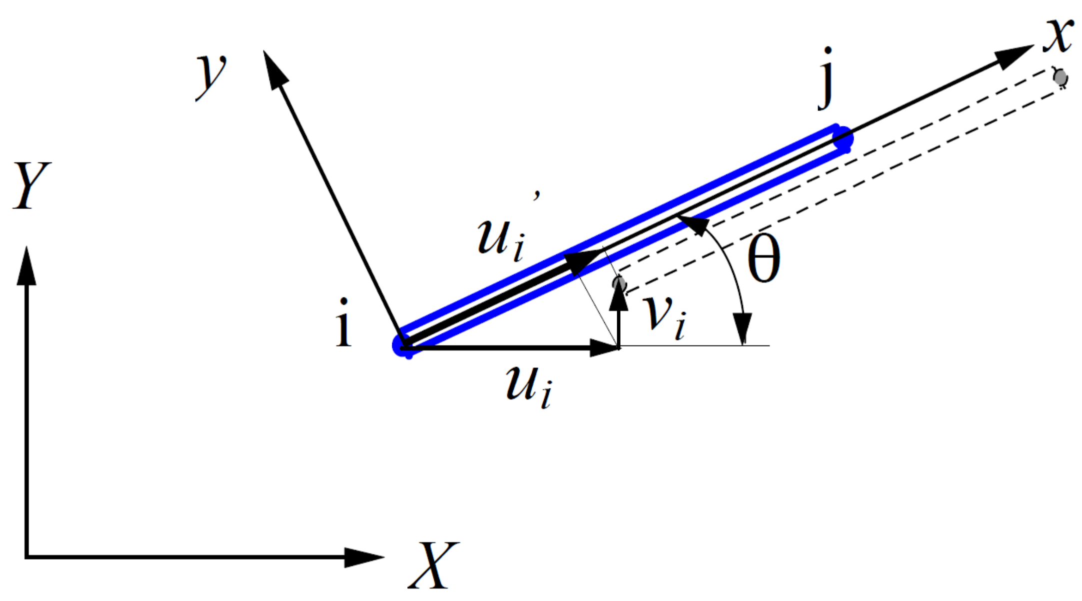
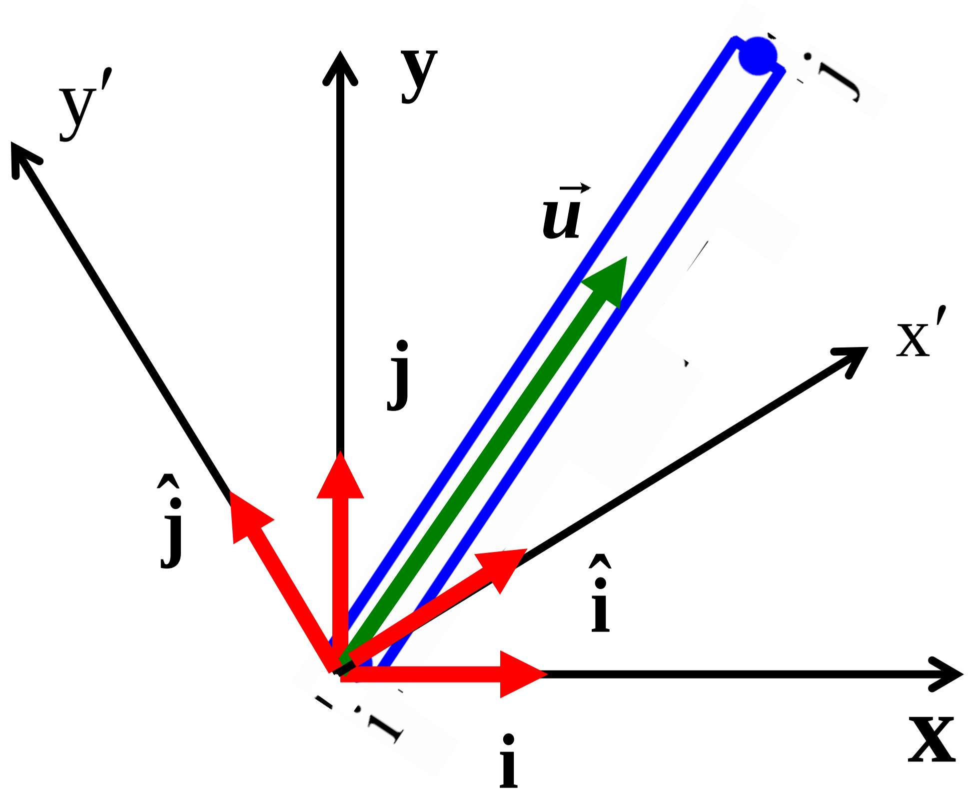
المان میله در فضای دو و سه بعدی

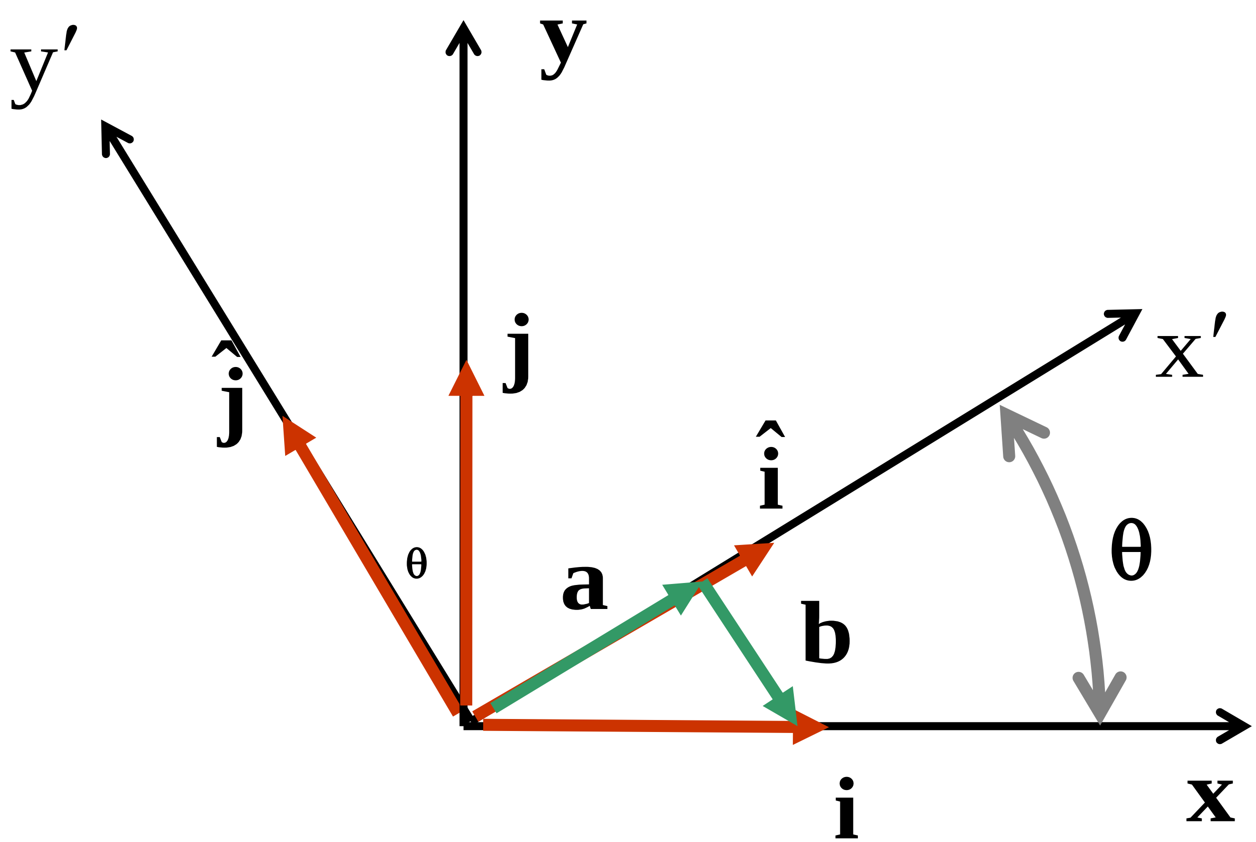


انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:



$$\vec{u} = u_i i + v_i j = u'_i \hat{i} + v'_i \hat{j}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:



$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{i}$$

$$|\mathbf{a}|=|\mathbf{i}|\cos\theta$$

$$|\mathbf{i}|=1$$

$$|\mathbf{a}|=\cos\theta$$

$$|\mathbf{b}|=\sin\theta$$

$$\mathbf{a}=\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{b}=\sin\theta\ (-\hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{i}=\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}}-\sin\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

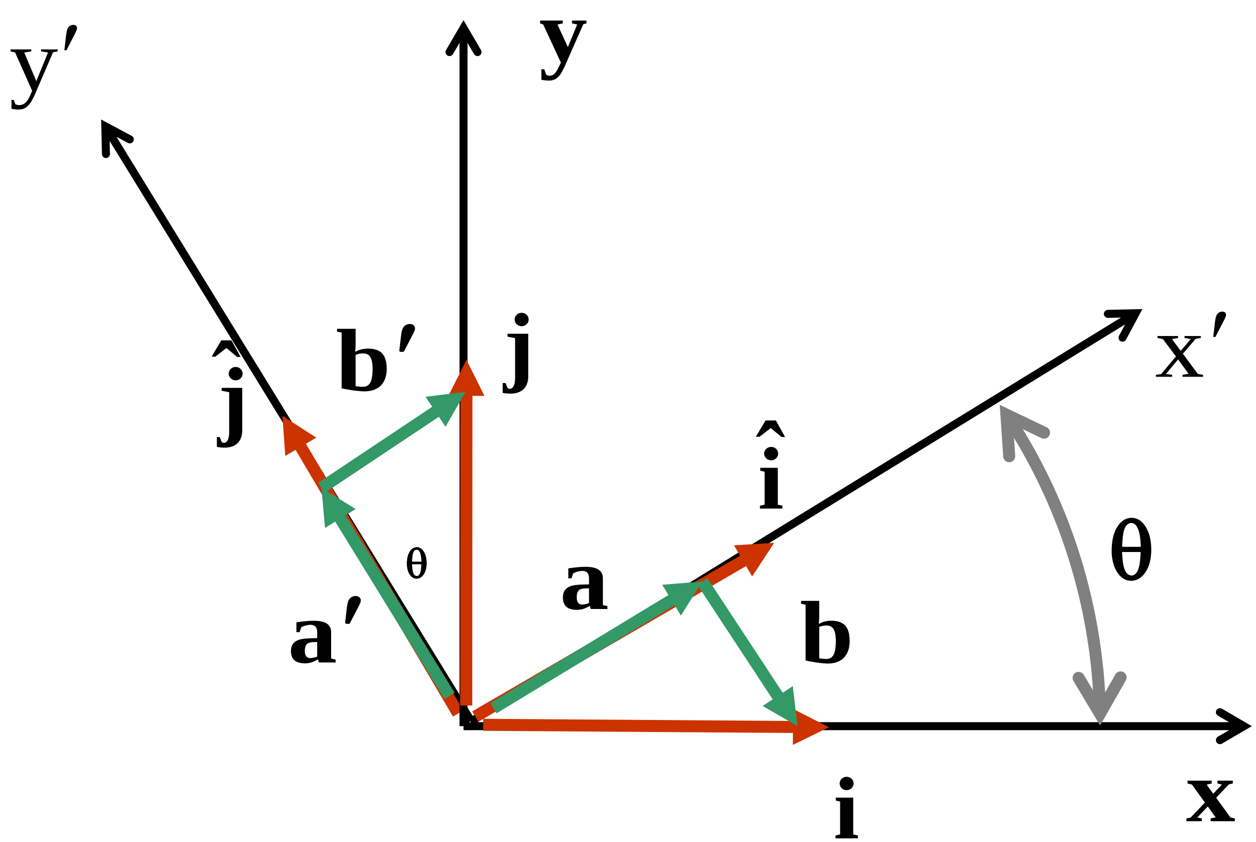
انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}' = \cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{b}' = \sin\theta\ \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{j} = \sin\theta\ \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$



انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \mathrm{u_i} i + v_{\mathrm{i}} j = \mathrm{u_i'} \hat{i} + v'_i \hat{j}$$

$$\mathrm{u_i}(\cos\theta\ \hat{i} - \sin\theta\ \hat{j}) + v_{\mathrm{i}}(\sin\theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j})$$

$$= \mathrm{u_i'} \hat{i} + v'_i \hat{j}$$

$$\mathrm{u_i} \cos\theta + v_{\mathrm{i}} \sin\theta = \mathrm{u_i'}$$

$$-\mathrm{u_i} \sin\theta + v_{\mathrm{i}} \cos\theta = v'_i$$

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{u_i'} \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{u_i} \\ v_{\mathrm{i}} \end{Bmatrix}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:

ماتریس انتقال:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$l = \cos\theta$$

$$m = \sin\theta$$

Transformation matrix

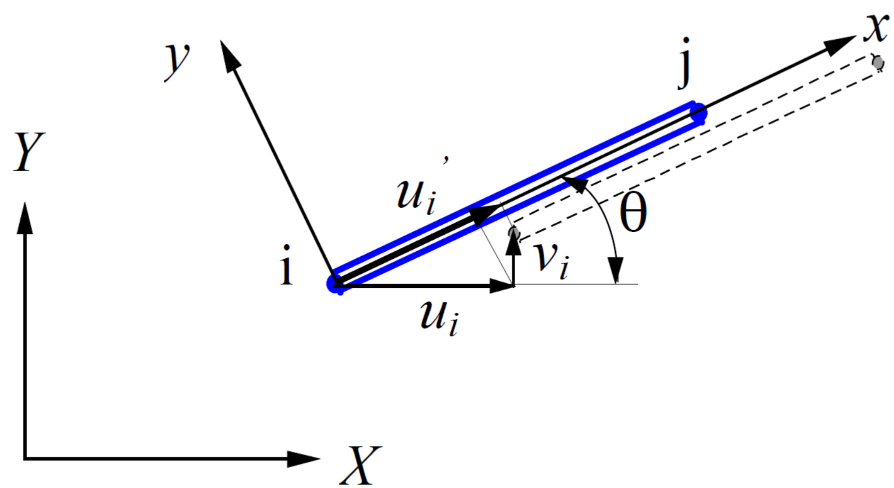
$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i' = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_i$$

$$\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{T}$$

متعامد
orthogonal

المان میله در فضای دو بعدی



$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i' = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_i$$

Local	***Global***
x, y	X, Y
u_i', v_i'	u_i, v_i
1 dof at node	2 dof's at node

المان میله در فضای دو بعدی

برای دو گره از المان میله می توان نوشت:

$$\mathbf{u}'_i = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_i\,,\quad \mathbf{u}'_j = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_j$$

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

به صورت مشابه رابطه بردار نیرو در دو دستگاه xy و x′y′ برابر است با : $\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$

ماتریس سختی میله در فضای دوبعدی

معادلات تعادل در دستگاه محلی $x'y'$

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i' \\ u_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i' \\ f_j' \end{Bmatrix}$$

با افزودن ابعاد ماتریس:

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ u_j' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i' \\ 0 \\ f_j' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{k}'\mathbf{u}' = \mathbf{f}'$$

ماتریس سختی میله در فضای دوبعدی

$$\mathbf{k'u'} = \mathbf{f'} \xrightarrow{\mathbf{u'=Tu}} \mathbf{k'Tu} = \mathbf{Tf} \xrightarrow{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\times} \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k'Tu} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k'T} \qquad [\mathbf{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

k is a 4*4 symmetric matrix.

$$l = \cos\theta = \frac{\mathrm{X_j - X_i}}{\mathrm{L}}, \qquad m = \sin\theta = \frac{\mathrm{Y_j - Y_i}}{\mathrm{L}}$$

تنش در المان میله :

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

شرایط سوار کردن المان ها

- **شرط سازگاری:** تغییرمکان در انتهای تمام میله‌های که به یک گره می‌رسند برابر است.

- **شرط تعادل:** برآیند نیروهای داخلی در تمام میله‌های که به یک گره ختم می‌شوند، باید با نیروهای خارجی اعمال شده در آن گره، در حال تعادل باشد.

المان میله در فضای دو بعدی

مراحل تحلیل یک سازه

۱ – جداسازی اعضا

۲ – محلی کردن ← تفکیک کردن

۳– فرموله کردن اعضا

۴– سراسری نمودن

۵–ادغام ← سوار کردن و حل

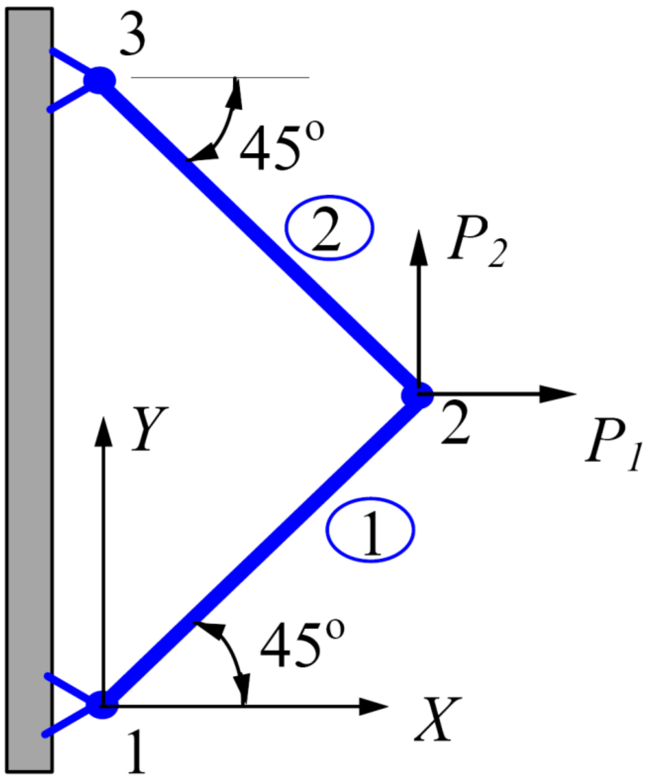
۶– اعمال شرایط مرزی

۷–حل

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ یک خرپای صفحه ای از دو میله یکسان با مشخصات (A، E و L) تحت بارگذاری مطابق شکل زیر قرار گرفته است. مطلوبست:

الف- تغییرمکان گره ۲، ب- تنش ایجاد شده در هر میله



Solution: This simple structure is used here to demonstrate the assembly and solution process using the bar element in 2-D space.

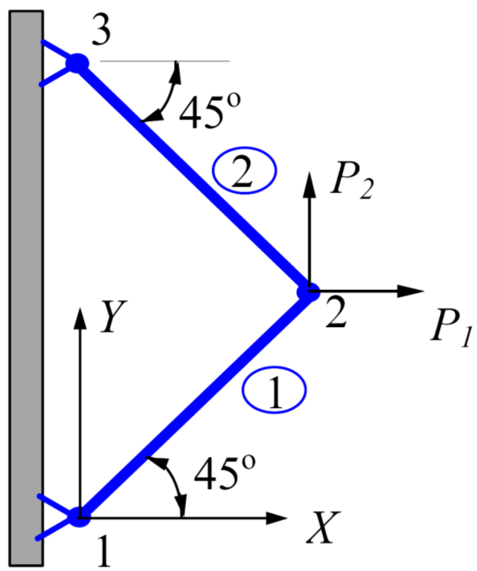
In local coordinate systems, we have

$$\mathbf{k}_1^{'} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2^{'}$$

These two matrices cannot be assembled together, because they are in different coordinate systems. We need to convert them to global coordinate system OXY.

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ المان اول

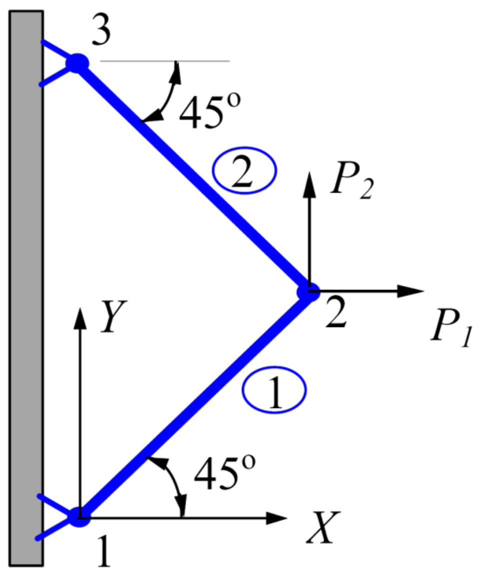


$$\theta = 45^o, \quad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}_1^{'} \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[\mathbf{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

مثال: یک خرپای صفحه ای



- المان دوم

$$\theta = 135^o,\ l = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_2^{'} \mathbf{T}_2 = \dfrac{EA}{2L} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ سوار کردن:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\
\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}
$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ اعمال شرایط مرزی:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \qquad F_{2X} = P_1, \;\; F_{2Y} = P_2$$

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left(P_1 + P_2\right)$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

$$\sigma_2 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left(P_1 - P_2\right)$$

Check the results:

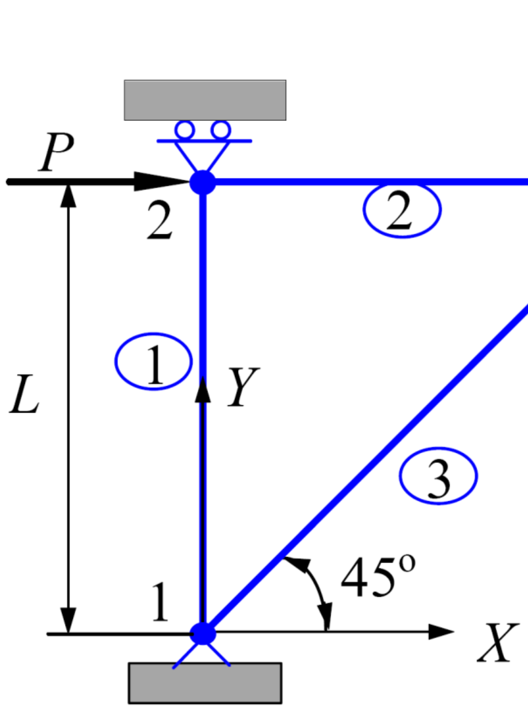
Look for the equilibrium conditions, symmetry, antisymmetry, etc.

مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

❖ برای خرپای صفحه ای زیر با مشخصات داده شده، مطلوبست:

الف- تغییرمکان در گره ها،

ب- نیروهای عکس العمل



$$P = 1000\ \mathrm{kN}, \quad L = 1m, \quad E = 210\,GPa,$$

$$A = 6.0\times10^{-4}\,m^2 \quad \text{for elements 1 and 2,}$$

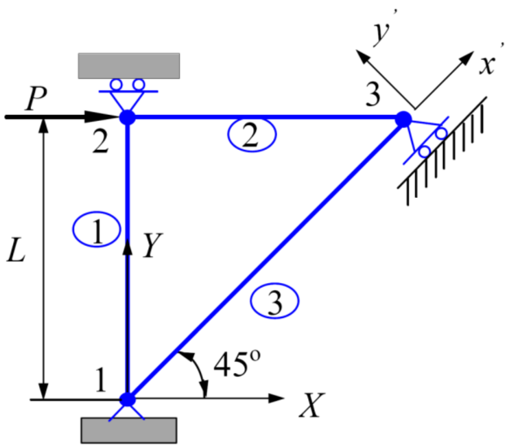
$$A = 6\sqrt{2}\times10^{-4}\,m^2 \quad \text{for element 3.}$$

Solution: We have an inclined roller at node 3, which needs special attention in the FE solution. We first assemble the global FE equation for the truss.

Element 1:

$$\theta = 90^o, \quad l = 0, \quad m = 1$$

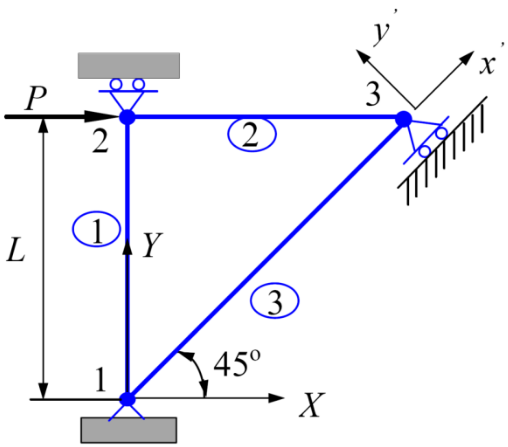
$$\mathbf{k}_1 = \frac{(210\times10^9)(6.0\times10^{-4})}{1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (\mathrm{N/m})$$



$$[\mathrm{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

Element 2: $\theta = 0^o, \quad l = 1, \quad m = 0$

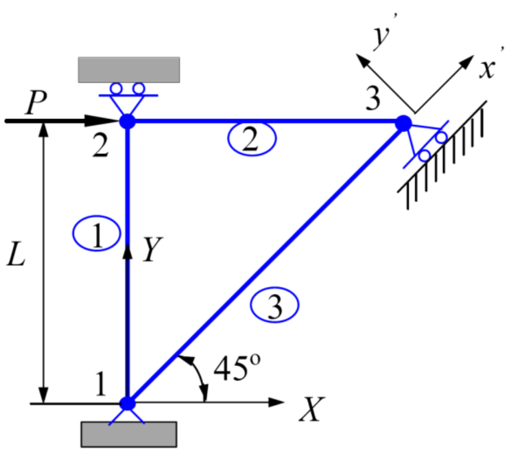
$$\mathbf{k}_2 = \frac{(210\times 10^9)(6.0\times 10^{-4})}{1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} (\mathrm{N/m})$$



Element 3: $\theta = 45^o, \quad l = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{(210\times 10^9)(6\sqrt{2}\times 10^{-4})}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(\mathrm{N/m})$



مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

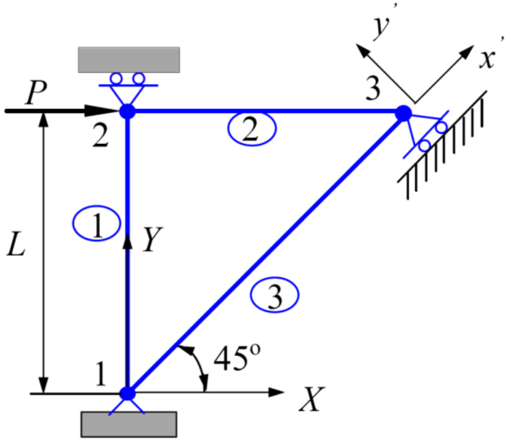
The global FE equation is,

$$1260\times10^{5}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ Sym. & & & & & 0.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Load and boundary conditions (BC):

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0, \quad \text{and} \quad v_3^{'} = 0,$$

$$F_{2X} = P, \quad F_{3x'} = 0.$$



From the transformation relation and the BC, we have

$$v_3^{'} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 + v_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad u_3 - v_3 = 0$$

This is a multipoint constraint (MPC).

مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

Similarly, we have a relation for the force at node 3,

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_{3X} + F_{3Y} = 0$$

Applying the load and BC's in the structure FE equation by 'deleting' 1st, 2nd and 4th rows and columns, we have

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Similarly, we have a relation for the force at node 3,

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_{3X} + F_{3Y} = 0$$

Applying the load and BC's in the structure FE equation by 'deleting' 1st, 2nd and 4th rows and columns, we have

$$1260\times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Further, from the MPC and the force relation at node 3, the equation becomes,

$$1260\times10^5\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1.5 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad 1260\times10^5\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{Bmatrix}$$

مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

The 3rd equation yields, $F_{3X} = -1260\times10^5 u_3$

Substituting this into the 2nd equation and rearranging, we have

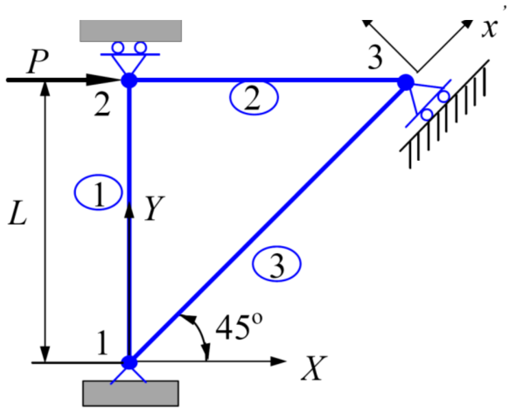
$$1260\times10^5\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{2520\times10^5}\begin{Bmatrix}3P\\ P\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.01191\\ 0.003968\end{Bmatrix}\quad (\mathrm{m})$$

From the global FE equation, we can calculate the reaction forces,

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260\times10^{5}\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0.0 \\ -500 \\ 500 \end{Bmatrix} \text{(kN)}$$

Check the results!

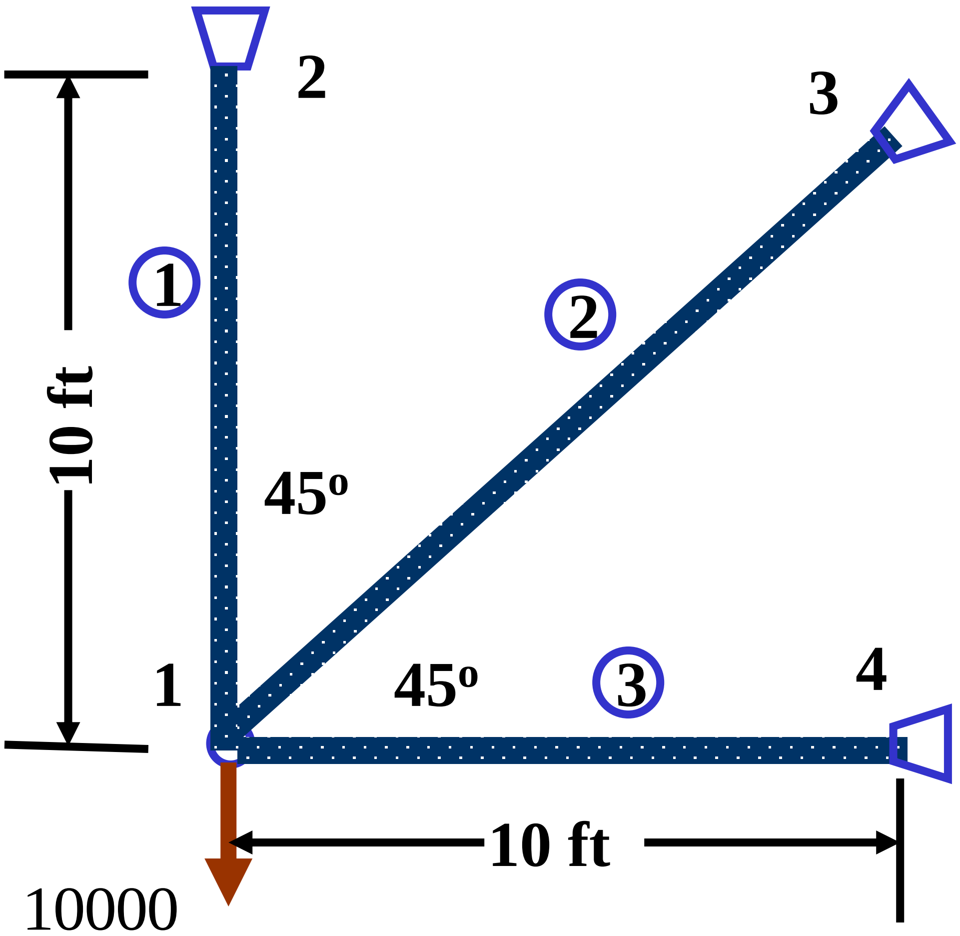


A general multipoint constraint (MPC) can be described as,

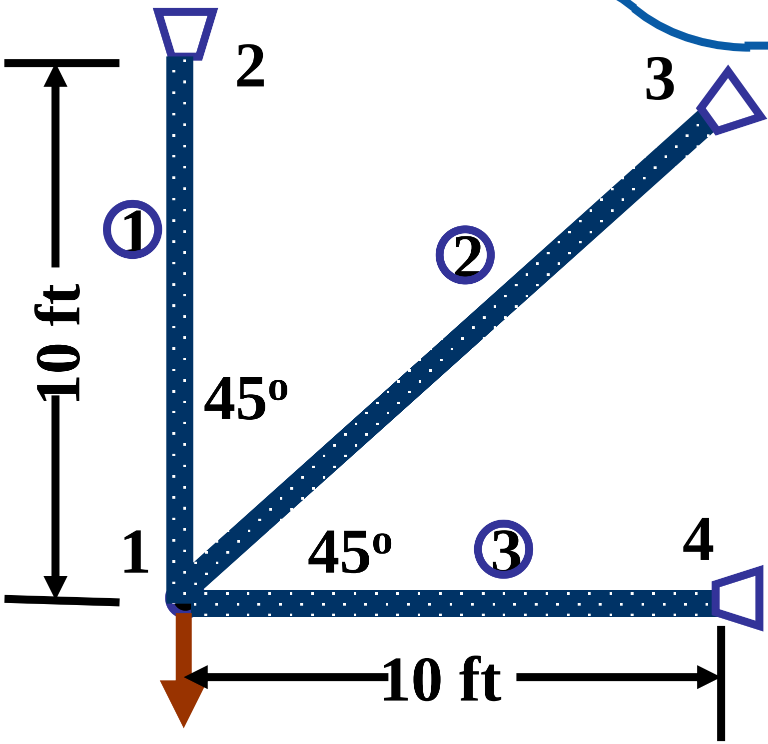
$$\sum_j A_j u_j = 0$$

where A_j's are constants and u_j's are nodal displacement components.

مثال: یک خرپای سه میله‌ای



المان میله در فضای دو بعدی



Element	Node i	Node j	L (ft)	A (in^2)	θ	C	S	C^2	S^2	CS
1	1	2	10.00	2	90	0	1	0	1	0
2	1	3	14.14	2	45	0.7071	0.7071	0.5	0.5	0.5
3	1	4	10.00	2	0	1	0	1	0	0

$E = 30 \times 10^6$ psi for all members

المان ميله در فضاى دو بعدى

$$\left[\,k^{(1)}\,\right]=\frac{(30\text{ x }10^{6})\,(2)}{(10)\,(12)}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\,k^{(2)}\,\right]=\frac{(30\text{ x }10^{6})\,(2)}{(10)\left(\sqrt{2}\right)(12)}\begin{bmatrix}0.5&0.5&-0.5&-0.5\\0.5&0.5&-0.5&-0.5\\-0.5&-0.5&0.5&0.5\\-0.5&-0.5&0.5&0.5\end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\left[k^{(3)} \right] = \frac{(30 \text{ x } 10^6)\,(2)}{(10)\,(12)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\cdots$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\cdots\begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & 0 & 0 & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & 0 & 0 & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\cdots$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\cdots\begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\ k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$[K]=(500000)\begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چرا سطر و ستون های سوم و هشتم ماتریس k صفر است؟

المان میله در فضای دو بعدی

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} = (500000)\begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 \\ 0.354 & 1.354 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.414 \text{ x } 10^{-2} \text{ in} \\ -1.59 \text{ x } 10^{-2} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\sigma^{(1)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.414 \text{ x } 10^{-2} \\ -1.59 \text{ x } 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.414 \text{ x } 10^{-2} \\ -1.59 \text{ x } 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.414 \text{ x } 10^{-2} \\ -1.59 \text{ x } 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(1)} = 3965 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(2)} = 1471 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(3)} = -1035 \text{ psi}$$