

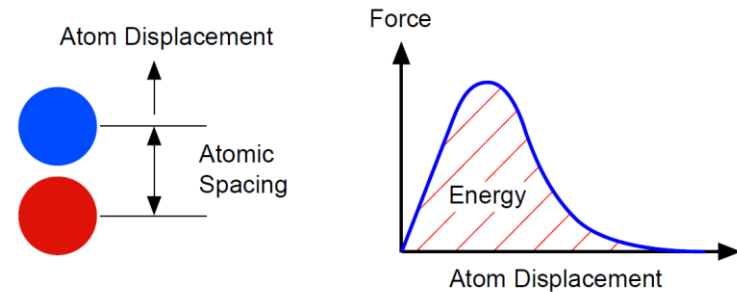
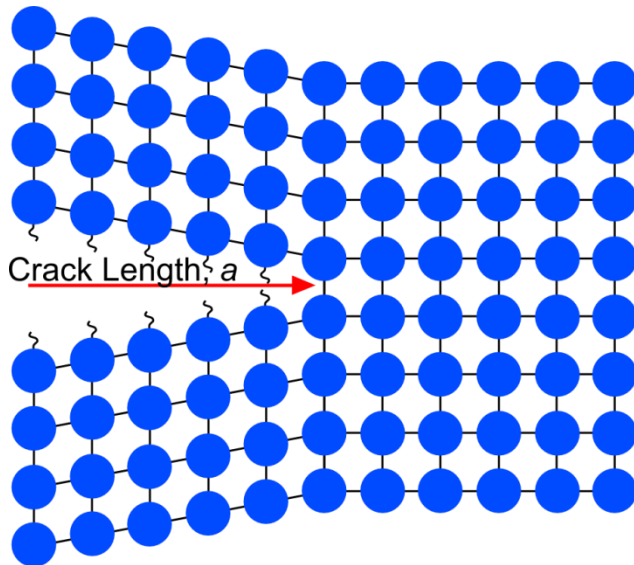


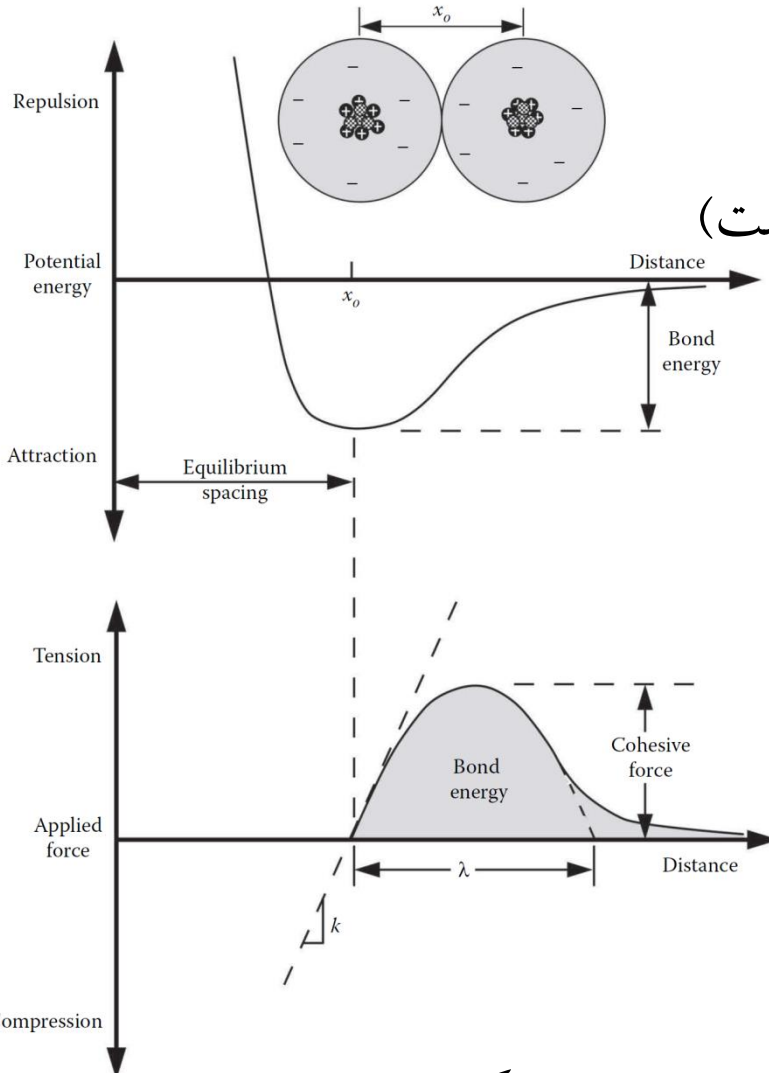
دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مکانیک

مکانیک شکست الاستیک خطی

Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)

استحکام تئوری، با تنش مورد نیاز برای شکستن پیوند اتمی بین اتم، تقریب زده می شود. به عبارت دیگر، شکست هنگامی اتفاق می افتد که تنش کافی برای شکستن پیوند در سطح اتمی اعمال گردد.





انرژی پتانسیل عبارت است از:

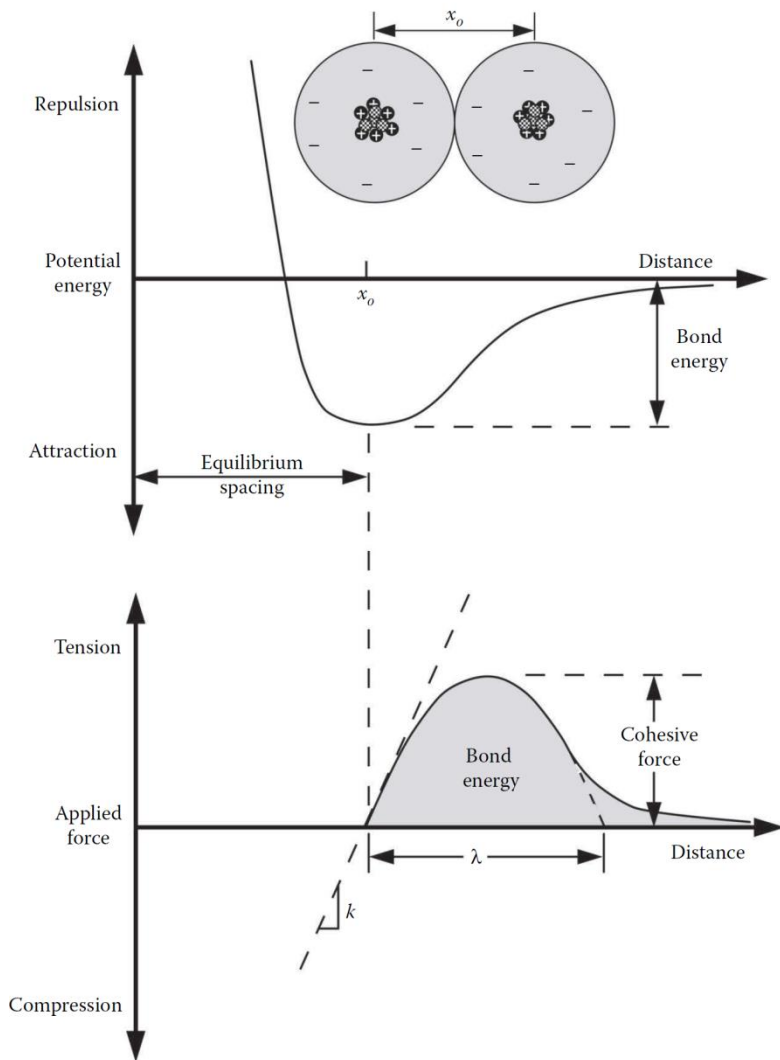
$$E_b = \int_{x_0}^{\infty} P dx$$

x_0 : فاصله تعادلی (موقعیتی که انرژی پتانسیل مینیمم است)

P : نیروی اعمالی

❖ نیروی کششی، P ، برای افزایش فاصله اتم‌ها از مقدار تعادلی لازم است؛ این نیرو باید از نیروی چسبندگی بیشتر گردد تا پیوند به طور کامل قطع شود.

انرژی پتانسیل و نیروی چسبندگی، تابعی از فاصله بین اتم‌ها است.



❖ با فرض استحکام چسبندگی ایده‌ال در مقیاس اتمی؛ می‌توان رابطه نیرو-جابجایی بین اتمی را به صورت یک نیم سیکل تابع سینوسی تقریب زد:

$$P = P_c \sin\left(\frac{\pi X}{\lambda}\right) \quad (*)$$

برای سادگی، مبدا از x_0 در نظر گرفته شده و λ مطابق شکل تعریف شده است. با فرض جابجایی کوچک:

$$P = P_c \frac{\pi X}{\lambda} = P_c \frac{\pi}{\lambda} X$$

$$P = P_c \frac{\pi X}{\lambda} \longrightarrow \sigma = \sigma_c \frac{\pi X}{\lambda}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{X}{X_0}$$

$$\sigma_c = \frac{E\lambda}{\pi X_0}$$

از طرف دیگر داریم:

با مساوی قرار دادن روابط فوق:

$$\lambda = X_0 \text{ با فرض:}$$

$$\sigma_c \approx \frac{E}{\pi} \text{ استحکام تئوری:}$$

در صورتی که منحنی نیرو-جابجایی با تقریبی غیر از تابع سینوسی فرض گردد:

$$\frac{E}{15} \leq \sigma_c \leq \frac{E}{4}$$

که بسیار بیشتر از مقدار استحکام در عمل است.

کار انجام شده بر واحد سطح در اثر شکست به ایجاد دو سطح جدید منجر خواهد شد $(2\gamma_s)$. به عبارت دیگر؛ انرژی شکست تبدیل به انرژی سطحی می شود. بنابراین انرژی سطحی به صورت زیر قابل تقریب است:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \sigma_c \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) dx = \sigma_c \frac{\lambda}{\pi} = \frac{\sigma_c^2 x_0}{E}$$


$$\frac{\lambda}{\pi} = \frac{\sigma_c x_0}{E}$$

$$\rightarrow \sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{x_0}}$$

برای مواد متعارف با قرار دادن γ_s و x_0 استحکام تئوری تقریباً برابر است:

$$\sigma_c \approx \left[\frac{E}{6} \quad \frac{E}{5} \right]$$



مثال: برای فولاد داریم: 

$$E = 2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma_s = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

$$x_0 = 2 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{x_0}} \approx \sqrt{\frac{(2 \times 10^{11})(1)}{(2 \times 10^{-10})}} \approx 3.16 \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx \frac{E}{6}$$

استحکام شکست در مواد به مراتب از مقدار استحکام تئوری کمتر است، بنابراین عواملی وجود دارند که استحکام شکست را نسبت به آنچه تئوری پیش بینی می کند، کاهش می دهند.

این عوامل به عنوان عیوب (نواقص) در جامدات شناخته می شوند:

❖ عیوب شبکه (نقطه ای، خطی و صفحه ای)

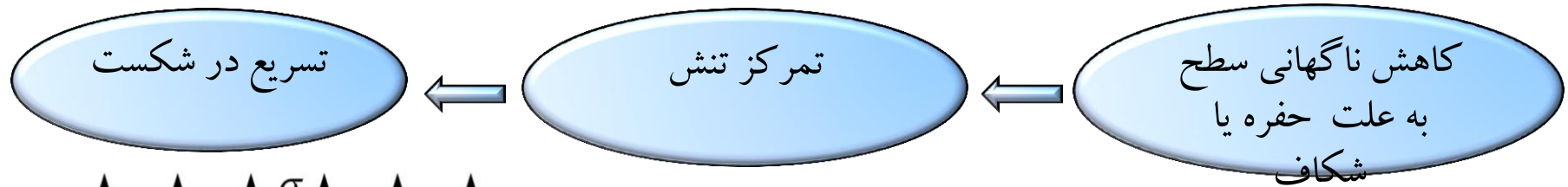
❖ عیوب ساخت

❖ عیوب طراحی

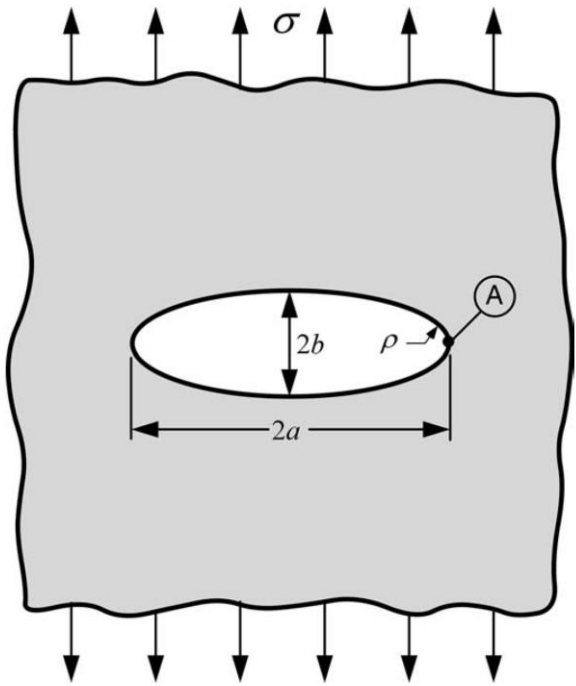
❖ عیوب مونتاژ

❖ ریز ترک ها

تمرکز تنش حاصل از ریزترک‌ها:



تحلیل انگلیس (Inglis) ❖



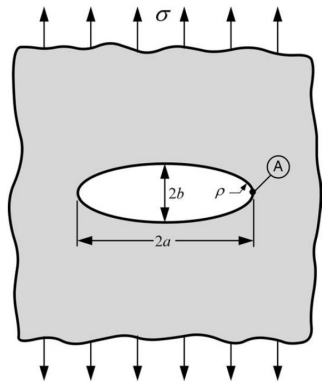
$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right)$$

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad k_t = 3 \text{ for } a = b$$

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad \text{where } \rho = \frac{b^2}{a}$$

$a \gg b$

sharp crack



$a \gg b$

sharp crack

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \approx 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

اگر:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \rightarrow \sigma_c \\ \sigma \rightarrow \sigma_{\text{fracture}} \end{cases}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_c \rightarrow 2\sigma_f \sqrt{\frac{a}{\rho}} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0}}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma_s\rho}{4ax_0}}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}}$$

برای تیزترین ترک $\rho = x_0$:

در این تقریب، بدون در نظر گرفتن فرضیات لازم، تنش ماکروسکوپی و میکروسکوپی را برابر قرار داده است.

با شبیه‌سازی نیروهای پیوند اتمی با رفتار غیرخطی:

$$\sigma_c = \alpha \sqrt{\frac{E \gamma_s}{a}}$$

یک مقدار ثابت است و به رابطه نیروی اتمی-جابجایی (رابطه *) وابسته است.

مثال: فرض کنید: $2a = 2000x_0$

$$E = 2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma_s = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

$$x_0 = 2 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{4a}} \approx \sqrt{\frac{(2 \times 10^{11})(1)}{(4)(1000 \times 10^{-10})}} \approx 7.07 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx \frac{E}{300}$$

گریفیث با ارایه یک معیار برای رشد ترک در مواد ترد بر مبنای انرژی، مکانیک شکست کلاسیک را پایه‌گذاری کرد. وی فرض کرد ترک‌های یک جسم که تحت تنش قرار گرفته، هنگامی رشد می‌کند که انرژی کل، کاهش یابد. از این رو در معیار گریفیث، ملاحظات تمرکز تنش نوک ترک و فرآیندهای جلوی ترک مد نظر قرار نمی‌گیرد.

مطابق معیار گریفیث؛ هنگامی ترک رشد می‌کند که کاهش انرژی الاستیک ذخیره شده ناشی از رشد ترک در جسم برابر با انرژی تشکیل سطوح جدید باشد. بنابراین در جسم ترد، اگر انرژی الاستیک ذخیره شده به حد بحرانی برسد انرژی به صورت انرژی سطحی آزاد می‌شود.



قانون اول ترمودینامیک: بالانس انرژی

U_e : External energy

U_i : Internal energy

U_a : Surface energy

U_d : Dissipated energy

U_k : Kinetic energy

$$U_e = U_i + U_a + U_d + U_k$$

$$\frac{d}{dt}(\) = \frac{dA}{dt} \frac{d}{dA}(\) = \dot{A} \frac{d}{dA}(\) = \dot{a} \frac{d}{da}(\) \quad A = B \cdot a$$

$$\frac{d U_e}{da} = \frac{d U_i}{da} + \frac{d U_a}{da} + \frac{d U_d}{da} + \frac{d U_k}{da}$$

انرژی کرنش اولیه برای یک صفحه بدون ترک برابر است:

$$U_0 = B \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA$$

هنگام ایجاد یک ترک با ابعاد $2a$ ، نیروی کششی به واسطه ترک (یک حفره بیضی شکل) از مقدار $\sigma \cdot B \cdot dx$ به صفر می‌رسد (آزاد می‌شود). از این رو انرژی کرنش الاستیک آزاد شده برای ترکی به طول $2a$ برابر است با:

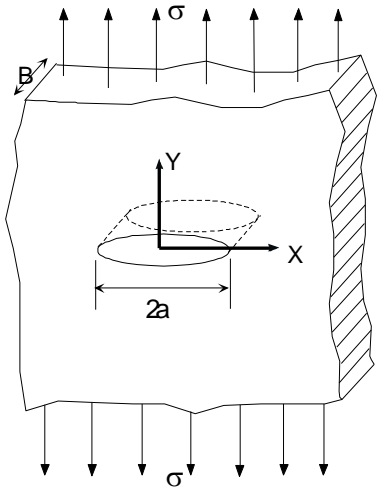
$$U_i = -4 \int_0^a \frac{1}{2} \sigma \cdot B \cdot dx \cdot v$$

$$U_i = -\frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E}$$

با قرار دادن: $x = a \cdot \cos \theta$

خواهیم داشت:

$$v = \frac{\sigma}{E} a \cdot \sin \theta$$



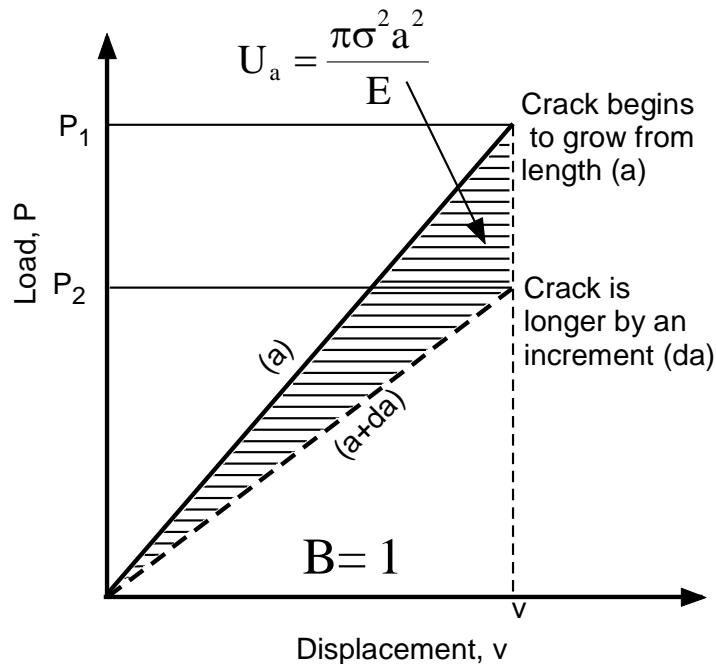
$$U_e = \int_{\delta} F dy,$$

کار نیروی خارجی: \blacktriangleleft

$$U_i = U_0 + U_i'$$

انرژی داخلی جسم: \blacktriangleleft

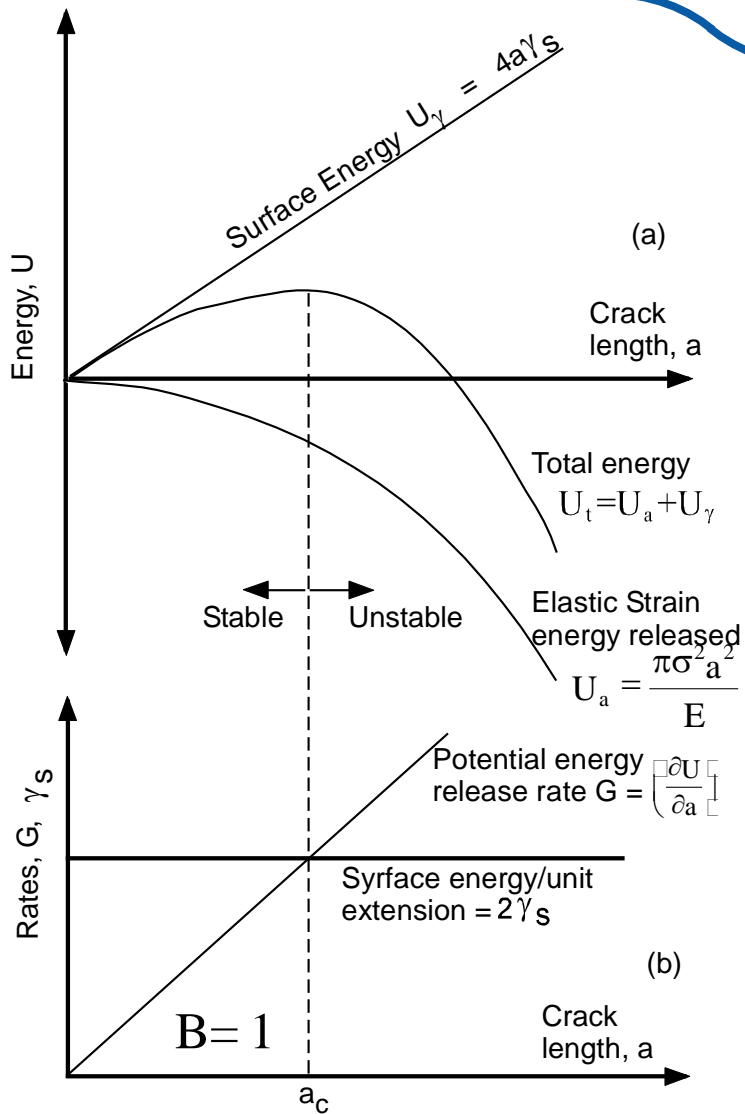
انرژی افزایش سطوح جدید: \blacktriangleleft



$$U_a = 4aB\gamma_s$$

بالانس انرژی برای یک صفحه ترک دار: \blacktriangleleft

$$\int_{\delta} F dy = B \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E} + 4aB\gamma_s$$



$$\frac{d U_e}{d a} = \frac{d U_i}{d a} + \frac{d U_a}{d a} + \frac{d U_d}{d a} + \frac{d U_k}{d a}$$

$$-\frac{2\pi\sigma^2 a B}{E} + 4B\gamma_s = 0$$

هنگام شکست σ به σ_f تبدیل می شود: \blacktriangleleft

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad \text{for plane stress}$$

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a(1-\nu^2)} \right)^{1/2} \quad \text{for plane strain}$$

(a) Variation of Energy with Crack length
(b) Variation of energy rates with crack length



تغییرات دوم انرژی کل نسبت به گسترش ترک:

$$\frac{d^2 U_t}{da^2} = - \frac{2\pi\sigma^2 B}{E}$$

که مقدار منفی است و بیانگر شرایط تعادل ناپایدار است یعنی ترک همیشه رشد می کند.



بالانس انرژی گریفیث

$$U_d = U_k = 0 \quad \text{با فرض:}$$

$$\frac{d U_e}{da} - \frac{d U_i}{da} = \frac{d U_a}{da}$$

$$G \triangleq \frac{1}{B} \left(\frac{d U_e}{da} - \frac{d U_i}{da} \right)$$

energy release rate

$$R \triangleq \frac{1}{B} \left(\frac{d U_a}{da} \right) = 2\gamma_s$$

crack resistance force

$$G = R = 2\gamma_s$$

Griffith's crack criterion



با فرض ثابت بودن لبه‌های خارجی صفحه ترک‌دار می‌توان نوشت:

$$-\frac{d U_i}{da} < \frac{d U_a}{da} \quad \rightarrow \quad \text{no crack growth}$$

$$-\frac{d U_i}{da} > \frac{d U_a}{da} \quad \rightarrow \quad \text{unstable crack growth}$$

$$-\frac{d U_i}{da} = \frac{d U_a}{da} \quad \rightarrow \quad \text{critical crack length}$$