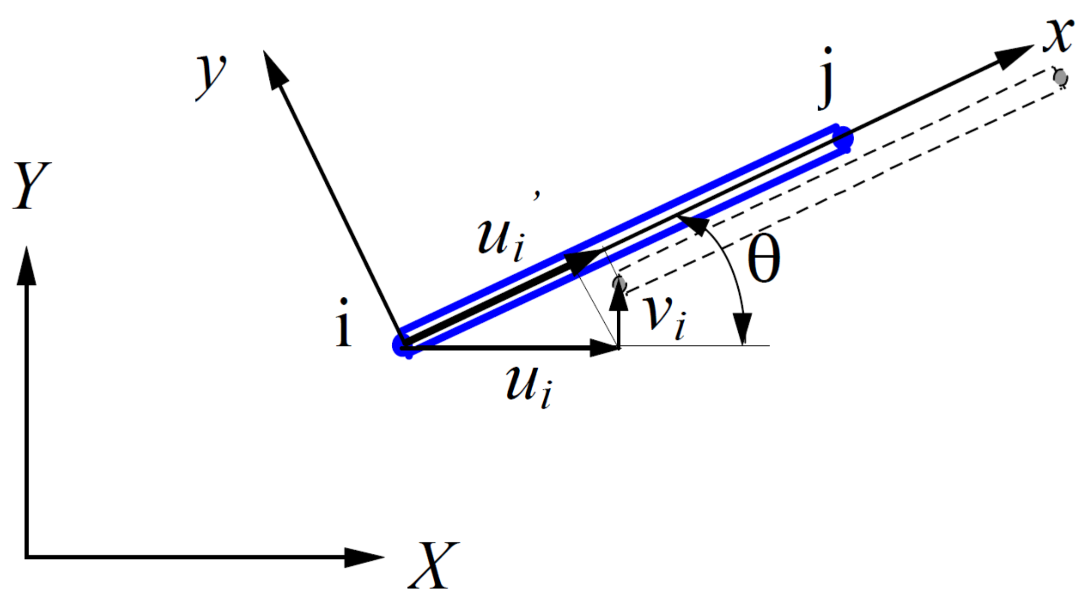
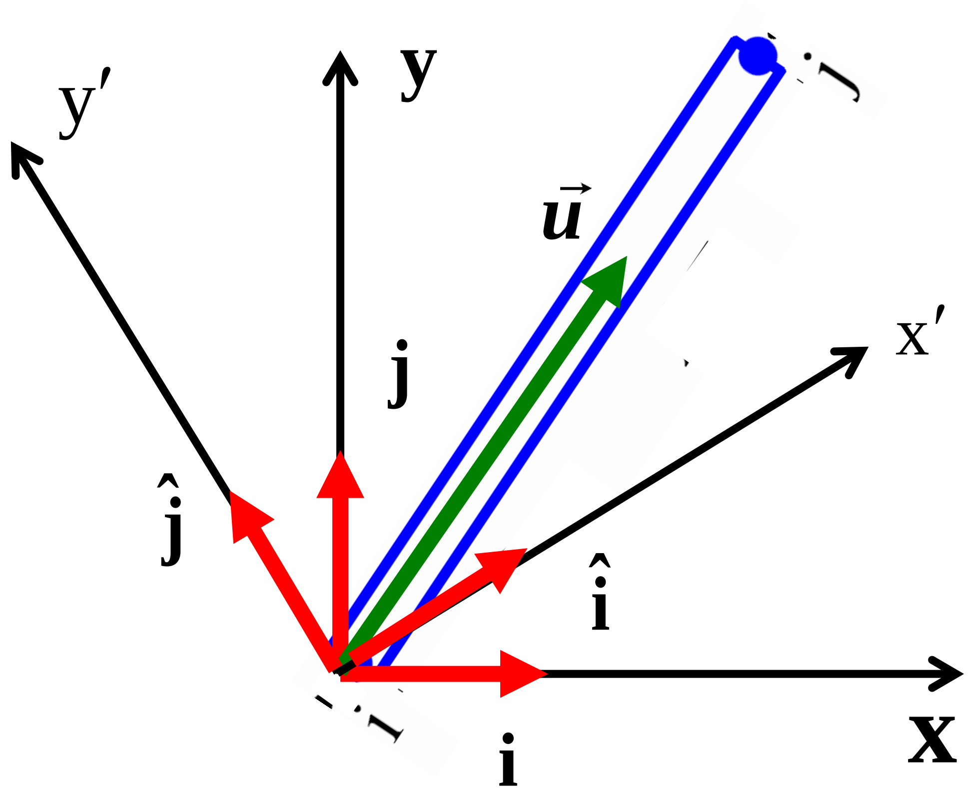
المان میله در فضای دو و سه بعدی

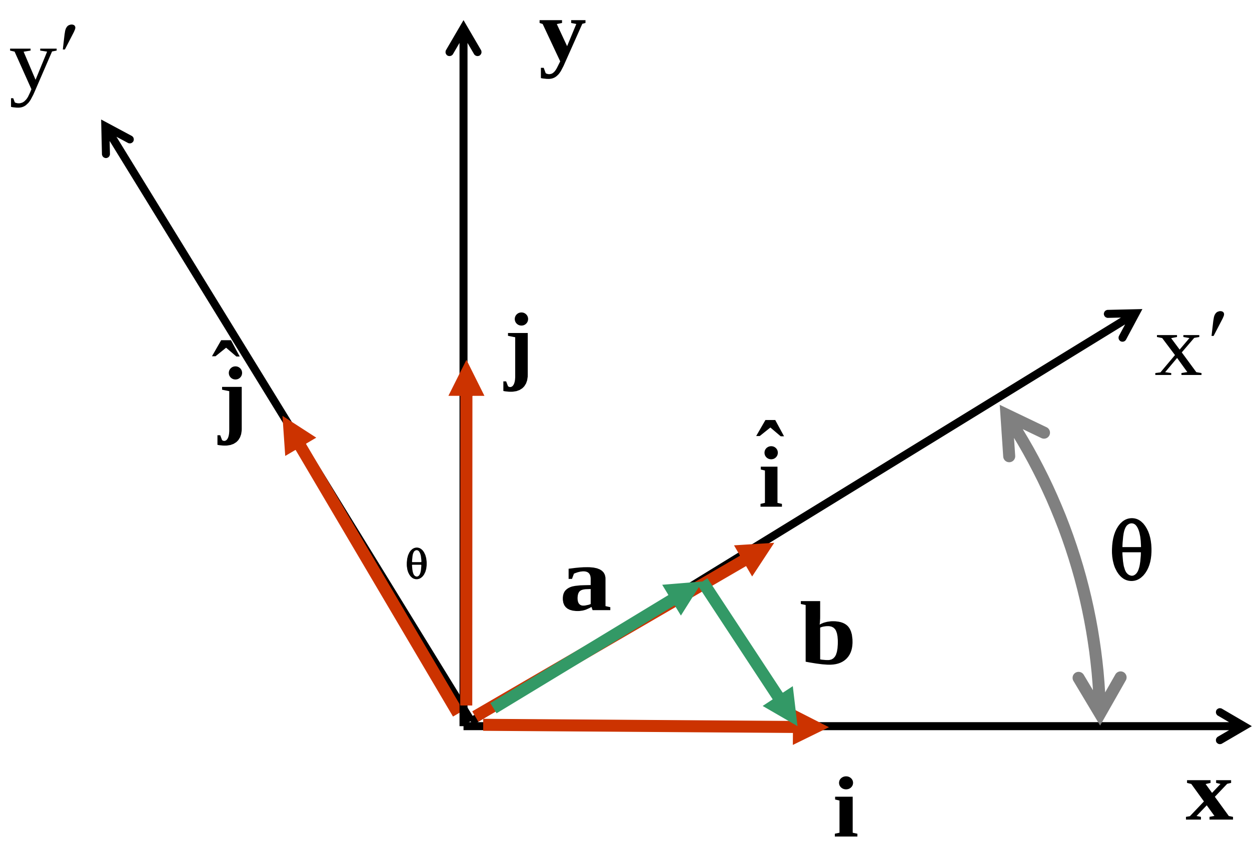


انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:



$$\vec{u} = u_i i + v_i j = u'_i \hat{i} + v'_i \hat{j}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i}$$

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{i}| \cos\theta$$

$$|\mathbf{i}| = 1$$

$$|\mathbf{a}| = \cos\theta$$

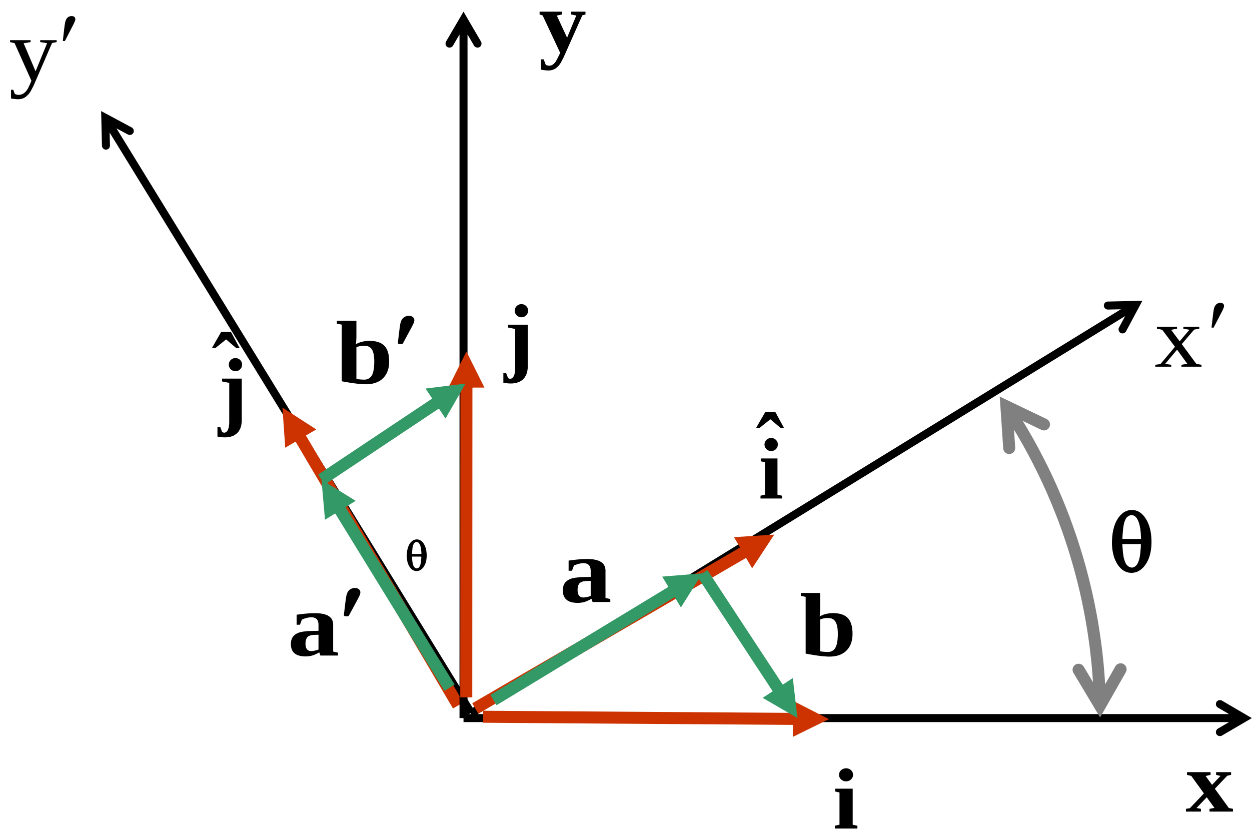
$$|\mathbf{b}| = \sin\theta$$

$$\mathbf{a} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{b} = \sin\theta\ (-\hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{i} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:



$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}' = \cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{b}' = \sin\theta\ \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{j} = \sin\theta\ \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \mathrm{u}_\mathrm{i} i + v_\mathrm{i} j = \mathrm{u}'_\mathrm{i}\hat{i} + v'_i \hat{j}$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{i}(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}) + v_\mathrm{i}(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

$$= \mathrm{u}'_\mathrm{i}\hat{i} + v'_i \hat{j}$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{i}\cos\theta + v_\mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{u}'_\mathrm{i}$$

$$-\mathrm{u}_\mathrm{i}\sin\theta + v_\mathrm{i}\cos\theta = v'_i$$

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{u}'_\mathrm{i} \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{u}_\mathrm{i} \\ v_\mathrm{i} \end{Bmatrix}$$

انتقال یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر:

ماتریس انتقال:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$l = \cos\theta$$

$$m = \sin\theta$$

Transformation matrix

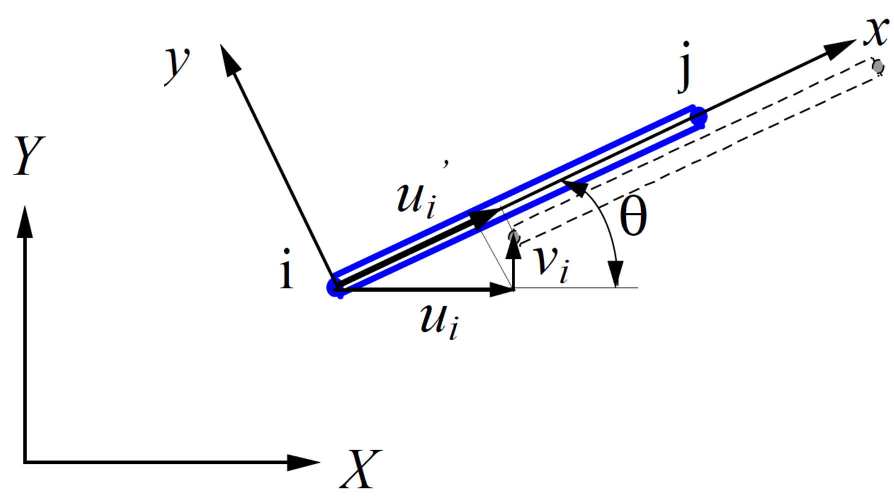
$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_i = \tilde{\mathbf{T}}\, \mathbf{u}_i$$

$$\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{T}$$

متعامد
orthogonal

المان میله در فضای دو بعدی



$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i' = \tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_i$$

Local	***Global***
x, y u_i', v_i' 1 dof at node	X, Y u_i, v_i 2 dof's at node

المان میله در فضای دو بعدی

برای دو گره از المان میله می توان نوشت:

$$\mathbf{u}'_i=\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_i\,,\quad \mathbf{u}'_j=\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{u}_j$$

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'=\mathbf{T}\,\mathbf{u} \qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

به صورت مشابه رابطه بردار نیرو در دو دستگاه xy و $x'y'$ برابر است با : $\mathbf{f}'=\mathbf{T}\mathbf{f}$

ماتریس سختی میله در فضای دوبعدی

معادلات تعادل در دستگاه محلی $x'y'$

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{Bmatrix}$$

با افزودن ابعاد ماتریس:

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{Bmatrix}$$

یا $\mathbf{k}'\mathbf{u}' = \mathbf{f}'$

ماتریس سختی میله در فضای دوبعدی

$$\mathbf{k'u'} = \mathbf{f'} \xrightarrow{\mathbf{u'}=\mathbf{Tu}} \mathbf{k'Tu} = \mathbf{Tf} \xrightarrow{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\times} \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k'Tu} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k'T} \qquad [\mathbf{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

k is a 4*4 symmetric matrix.

$$l = \cos\theta = \frac{\mathrm{X_j} - \mathrm{X_i}}{\mathrm{L}}, \qquad m = \sin\theta = \frac{\mathrm{Y_j} - \mathrm{Y_i}}{\mathrm{L}}$$

تنش در المان میله :

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

شرایط سوار کردن المان ها

- *شرط سازگاری: تغییرمکان در انتهای تمام میله‌های که به یک گره می‌رسند برابر است.*
- *شرط تعادل: برآیند نیروهای داخلی در تمام میله‌های که به یک گره ختم می‌شوند، باید با نیروهای خارجی اعمال شده در آن گره، در حال تعادل باشد.*

مراحل تحلیل یک سازه

۱ – جداسازی اعضا

۲ – محلی کردن ⟸ تفکیک کردن

۳– فرموله کردن اعضا

۴– سراسری نمودن

۵–ادغام ⟸ سوار کردن و حل

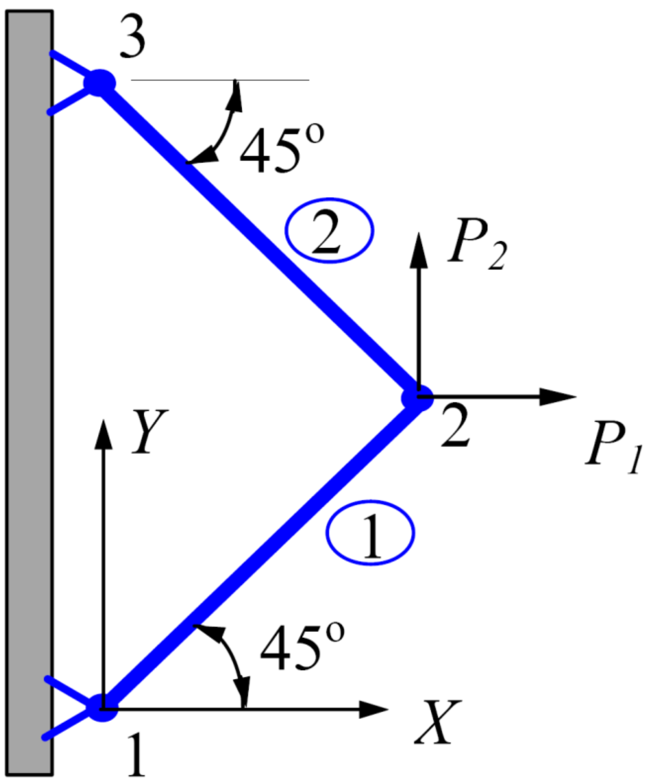
۶– اعمال شرایط مرزی

۷–حل

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ یک خرپای صفحه ای از دو میله یکسان با مشخصات (A، E و L) تحت بارگذاری مطابق شکل زیر قرار گرفته است. مطلوبست:

الف– تغییرمکان گره ۲، ب– تنش ایجاد شده در هر میله



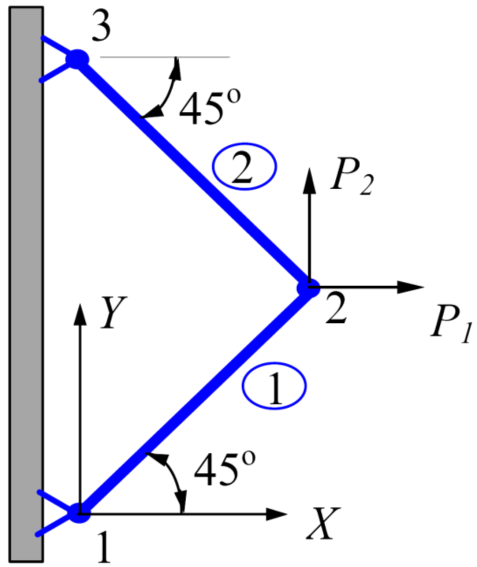
Solution: This simple structure is used here to demonstrate the assembly and solution process using the bar element in 2-D space.

In local coordinate systems, we have

$$\mathbf{k}_1^{'} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2^{'}$$

These two matrices cannot be assembled together, because they are in different coordinate systems. We need to convert them to global coordinate system OXY.

مثال: یک خرپای صفحه ای



❖ المان اول

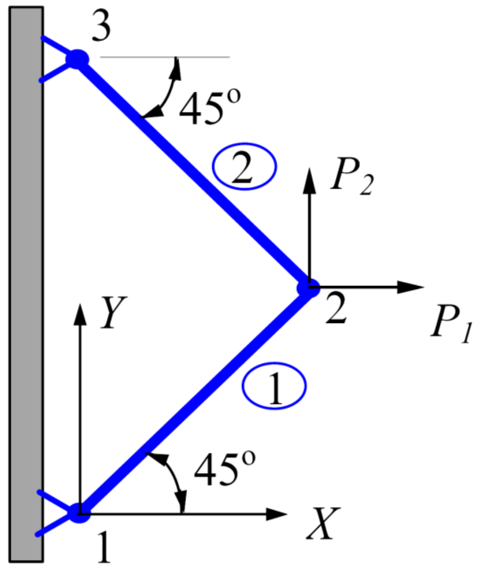
$$\theta = 45^o, \quad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}_1^{'} \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[\mathbf{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ المان دوم



$$\theta = 135^o,\ l = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_2^{'} \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

❖ سوار کردن:

$$
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\
\dfrac{EA}{2L} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}
$$

❖ اعمال شرایط مرزی:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \qquad F_{2X} = P_1, \quad F_{2Y} = P_2$$

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}(P_1 + P_2)$$

مثال: یک خرپای صفحه ای

$$\sigma_2 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left(P_1 - P_2\right)$$

Check the results:

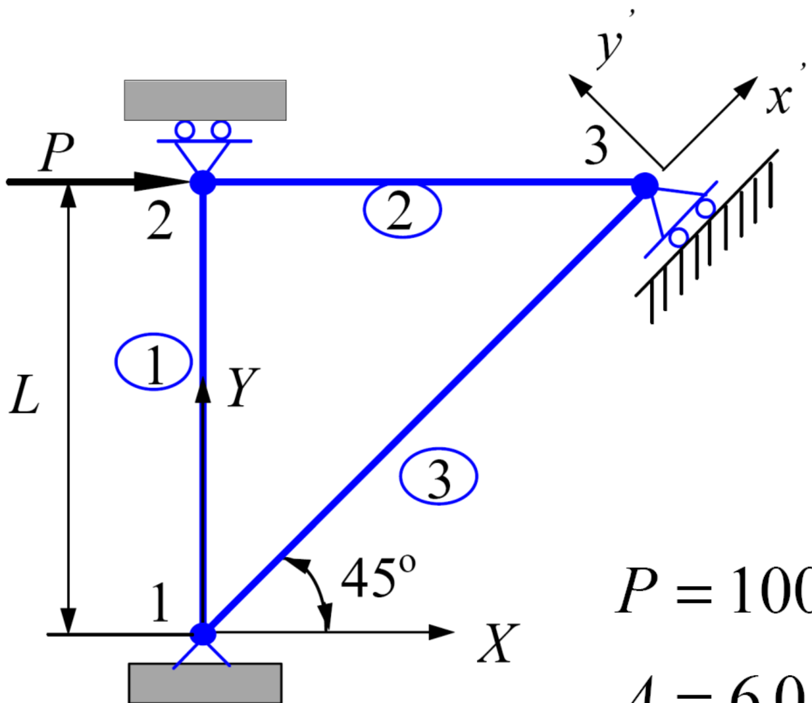
Look for the equilibrium conditions, symmetry, antisymmetry, etc.

مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

❖ برای خرپای صفحه ای زیر با مشخصات داده شده، مطلوبست:

الف– تغییرمکان در گره ها،

ب– نیروهای عکس العمل



$$P = 1000 \text{ kN}, \quad L = 1m, \quad E = 210\, GPa,$$

$$A = 6.0 \times 10^{-4} m^2 \quad \text{for elements 1 and 2,}$$

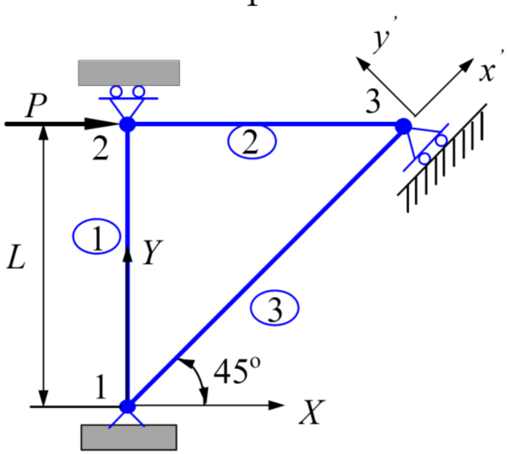
$$A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4} m^2 \quad \text{for element 3.}$$

Solution: We have an inclined roller at node 3, which needs special attention in the FE solution. We first assemble the global FE equation for the truss.

Element 1:

$$\theta = 90^o, \quad l = 0, \quad m = 1$$

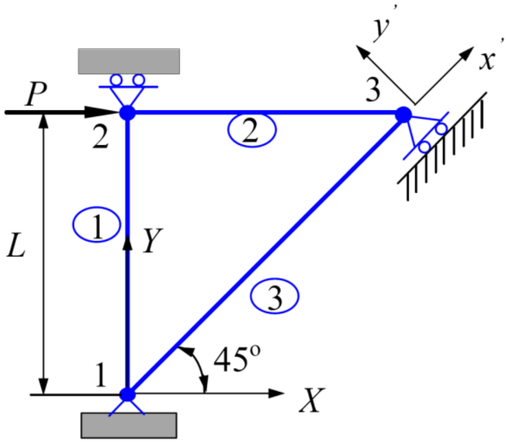
$$\mathbf{k}_1 = \frac{(210\times10^9)(6.0\times10^{-4})}{1}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (\mathrm{N/m})$$



$$[\mathrm{k}] = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

Element 2: $\theta = 0^o, \quad l = 1, \quad m = 0$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{(210\times10^9)(6.0\times10^{-4})}{1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} (\mathrm{N/m})$$

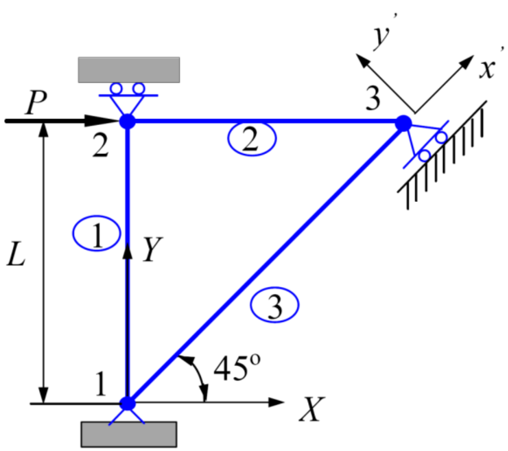


مثال: یک خرپای صفحه ای مقید

Element 3: $\theta = 45^o, \quad l = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{(210\times 10^9)(6\sqrt{2}\times 10^{-4})}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

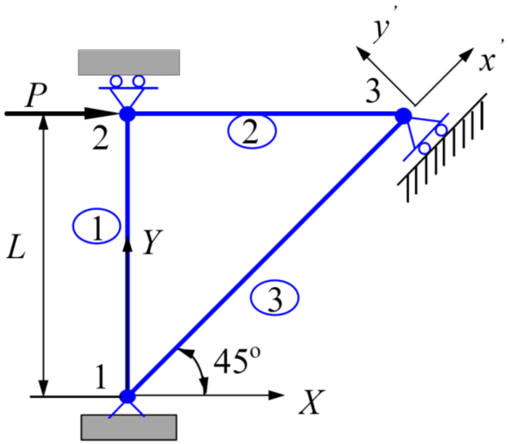
$(\mathrm{N/m})$



The global FE equation is,

$$1260\times10^{5}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ Sym. & & & & & 0.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Load and boundary conditions (BC):



$$u_1 = v_1 = v_2 = 0, \quad \text{and} \quad v_3' = 0,$$

$$F_{2X} = P, \quad F_{3x'} = 0.$$

From the transformation relation and the BC, we have

$$v_3' = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 + v_3) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad u_3 - v_3 = 0$$

This is a multipoint constraint (MPC).

Similarly, we have a relation for the force at node 3,

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_{3X} + F_{3Y} = 0$$

Applying the load and BC's in the structure FE equation by 'deleting' 1st, 2nd and 4th rows and columns, we have

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Similarly, we have a relation for the force at node 3,

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_{3X} + F_{3Y} = 0$$

Applying the load and BC's in the structure FE equation by 'deleting' 1st, 2nd and 4th rows and columns, we have

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Further, from the MPC and the force relation at node 3, the equation becomes,

$$1260\times10^5\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1.5 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad 1260\times10^5\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{Bmatrix}$$

The 3rd equation yields, $F_{3X} = -1260 \times 10^5 u_3$

Substituting this into the 2nd equation and rearranging, we have

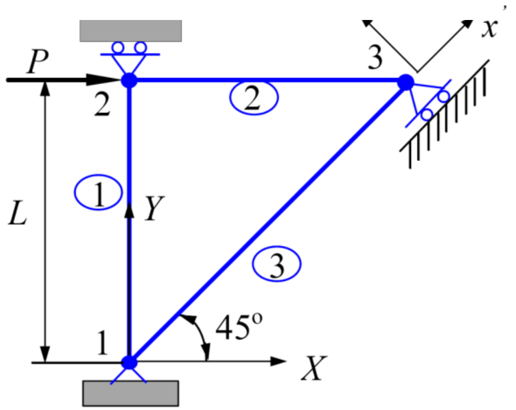
$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2520 \times 10^5} \begin{Bmatrix} 3P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01191 \\ 0.003968 \end{Bmatrix} \quad (\text{m})$$

From the global FE equation, we can calculate the reaction forces,

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260\times10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0.0 \\ -500 \\ 500 \end{Bmatrix} \text{(kN)}$$

Check the results!

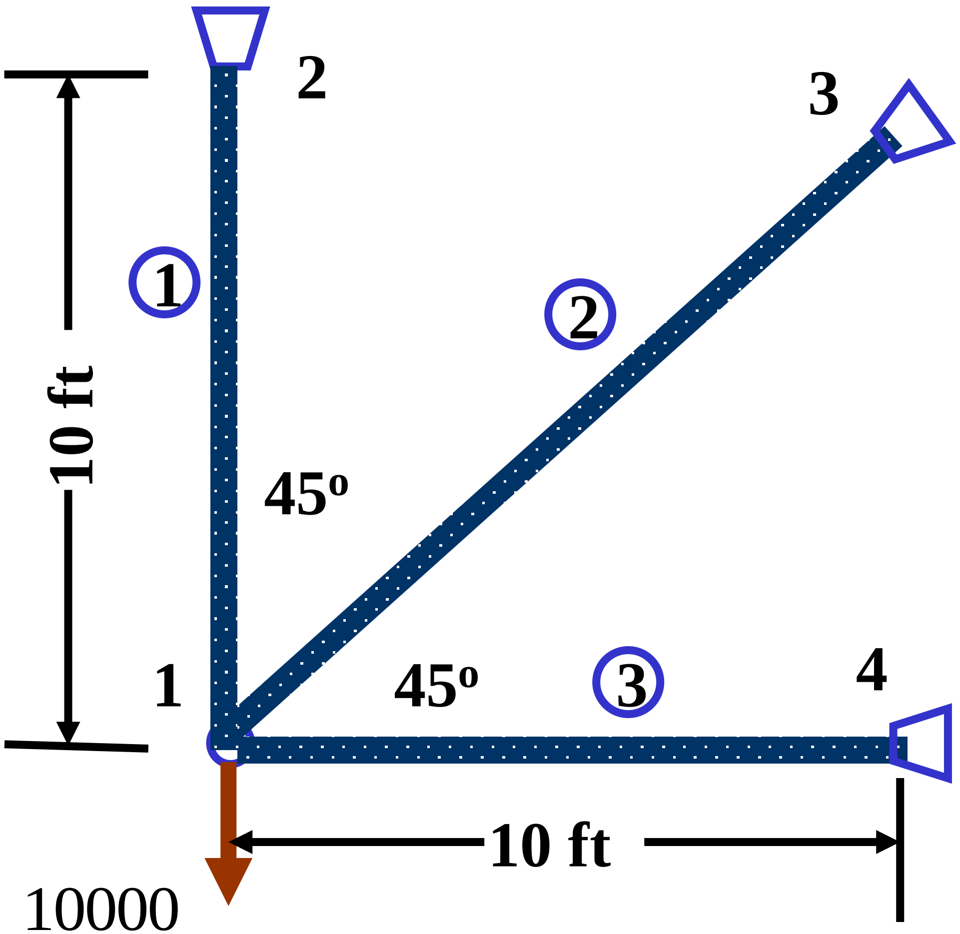


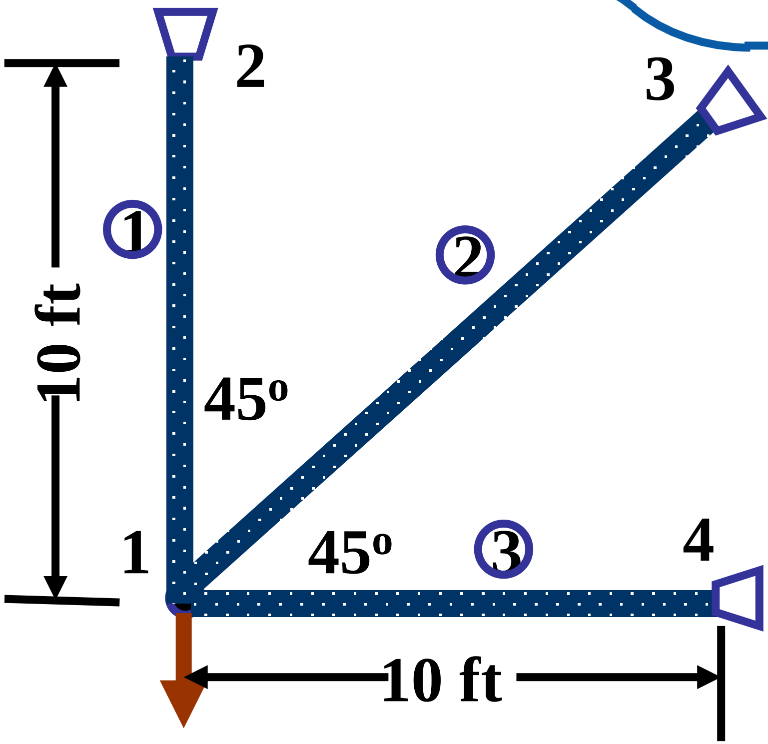
A general multipoint constraint (MPC) can be described as,

$$\sum_j A_j u_j = 0$$

where A_j's are constants and u_j's are nodal displacement components.

مثال: یک خرپای سه میله‌ای





Element	Node i	Node j	L (ft)	A (in^2)	θ	C	S	C^2	S^2	CS
1	1	2	10.00	2	90	0	1	0	1	0
2	1	3	14.14	2	45	0.7071	0.7071	0.5	0.5	0.5
3	1	4	10.00	2	0	1	0	1	0	0

$E = 30 \times 10^6$ psi for all members

$$\left[k^{(1)} \right] = \frac{(30 \text{ x } 10^6)\,(2)}{(10)\,(12)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[k^{(2)} \right] = \frac{(30 \text{ x } 10^6)\,(2)}{(10)\left(\sqrt{2}\right)(12)} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\left[\,k^{(3)}\right] = \frac{(30\ \text{x}\ 10^{6})\,(2)}{(10)\,(12)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\cdots$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$
\cdots\begin{bmatrix}
k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\
k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & 0 & 0 & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & 0 & 0 \\
k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & 0 & 0 & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}+\cdots
$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\cdots\begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\ k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$
\left[K\right] = (500000)\begin{bmatrix}
1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\
0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\
-0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

چرا سطر و ستون های سوم و هشتم ماتریس k صفر است؟

المان میله در فضای دو بعدی

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{F\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} = (500000)\begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 \\ 0.354 & 1.354 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.414 \text{ x } 10^{-2} \text{ in} \\ -1.59 \text{ x } 10^{-2} \text{ in} \end{Bmatrix}$$

المان میله در فضای دو بعدی

$$\sigma^{(1)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.414 \text{ x } 10^{-2}\\ -1.59 \text{ x } 10^{-2}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.414 \text{ x } 10^{-2}\\ -1.59 \text{ x } 10^{-2}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{30 \text{ x } 10^6}{120}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.414 \text{ x } 10^{-2}\\ -1.59 \text{ x } 10^{-2}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(1)} = 3975 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(2)} = 1471 \text{ psi}$$

$$\sigma^{(3)} = -1035 \text{ psi}$$