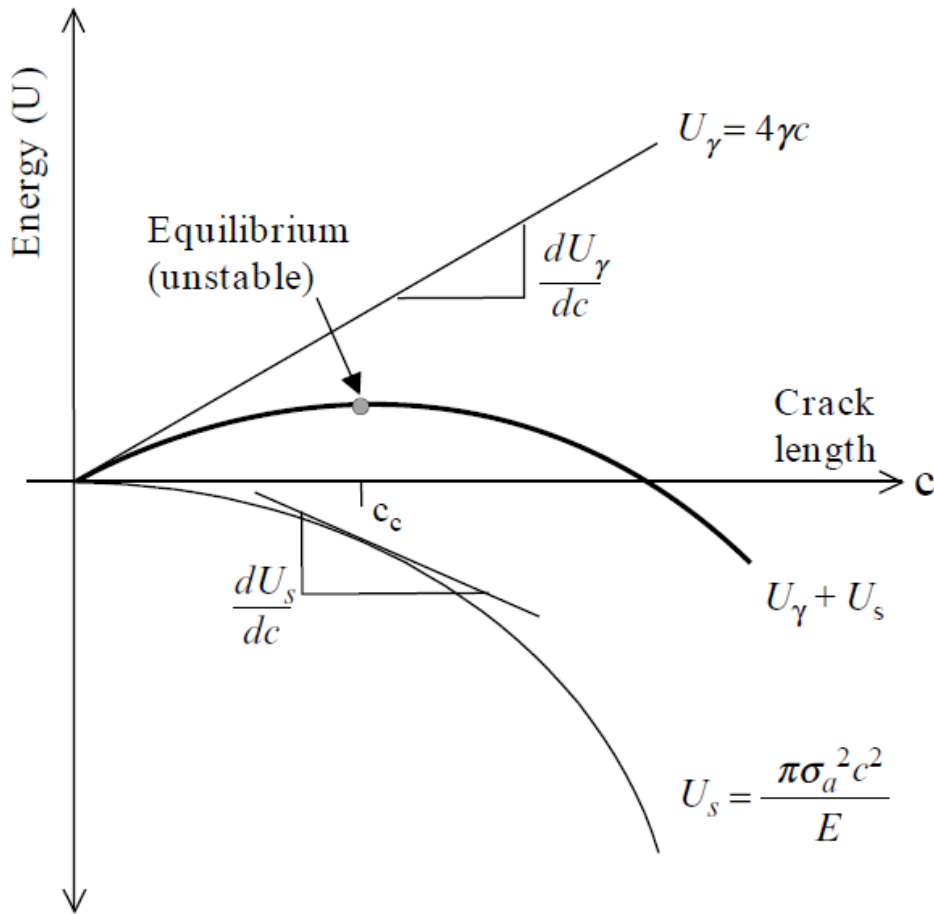




دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مکانیک

معیار گریفیت (ادامه)

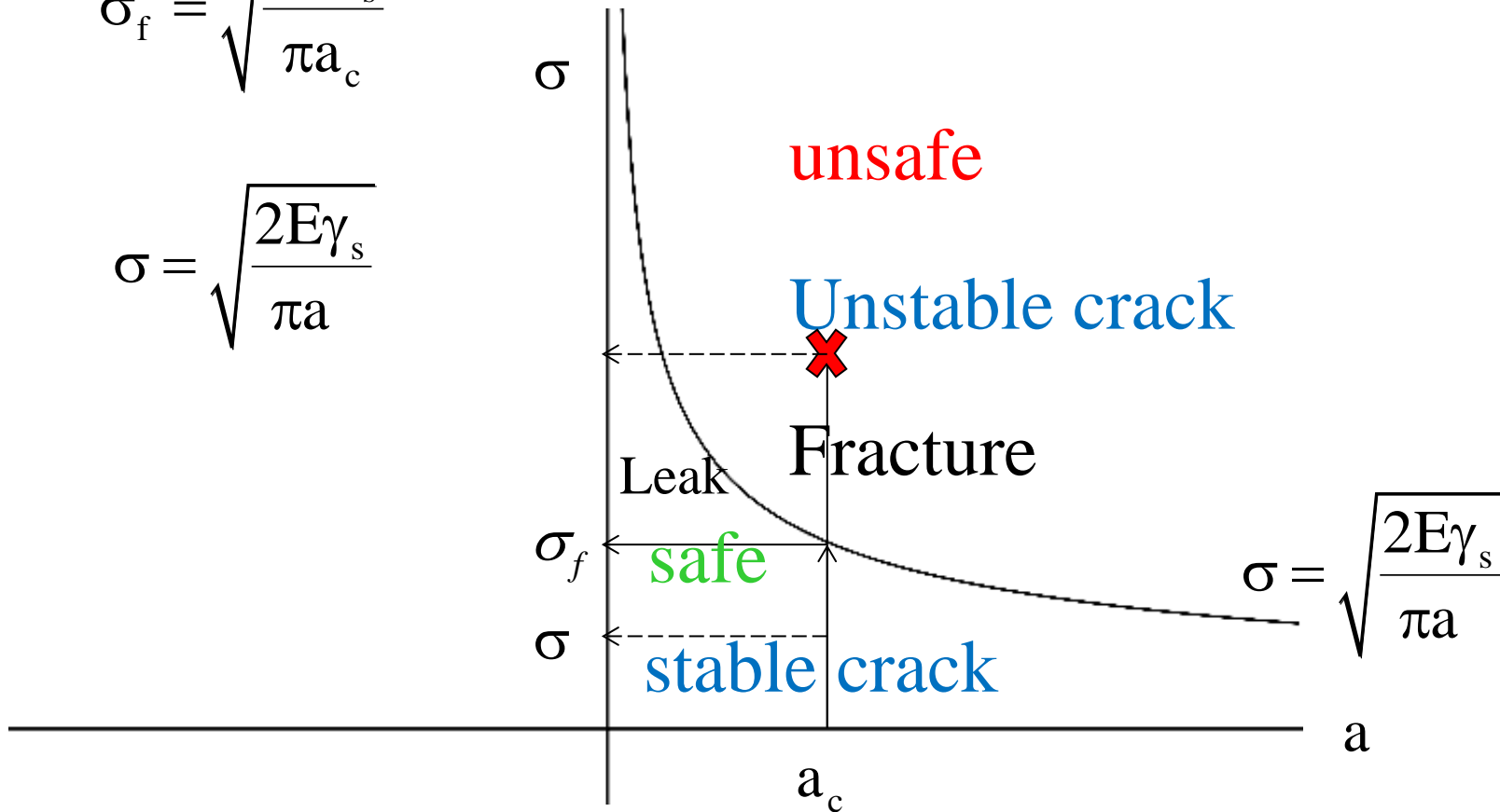


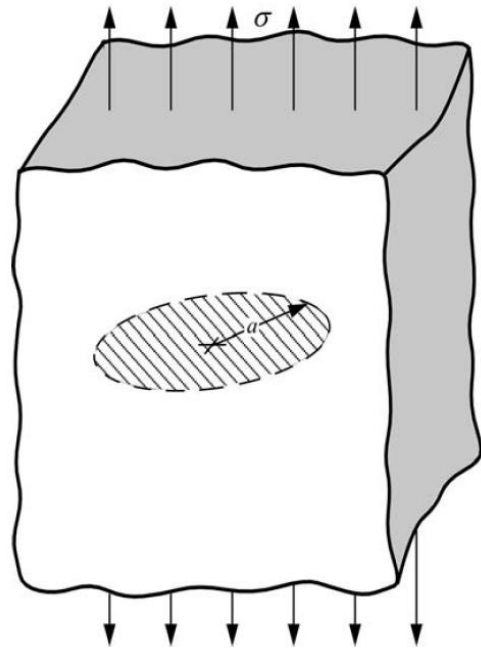
$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_c}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_c}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$





استفاده از معیار گریفیث در سایر قطعات ترک دار

$$\sigma_f = \left(\frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a} \right)^{1/2} \quad \sigma_f = \left(\frac{2E \gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2}$$

A penny-shaped (circular) crack embedded in a solid subjected to a remote tensile stress.

اصلاح (توسعه) معیار گریفیث

◀ ایروین (Irwin) و ارووان (Orowan) (جداگانه) معیار گریفیث را برای استفاده

در مواد نرم (تغییر شکل پلاستیک قابل توجه) توسعه دادند. $\sigma_f = \left(\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2}$

γ_p : کار پلاستیک بر واحد سطح است و به مراتب بزرگتر از γ_s است.

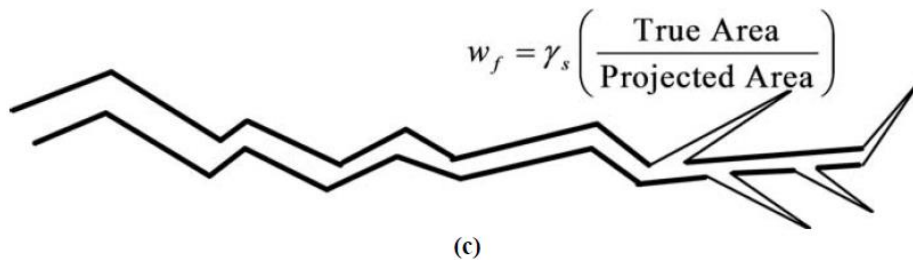
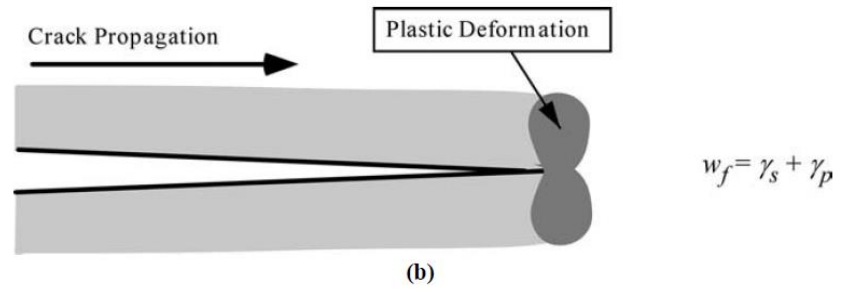
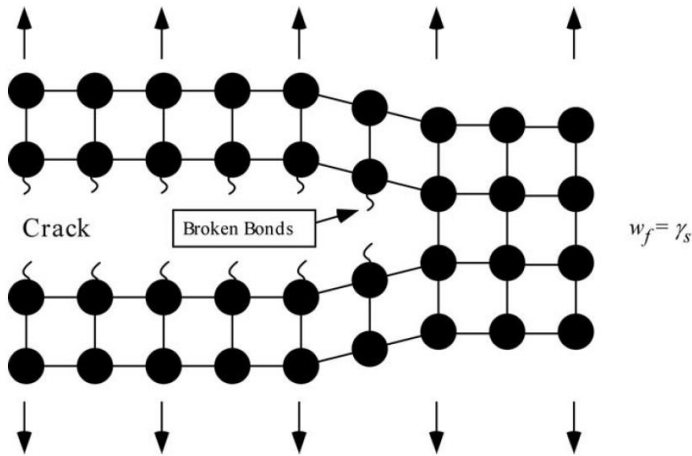
◀ معیار گریفیث برای فلزات به صورت فوق اصلاح شد؛ امکان توسعه معیار

گریفیث برای سایر مواد با انواع اتلاف‌های انرژی وجود دارد $\sigma_f = \left(\frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2}$

w_f : انرژی شکست است که اثر تغییر شکل پلاستیک، ویسکوالاستیک،

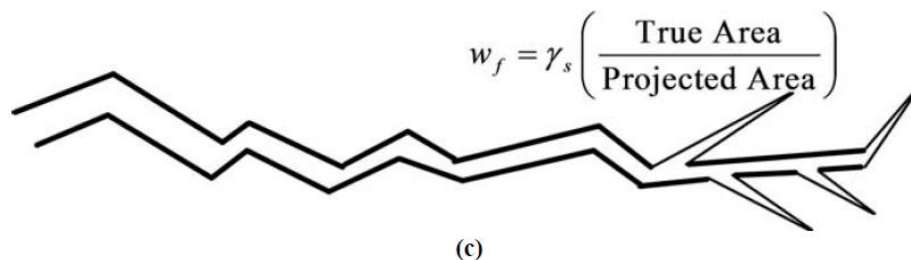
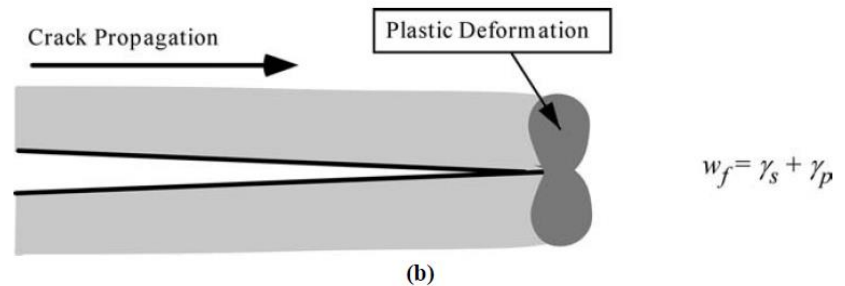
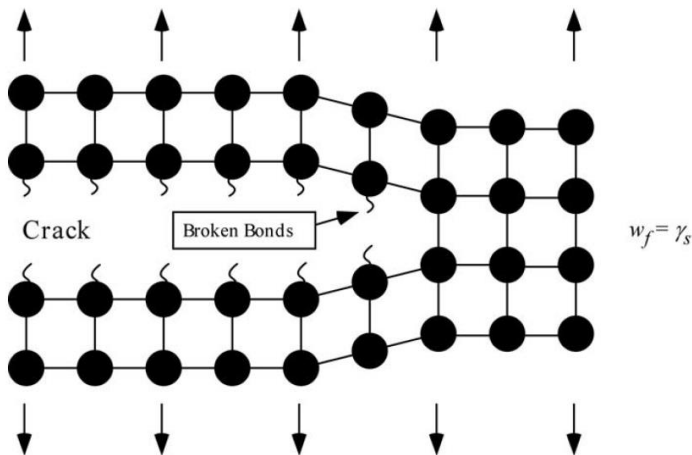
ویسکوپلاستیک متناسب با رفتار ماده مربوطه است.

انرژی شکست، می تواند تاثیر ترک های انشعاب دار و زیگزاک - که مساحت سطح را افزایش می دهند - را نیز در بر گیرد.



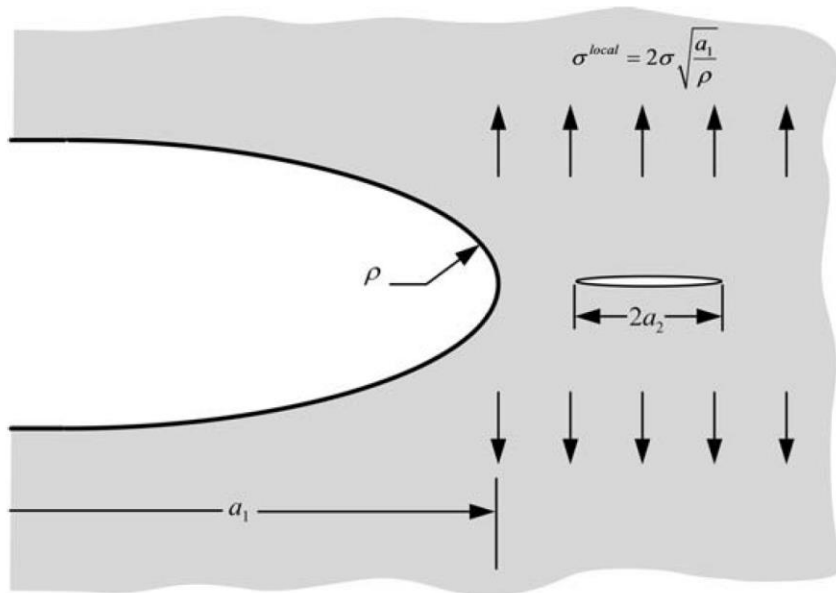
Crack propagation in various types of materials, with the corresponding fracture energy. (a) ideally brittle material, (b) quasi-brittle elastic-plastic material and, (c) brittle material with crack meandering and branching.

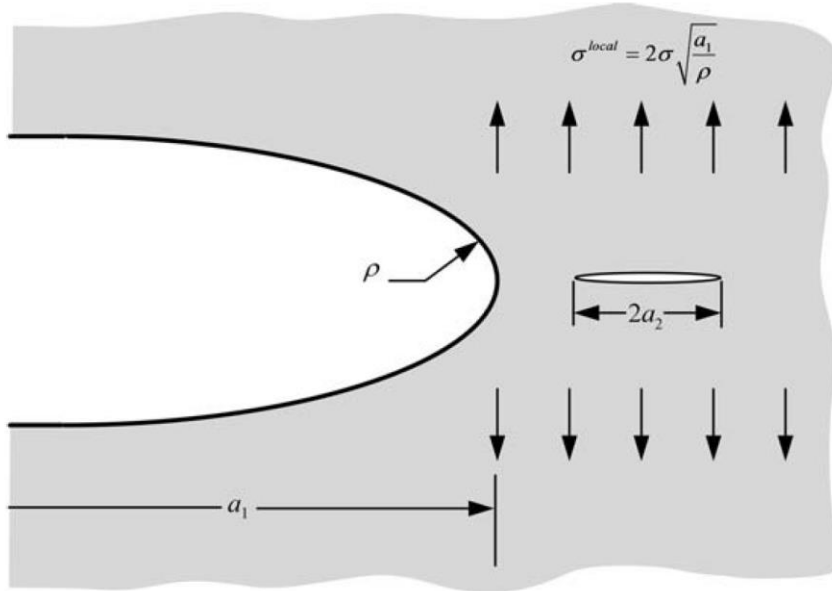
انرژی شکست، می تواند تاثیر ترک های انشعاب دار و زیگزاک - که مساحت سطح را افزایش می دهد - را نیز در بر گیرد.



Crack propagation in various types of materials, with the corresponding fracture energy. (a) ideally brittle material, (b) quasi-brittle elastic-plastic material and, (c) brittle material with crack meandering and branching.

مثال: یک صفحه تخت با ماده ترد دارای ترک ماکروسکوپی لبه‌ای به طول a_1 با شعاع نوک ترک، ρ ، است. یک ترک میکروسکوپی سکه‌ای تیز به طول a_2 نزدیک نوک ترک ماکروسکوپی مطابق شکل واقع شده است. در صورتی که معیار گریفیث برای تنش ماکروسکوپی a_1 برقرار باشد؛ مطلوبست تخمین کمترین طول ترک میکروسکوپی که باعث شکست این صفحه می‌شود





$$\sigma_{\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{a_1}{\rho}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a_1}}$$

For a penny-shaped (circular) crack:

$$\sigma_f = \left(\frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a} \right)^{1/2}$$

$$2 \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a_1} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{a_1}{\rho}} = \left(\frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) a_2} \right)^{1/2} \longrightarrow a_2 = \frac{\pi^2 \rho}{16(1 - \nu^2)}$$

for $\nu = 0.3 \longrightarrow a_2 = 0.68\rho$.



energy release rate : G

نرخ آزادسازی انرژی: 

E : The total energy

Π : The potential energy of an elastic body

F : The work done by external forces

U : The strain energy stored in the body

W_s : The work required to create new surfaces

Irwin defined an *energy release rate* G , which is a measure of the energy available for an increment of crack extension:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}$$

Since G is obtained from the derivative of a potential, it is also called the *crack extension force* or the *crack driving force*.

energy release rate : G

نرخ آزادسازی انرژی: 

- crack extension occurs when G reaches a critical value, i.e.,

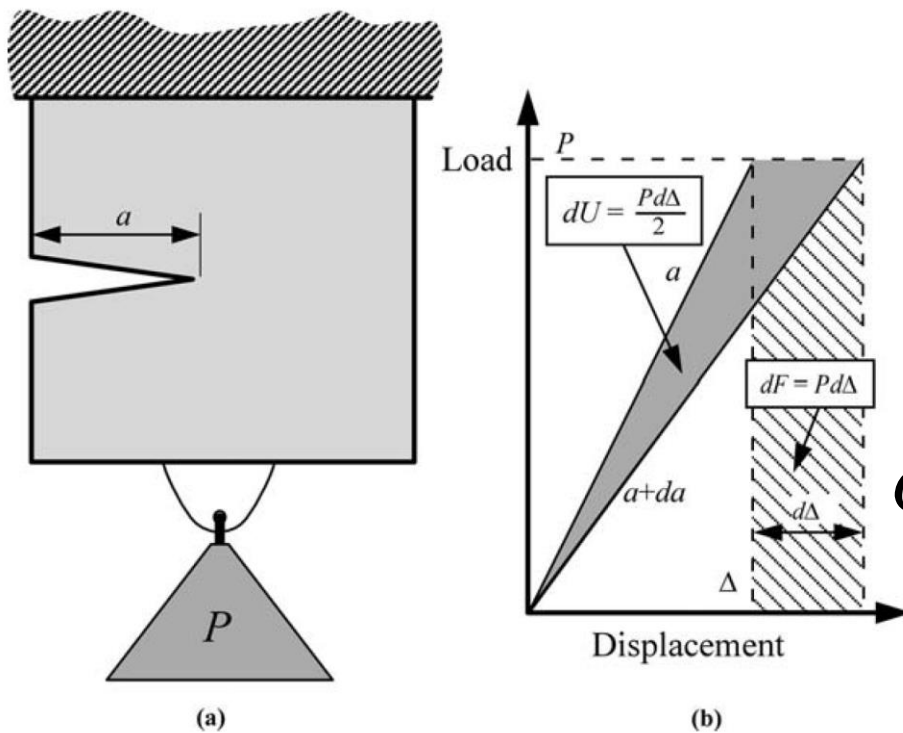
$$G_c = -\frac{dW_s}{dA} = 2w_f$$

where G_c is a measure of the *fracture toughness* of the material.

- The potential energy of an elastic body, Π , is defined as follows:

$$\Pi = U - F$$

load controlled : Consider a cracked plate that is dead loaded, since the load is fixed at P , the structure is said to be *load controlled*



$$F = P\Delta$$

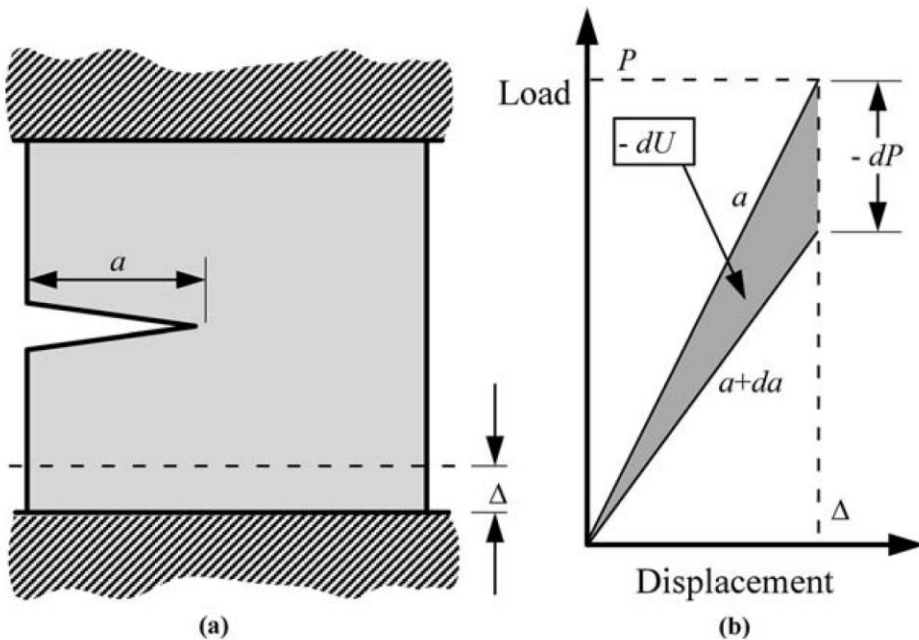
$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{P\Delta}{2}$$

$$\Pi = U - F = -\frac{P\Delta}{2} = -U$$

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right)_P = \frac{P}{2B} \left(\frac{d\Delta}{da} \right)_P$$

Cracked plate at a fixed load P .

displacement controlled: when displacement is fixed



Cracked plate at a fixed displacement Δ .

$$F = 0$$

$$\Pi = U - F = U$$

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = -\frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right)_{\Delta} = -\frac{\Delta}{2B} \left(\frac{dP}{da} \right)_{\Delta}$$

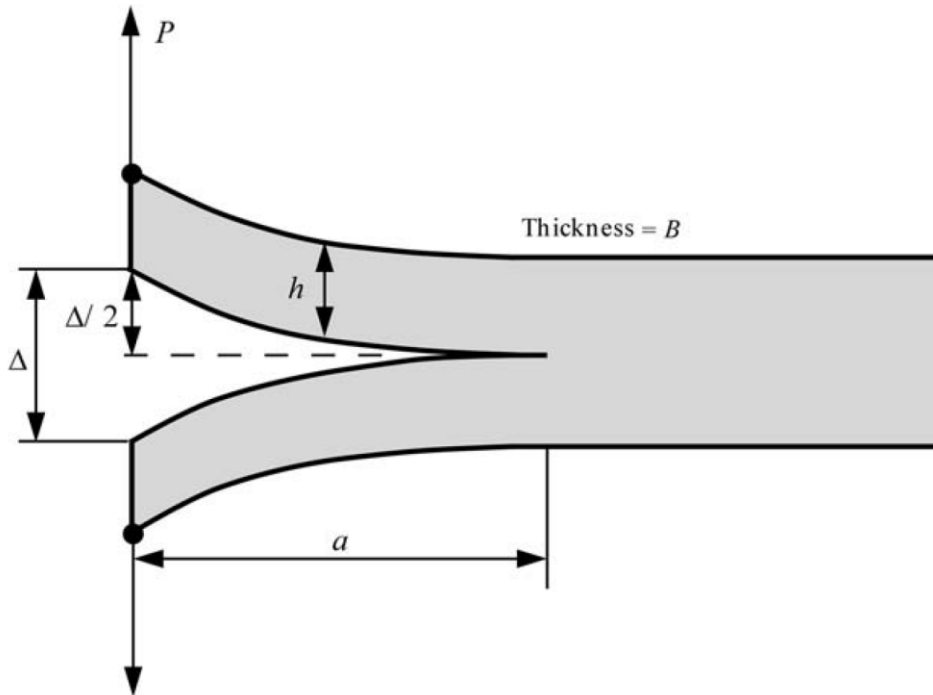


The compliance: the inverse of the plate stiffness $C \triangleq \frac{\Delta}{P}$

For both load control and displacement control: $G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da}$

$$\left(\frac{dU}{da} \right)_P = - \left(\frac{dU}{da} \right)_\Delta$$

مثال: مطلوبست محاسبه نرخ رهایی انرژی برای تیر زیر



$$\frac{\Delta}{2} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \text{where} \quad I = \frac{Bh^3}{12}$$

$$C = \frac{\Delta}{P} = \frac{2a^3}{3EI}$$

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} = \frac{P^2 a^2}{BEI} = \frac{12P^2 a^2}{B^2 h^3 E}$$

Double cantilever beam (DCB) specimen.



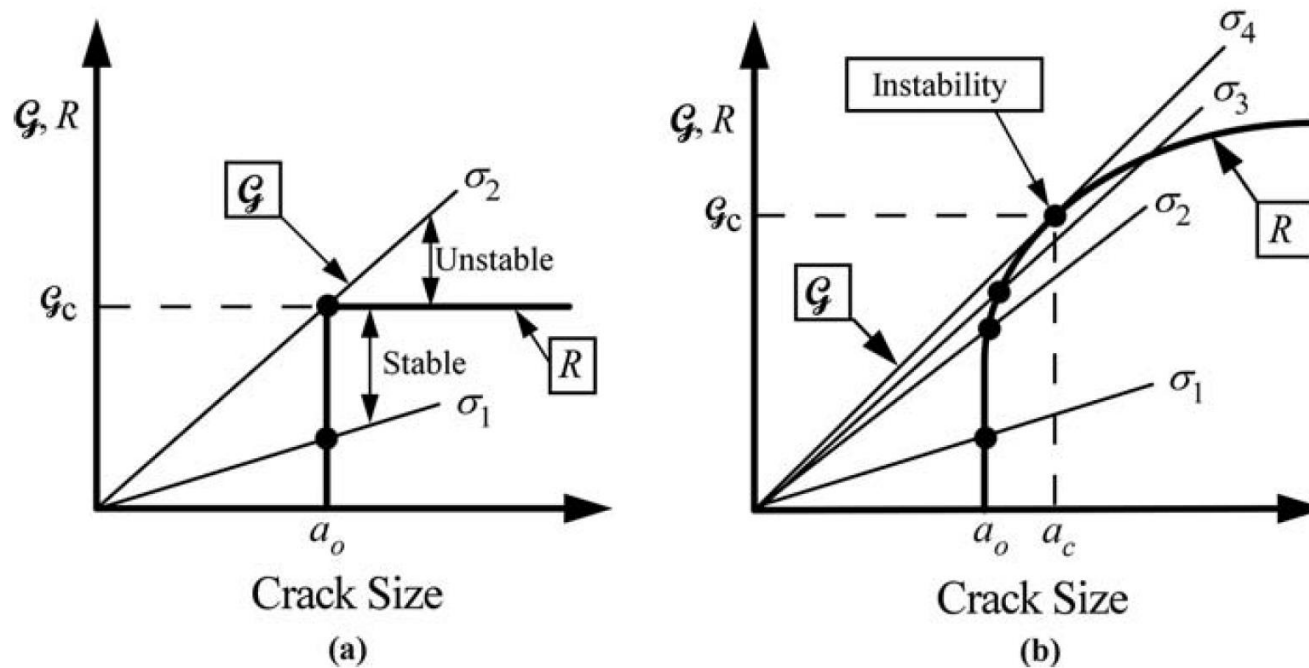
Instability and the R curve

ناپایداری و منحنی R : 

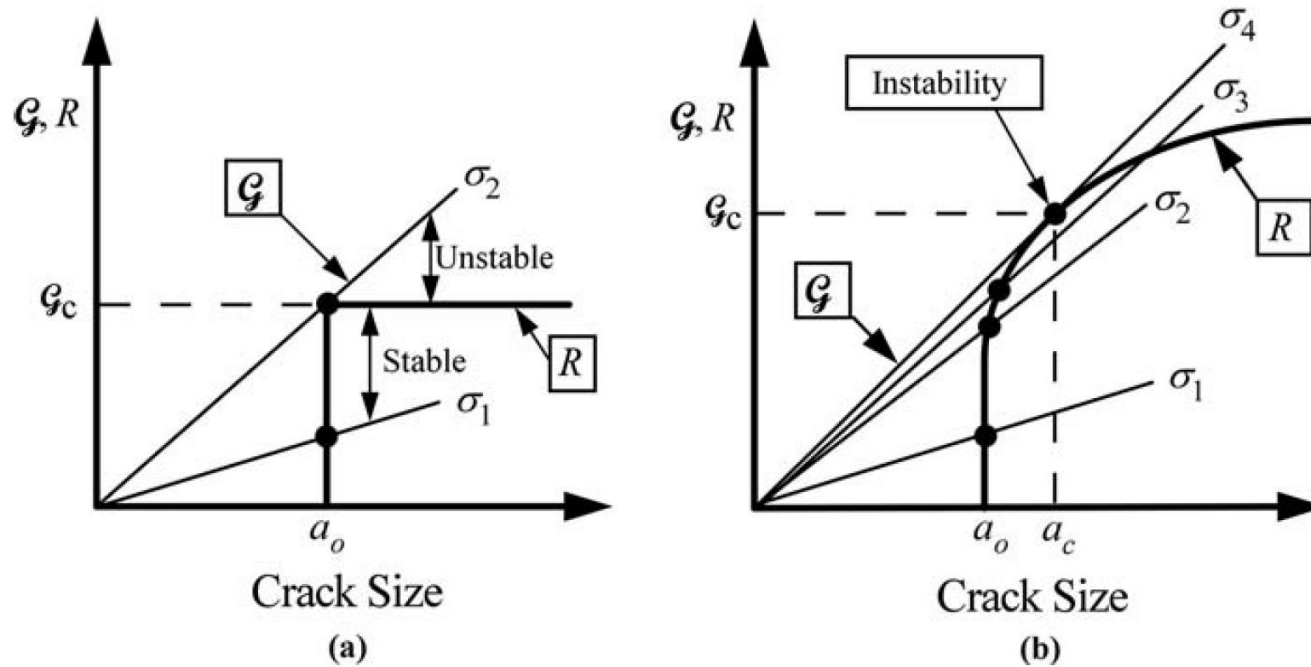
R : the material resistance to crack extension

Crack extension occurs when $G = 2w_f$; but crack growth may be stable or unstable, depending on how G and w_f vary with crack size.

A plot of R vs. crack extension is called a *resistance curve* or *R curve*.
The corresponding plot of G vs. crack extension is the *driving force curve*.



Schematic driving force vs. R curve diagrams (a) flat R curve and (b) rising R curve.



The conditions for stable crack growth can be expressed as follows:

$$G = R \quad \text{and} \quad \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}$$

Unstable crack growth occurs when

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}$$