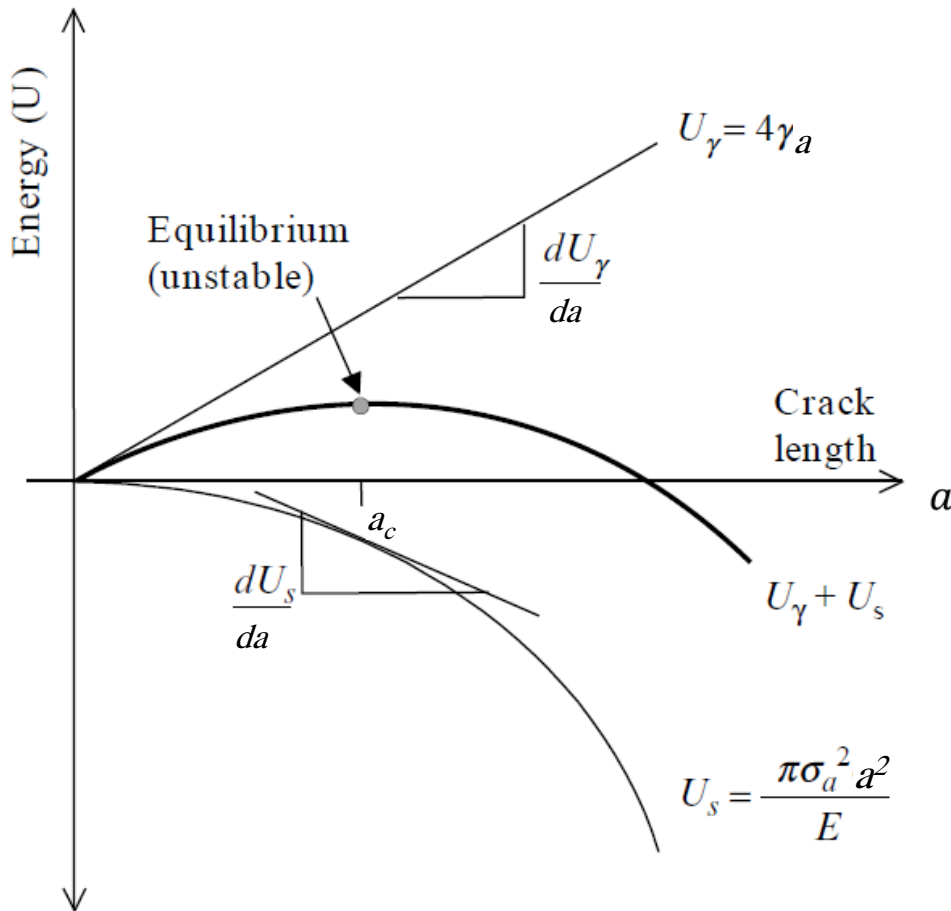




دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده مکانیک

# *Energy Release Rate*

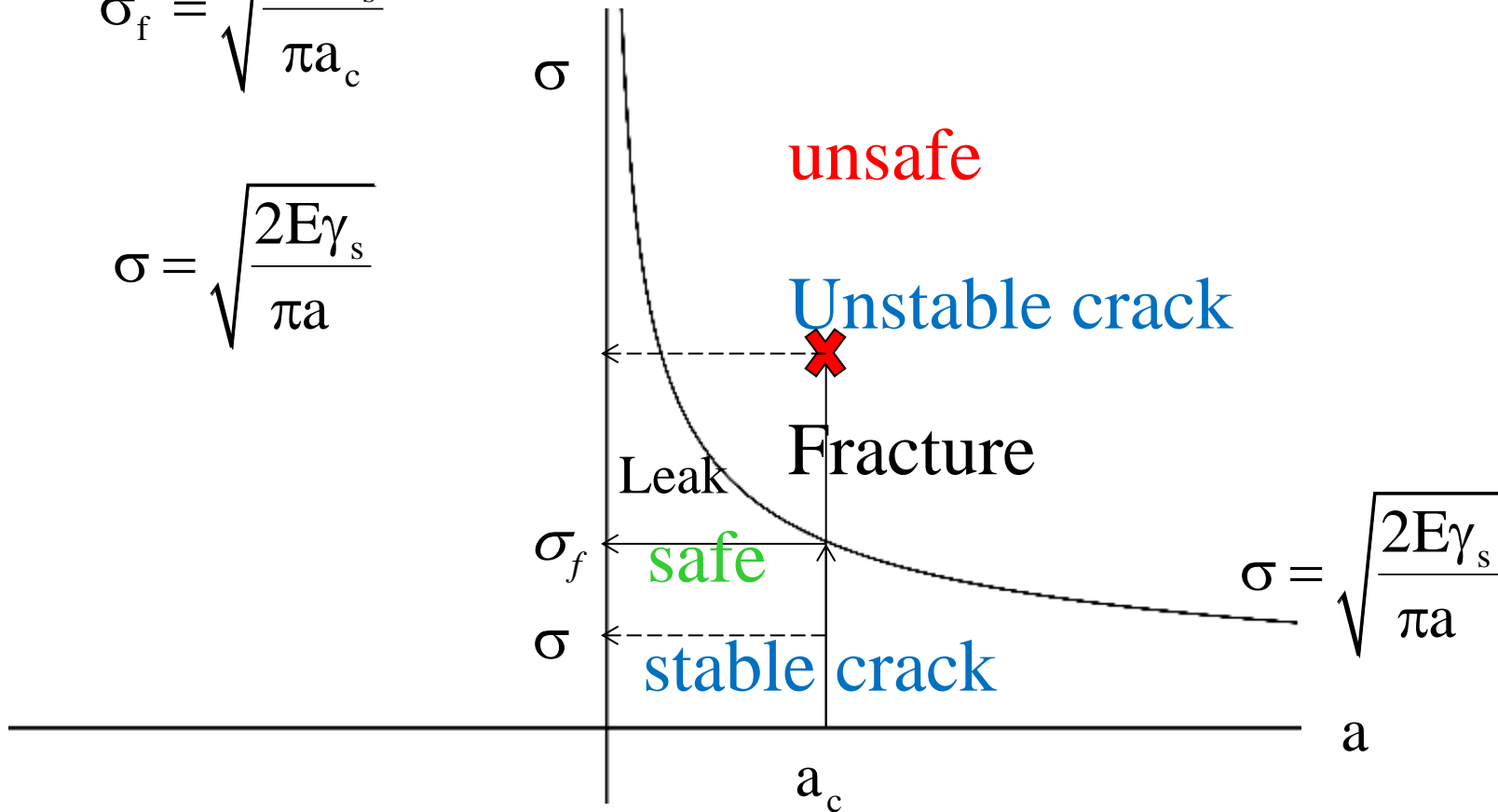


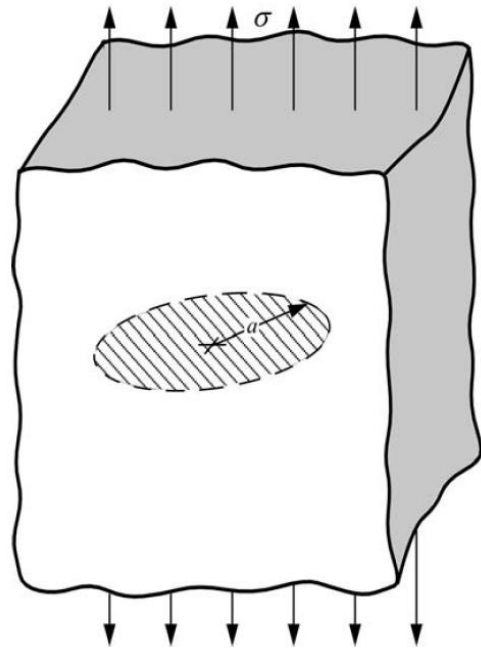
$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_c}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_c}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$





استفاده از معیار گریفیث در سایر قطعات ترک دار

$$\sigma_f = \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a} \right)^{1/2} \quad \sigma_f = \left( \frac{2E \gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2}$$

A penny-shaped (circular) crack embedded in a solid subjected to a remote tensile stress.

## اصلاح (توسعه) معیار گریفیث

ایروین (Irwin) و ارووان (Orowan) (جداگانه) معیار گریفیث را برای استفاده

در مواد نرم (تغییر شکل پلاستیک قابل توجه) توسعه دادند. 
$$\sigma_f = \left( \frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2}$$

$\gamma_p$ : کار پلاستیک بر واحد سطح است و به مراتب بزرگتر از  $\gamma_s$  است.

$$\gamma_s \sim (1-2) J/m^2$$

$$\gamma_p \sim (10^2 - 10^3) J/m^2$$

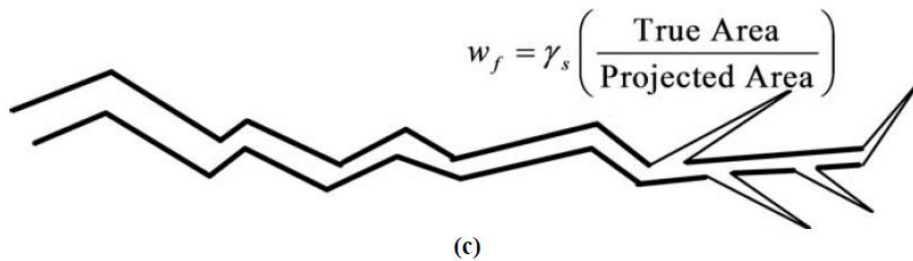
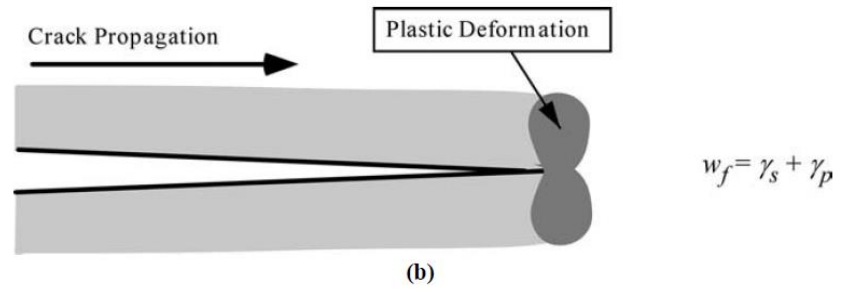
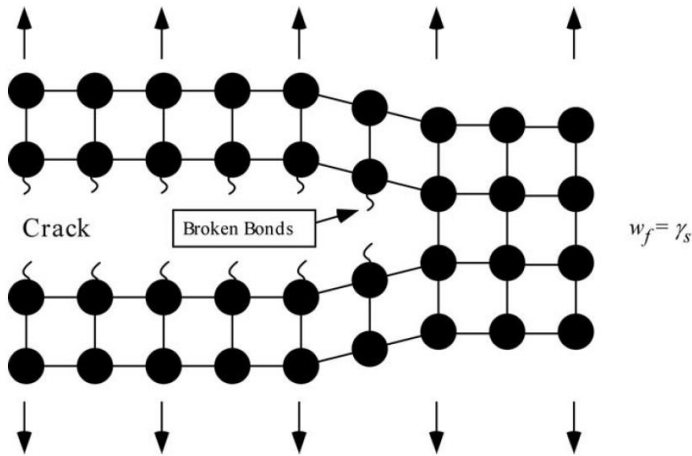
معیار گریفیث برای فلزات به صورت فوق اصلاح شد؛ امکان توسعه معیار

گریفیث برای سایر مواد با انواع اتلاف‌های انرژی وجود دارد. 
$$\sigma_f = \left( \frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2}$$

$w_f$ : انرژی شکست است که اثر تغییر شکل پلاستیک، ویسکوالاستیک،

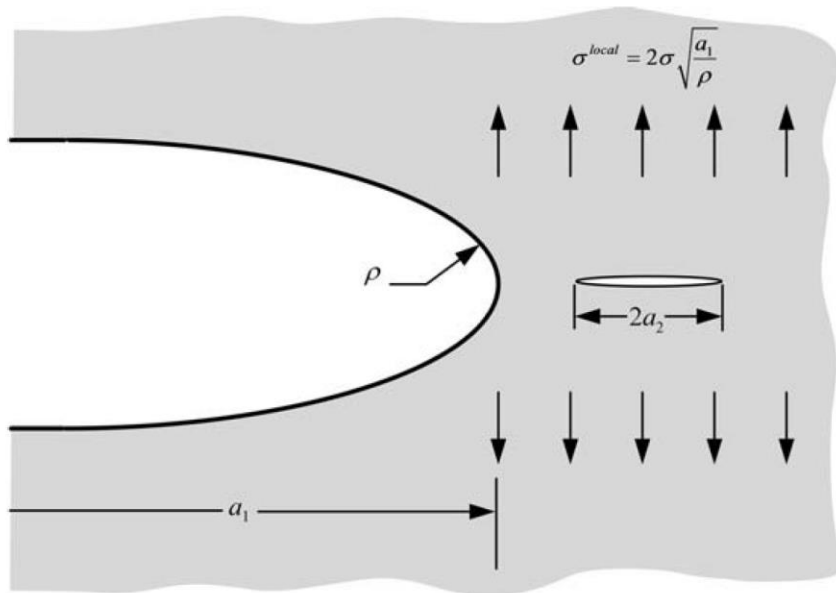
ویسکوپلاستیک متناسب با رفتار ماده مربوطه است.

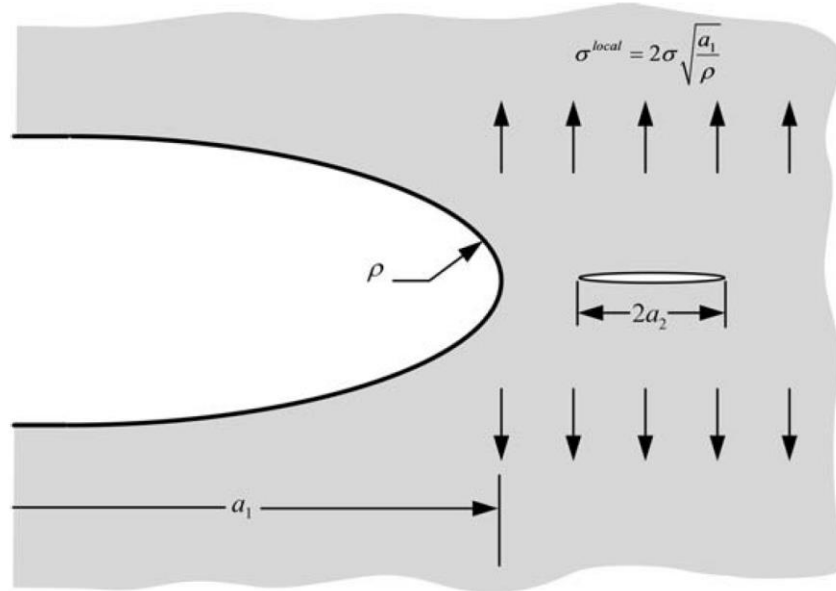
انرژی شکست، می تواند تاثیر ترک های انشعاب دار و زیگزاک - که مساحت سطح را افزایش می دهند - را نیز در بر گیرد.



Crack propagation in various types of materials, with the corresponding fracture energy. (a) ideally brittle material, (b) quasi-brittle elastic-plastic material and, (c) brittle material with crack meandering and branching.

**مثال:** یک صفحه تخت با ماده ترد دارای ترک ماکروسکوپی لبه‌ای به طول  $a_1$  با شعاع نوک ترک،  $\rho$ ، است. یک ترک میکروسکوپی سکه‌ای تیز به طول  $2a_2$  نزدیک نوک ترک ماکروسکوپی مطابق شکل واقع شده است. در صورتی که معیار گریفیث برای تنش ماکروسکوپی  $a_1$  برقرار باشد؛ مطلوبست تخمین کمترین طول ترک میکروسکوپی که باعث شکست این صفحه می‌شود





$$\sigma_{\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{a_1}{\rho}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_1}}$$

For a penny-shaped (circular) crack:

$$\sigma_f = \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a} \right)^{1/2}$$

$$2 \left( \frac{2E\gamma_s}{\pi a_1} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{a_1}{\rho}} = \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a_2} \right)^{1/2} \longrightarrow a_2 = \frac{\pi^2 \rho}{16(1 - \nu^2)}$$

for  $\nu = 0.3 \longrightarrow a_2 = 0.68\rho$ .





*energy release rate* :  $G$

نرخ آزادسازی انرژی: 

$E$  : The total energy

$\Pi$  : The potential energy of an elastic body

$F$  : The work done by external forces

$U$  : The strain energy stored in the body

$W_s$  : The work required to create new surfaces

Irwin defined an *energy release rate*  $G$ , which is a measure of the energy available for an increment of crack extension:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}$$

Since  $G$  is obtained from the derivative of a potential, it is also called the *crack extension force* or the *crack driving force*.

*energy release rate* :  $G$

نرخ آزادسازی انرژی: 

- crack extension occurs when  $G$  reaches a critical value, i.e.,

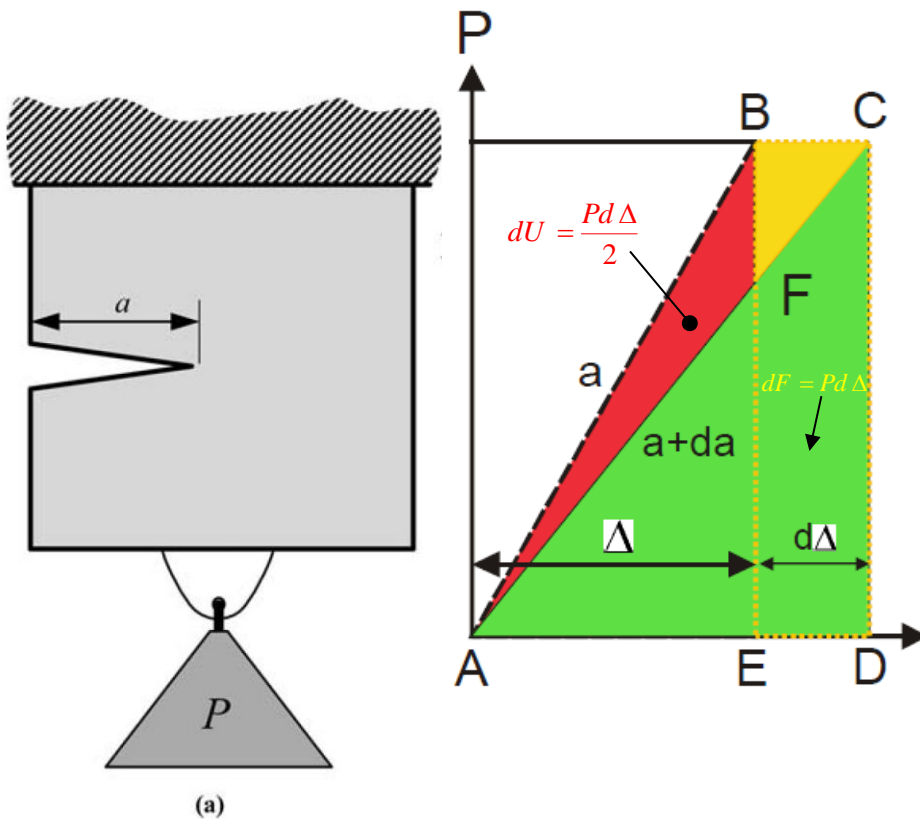
$$G_c = -\frac{dW_s}{dA} = 2w_f$$

where  $G_c$  is a measure of the *fracture toughness* of the material.

- The potential energy of an elastic body,  $\Pi$ , is defined as follows:

$$\Pi = U - F$$

**load controlled** : Consider a cracked plate that is dead loaded, since the load is fixed at  $P$ , the structure is said to be *load controlled*



Cracked plate at a fixed load  $P$ .

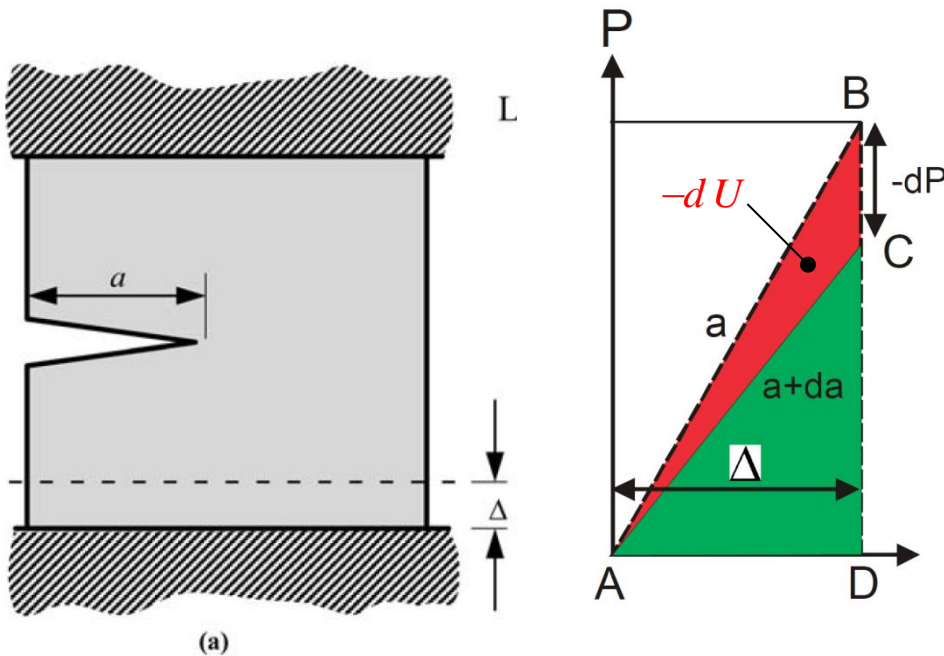
$$F = P \Delta$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{P \Delta}{2}$$

$$\Pi = U - F = -\frac{P \Delta}{2} = -U$$

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_P = \frac{P}{2B} \left( \frac{d\Delta}{da} \right)_P$$

*displacement controlled*: when displacement is fixed



$$F = 0$$

$$\Pi = U - F = U$$

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}$$

$$= -\frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_{\Delta} = -\frac{\Delta}{2B} \left( \frac{dP}{da} \right)_{\Delta}$$

Cracked plate at a fixed displacement  $\Delta$ .

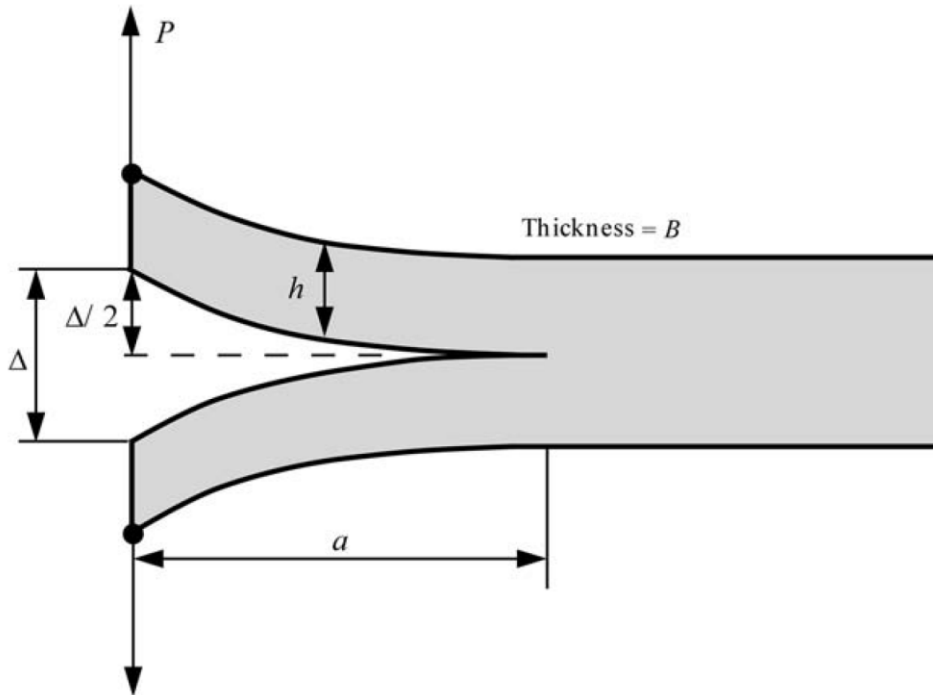


*The compliance*: the inverse of the plate stiffness  $C \triangleq \frac{\Delta}{P}$

For both load control and displacement control:  $G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da}$

$$\rightarrow \left( \frac{dU}{da} \right)_P = - \left( \frac{dU}{da} \right)_\Delta$$

مثال: مطلوبست محاسبه نرخ رهایی انرژی برای تیر زیر



$$\frac{\Delta}{2} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \text{where} \quad I = \frac{Bh^3}{12}$$

$$C = \frac{\Delta}{P} = \frac{2a^3}{3EI}$$

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} = \frac{P^2 a^2}{BEI} = \frac{12P^2 a^2}{B^2 h^3 E}$$

Double cantilever beam (DCB) specimen.



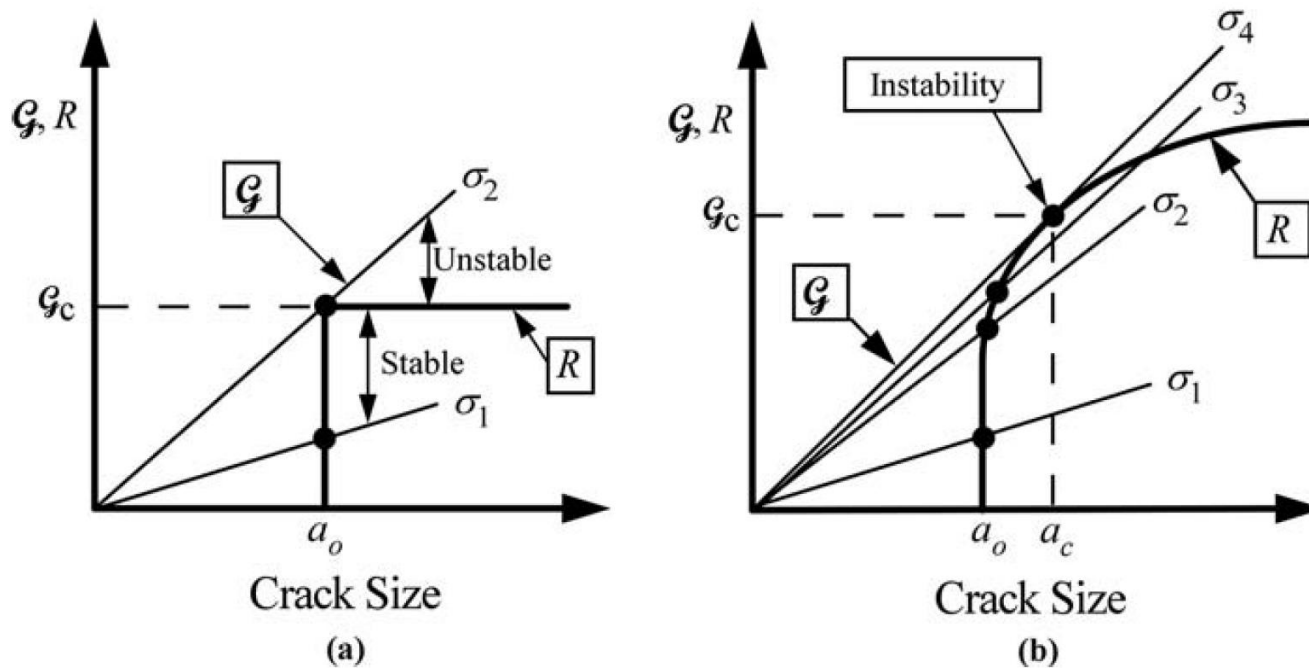
## *Instability and the R curve*

ناپایداری و منحنی  $R$  ◀

$R$ : the material resistance to crack extension

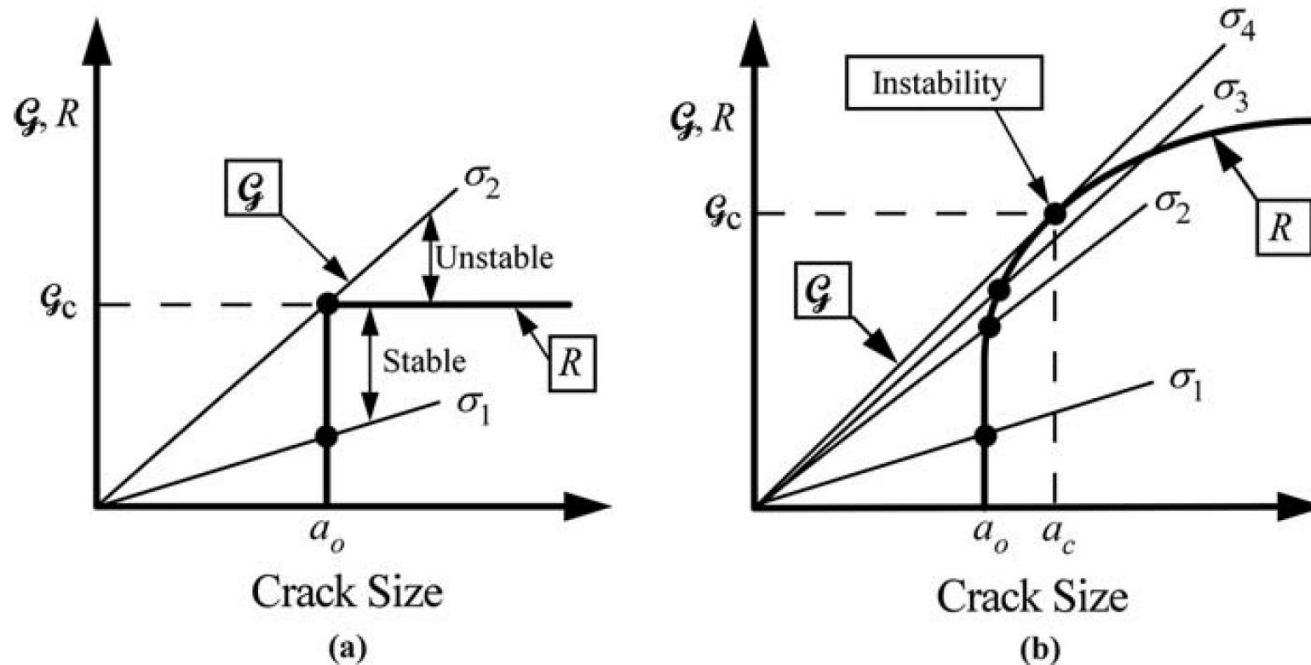
Crack extension occurs when  $G = 2w_f$ ; but crack growth may be stable or unstable, depending on how  $G$  and  $w_f$  vary with crack size.

A plot of  $R$  vs. crack extension is called a *resistance curve* or *R curve*.  
The corresponding plot of  $G$  vs. crack extension is the *driving force curve*.



Schematic driving force vs.  $R$  curve diagrams (a) flat  $R$  curve and (b) rising  $R$  curve.





The conditions for stable crack growth can be expressed as follows:

$$G = R \quad \text{and} \quad \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}$$

Unstable crack growth occurs when

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}$$