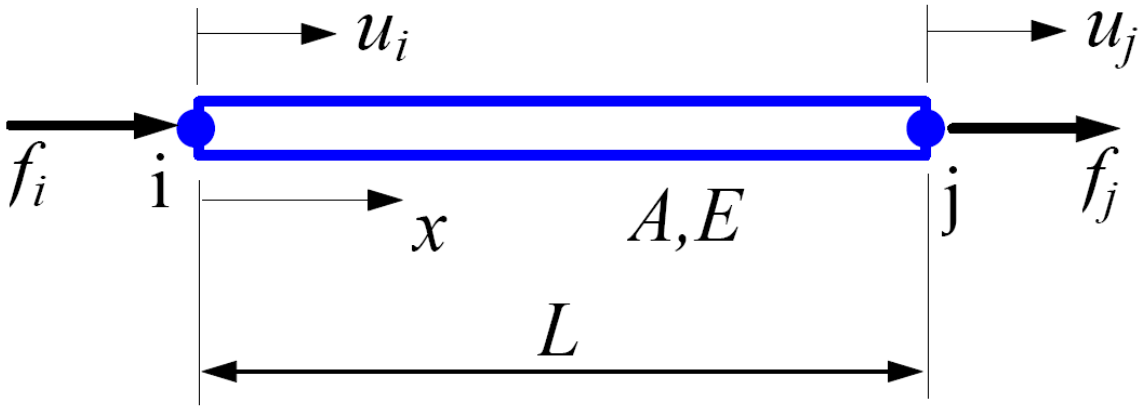
آنالیز استاتیکی (خطی):

تحلیل یک سازه در حالت استاتیک خطی بر فرضیات زیر استوار است:

- **تغییرمکان‌های کوچک**: تغییرشکل های بزرگ و دوران اجزاء وجود ندارد و محل اعمال بارگذاری هنگام تغییرشکل تغییر نمی‌کند.
- **رفتار الاستیک**: نه پلاستیک، نه شکست و نه ...
- **بارگذاری استاتیکی**: بارگذاری به صورت تدریجی به سازه وارد می‌شود.

آنالیز خطی اطلاعات زیادی در مورد رفتار سازه را در اختیار قرار می‌دهد. از طرف دیگر آنالیز غیرخطی بر مبنای تحلیل آنالیز خطی بنا می‌شود و تقریب خوبی برای بسیاری از تحلیل‌هاست.

المان میله: Bar Element



تغییرمکان: $u = u(x)$

کرنش: $\varepsilon = \varepsilon(x)$

تنش: $\sigma = \sigma(x)$

طول : L

سطح مقطع : A

مدول الاستیسیته: E

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

رابطه کرنش-تغییرمکان:

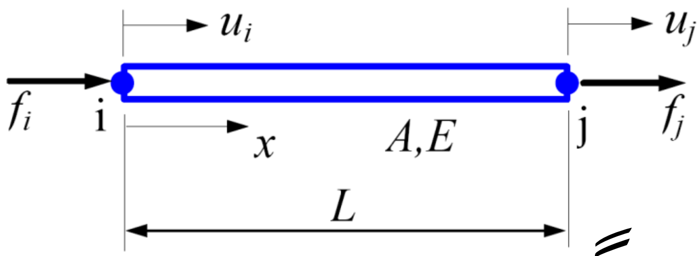
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

رابطه تنش-کرنش:

$$\sigma = E\varepsilon$$

با فرض آن که تغییرمکان u در امتداد میله به صورت خطی تغییر کند:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$$



از طرف دیگر:

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta}{L}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

همچنین داریم: $\sigma = \dfrac{F}{A}$ که F نیرو در امتداد میله است.

$$F = \frac{EA}{L}\Delta = k\Delta \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{EA}{L}$$

که k سختی میله خواهد بود.

بنابراین میله در این حالت همانند یک فنر عمل خواهد کرد و ماتریس سختی میله عبارت است از:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

با در نظر گرفتن معادلات تعادل برای دو گره‌ی المان خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

یا

$$\mathrm{ku} = \mathrm{f}$$

درجه آزادی: تعداد مولفه‌های بردار تغییرمکان در هر گره. به عنوان مثال میله یک بعدی (1D) دارای یک درجه آزادی در هر گره است.

مفهوم فیزیکی مولفه‌های ماتریس سختی (k):

ستون jام ماتریس (k) (در اینجا j=1,2) بیانگر نیروهای اعمال شده به میله است وقتی که تغییر مکان در گره jام برابر یک و تغییرمکان در بقیه گره‌ها صفر باشد.

المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$$

تعریف توابع شکل (خطی):

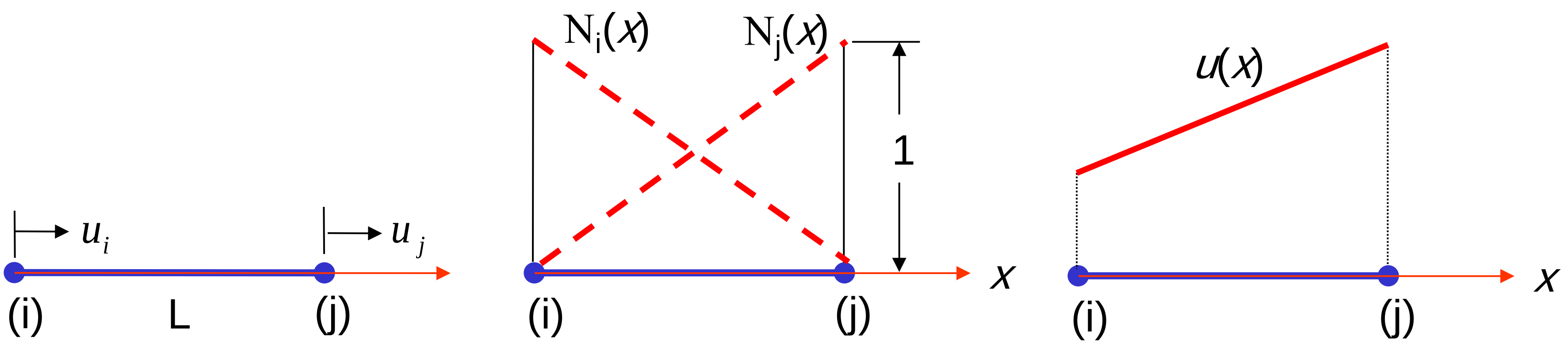
$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \qquad N_j(\xi) = \xi$$

که در آن:

$$\xi = \frac{x}{L}, \qquad 0 \le \xi \le 1$$

بنابراین u برابر است با:

$$u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j$$



المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

u برابر است با:

$$u(x)=u(\xi)=N_i(\xi)u_i+N_j(\xi)u_j$$

یا:

$$u=\begin{bmatrix}N_i & N_j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{Nu}$$

کرنش در امتداد میله:

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\mathbf{N}\right]\mathbf{u}=\mathbf{Bu}$$

B: ماتریس جابجایی-کرنش

المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

B: ماتریس جابجایی-کرنش

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx}\left[N_i(\xi) \quad N_j(\xi)\right] = \frac{d}{d\xi}\left[N_i(\xi) \quad N_j(\xi)\right] \bullet \frac{d\xi}{dx}$$

یا:

$$\mathbf{B} = \left[-1/L \quad 1/L\right]$$

تنش:

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{Bu}$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در میله:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{\mathrm{T}} \varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E\mathbf{Bu}\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E\mathbf{B}\right) dV\right]\mathbf{u}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

کار حاصل از نیروها:

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}$$

در یک سیستم کنسرواتیو (پایستار):

$$U = W$$

یا:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} \right) dV \right] \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}$$

بنابراین:

$$\left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} \right) dV \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

با مقایسه با :

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

یعنی ماتریس $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B}\right) dV$$

محاسبه ماتریس $\mathbf{k}$:

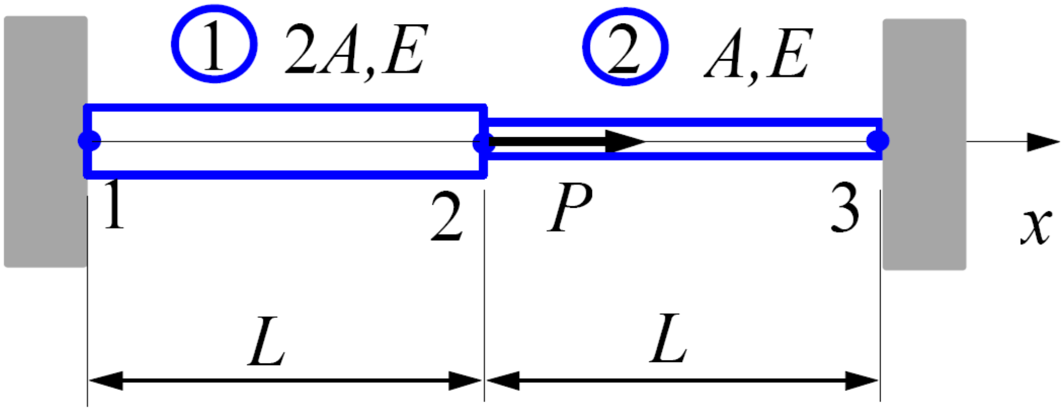
$$\mathbf{k} = \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} A\,dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

انرژی کرنشی:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{u}$$

المان میله، مثال ۱

مطلوبست محاسبه تنشهای ایجاد شده در سیستم دو میله‌ای زیر، وقتی نیرو P به گره ۲ وارد شده و میله در دو انتها مقید شده باشد.



المان میله اول:

$$\begin{array}{ccc} & u_1 & u_2 \end{array}$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان میله دوم:

$$\begin{array}{ccc} & u_2 & u_3 \end{array}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان میله، مثال ۱

با فرض اتصال بدون اصطکاک دو المان در گره ۲، می‌توان معادلات تعادل FE را برای کل سیستم نوشت:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی:

$$u_1 = u_3 = 0, \qquad F_2 = P$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

المان میله، مثال ۱

با حذف سطر و ستون اول و همچنین حذف سطر و ستون سوم خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{L}[3]\{u_2\}=\{P\} \Longrightarrow u_2=\frac{PL}{3EA}$$

و:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\frac{PL}{3EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تنش در المان اول:

$$\sigma_1=E\varepsilon_1=E\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1=E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$=E\frac{u_2-u_1}{L}=\frac{E}{L}\left(\frac{PL}{3EA}-0\right)=\frac{P}{3A}$$

میله ۱ در حالت کشش قرار دارد.

المان میله، مثال ۱

تنش در المان دوم:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = E\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = E\begin{bmatrix}-1/L & 1/L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$

$$= E\frac{u_3-u_2}{L} = \frac{E}{L}\left(0-\frac{PL}{3EA}\right) = -\frac{P}{3A}$$

میله ۲ در حالت فشار قرار دارد.

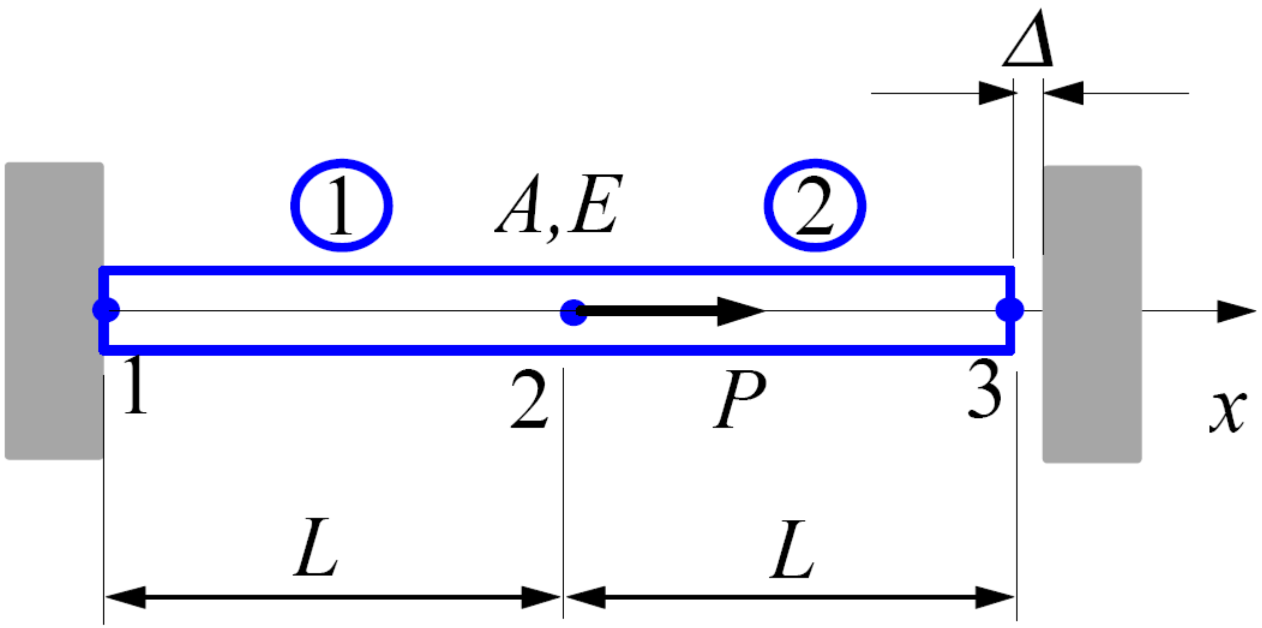
جمع‌بندی المان میله

- در این مثال، تنش‌های محاسبه شده در المانهای ۱ و ۲ دقیقاً با مقادیر تنش حاصل از تئوری خطی سازه‌ها برابر است. بنابراین تقسیم المان‌های ۱و ۲ به المانهای کوچکتر کمکی به دقت حل نخواهد کرد.

- برای میله‌های مخروطی شکل، می‌توان از مقدار متوسط سطح مقطع برای هر المان استفاده نمود.

- برای محاسبه تنش‌ها لازم است در ابتدا تغییرمکانها محاسبه شوند، از این رو روش فوق، روش اجزای محدود بر مبنای تغییرمکان شناخته می‌شود.

در سازه زیر نیروهای عکس العمل در تکیه‌گاه‌های دو طرف میله را به دست آورید.



$$P = 6.0\times10^4\ \text{N},\quad E = 2.0\times10^4\ \text{N/mm}^2,$$

$$A = 250\,\text{mm}^2,\quad L = 150\,\text{mm},\quad \Delta = 1.2\ \text{mm}$$

ابتدا باید بررسی شود آیا میله با دیوار سمت راست تماس پیدا می‌کند یا خیر؟ برای این منظور با فرض عدم وجود دیوار، جابجایی انتهای میله محاسبه می‌شود.

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{(6.0\times 10^4)(150)}{(2.0\times 10^4)(250)} = 1.8\,\text{mm} > \Delta = 1.2\,\text{mm}$$

بنابراین تماس اتفاق می‌افتد از این رو معادلات اجزای محدود عبارت است از:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

المان میله، مثال ۲

اعمال شرایط مرزی:

$$F_2 = P = 6.0\times 10^4 \text{ N}$$

$$u_1 = 0, \qquad u_3 = \Delta = 1.2\,\text{mm}$$

بنابراین:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

از معادله دوم:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\} \Longrightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EA} + \Delta\right) = 1.5\,\text{mm}$$

المان میله، مثال ۲

و :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.2 \end{Bmatrix} (\mathrm{mm})$$

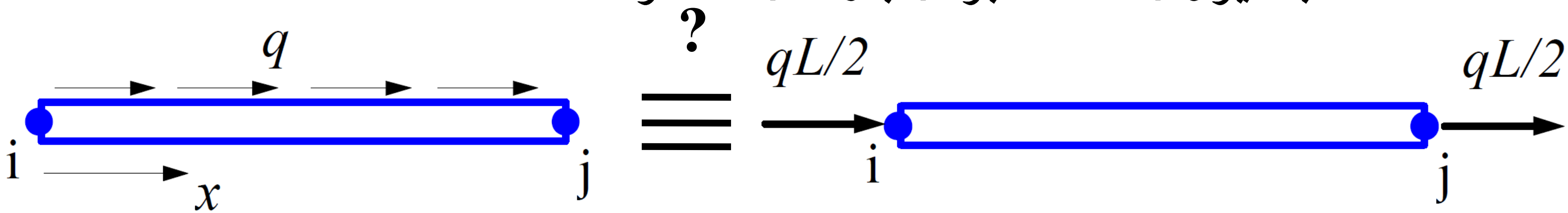
از معادله اول:

$$F_1 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(-u_2) = -5.0 \times 10^4 \text{ N}$$

از معادله سوم:

$$F_3 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(-u_2 + u_3)$$
$$= -1.0 \times 10^4 \text{ N}$$

- محاسبه نیروی معادل برای بارهای گسترده



$$W_q = \int_0^L \frac{1}{2} uq dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u(\xi) q (L d\xi) = \frac{qL}{2}\int_0^1 u(\xi) d\xi$$

$$= \frac{qL}{2}\int_0^1 \left[N_i(\xi) \quad N_j(\xi) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} d\xi = \frac{qL}{2}\int_0^1 \left[1-\xi \quad \xi \right] d\xi \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{qL}{2} \quad \frac{qL}{2} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[u_i \quad u_j \right] \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$W_q = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{f}_q$$

$$\mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

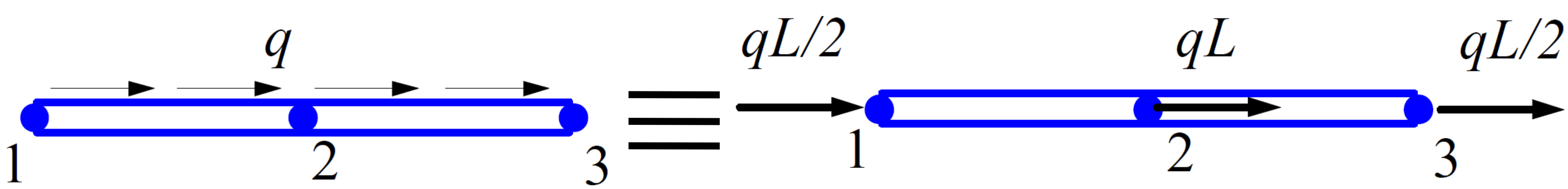
المان میله

با مساوی قرار دادن $U=W$ برای هر المان

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{k}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{f} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{f}_q \Rightarrow \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_q$$

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} f_i + qL/2 \\ f_j + qL/2 \end{Bmatrix}$$

- برای مجموعه سوار شده المان ها



To understand further the difference between work done by external forces and internal forces, consider a spring–mass system in static equilibrium (see Fig. 4.2a). Suppose that the mass m is placed slowly (to eliminate dynamic effects) at the end of the spring. The spring will elongate by an amount e_0, measured from its undeformed state. In this case, the force is due to gravity and it is equal to $F = mg$. Clearly, F is independent of the extension e_0 in the spring, and F does not change

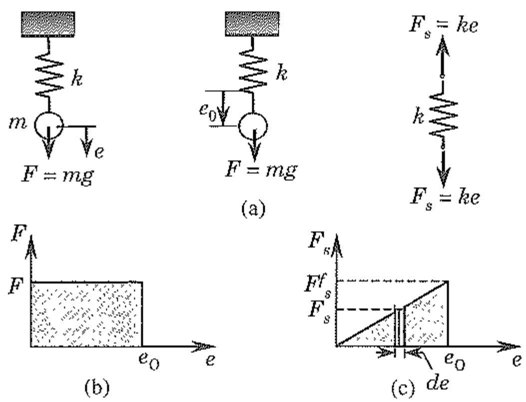


Figure 4.2 A spring-mass system in equilibrium. (a) Elongation due to weight *mg*. (b) External work done. (c) Internal work done.

during the course of the extension e, going from 0 to its final value e_0 (see Fig. 4.2b). The work done by F is

$$W_E = -(F e_0).$$

Next consider the force in the spring F_s. It goes from 0 to its final value as e goes from 0 to e_0 (see Fig. 4.2c). The work done by F_s in moving through de is $F_s de$. To obtain the total work done, we must integrate, because F_s depends on e, from 0 to e_0:

$$W_I = \int_0^{e_0} F_s(e)\, de.$$

the spring is assumed to be linearly elastic with spring constant k, we have $F_s = ke$. ence

$$W_I = \frac{1}{2} k e_0^2.$$

t equilibrium we have $F_s^f = F$, where F_s^f denotes the final force in the spring.

Now suppose that we wish to elongate the spring from e_0 to $e_0 + \Delta e$, Δe being nfinitesimally small. Then the additional (or incremental) work done by $F = mg$ nd $F_s = F_s(e_0)$ are simply

$$\Delta W_E = -F \Delta e = -mg \Delta e, \qquad \Delta W_I = F_s \Delta e = k e_0 \Delta e,$$

which shows that $\Delta W_I = -\Delta W_E$ since $F = F_s$.