



آنالیز استاتیکی (خطی):

تحلیل یک سازه در حالت استاتیک خطی بر فرضیات زیر استوار است:

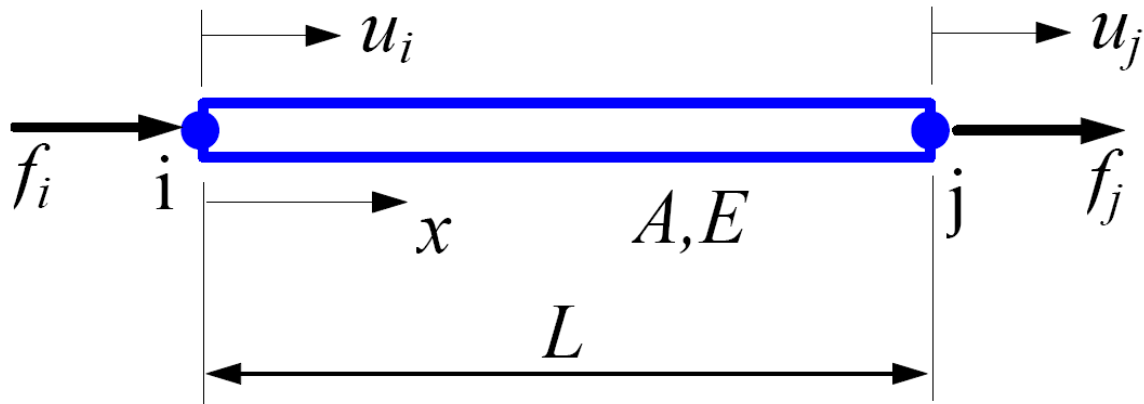
◀ **تغییر مکان های کوچک:** تغییر شکل های بزرگ و دوران اجزاء وجود ندارد و محل اعمال بار گذاری هنگام تغییر شکل تغییر نمی کند.

◀ **رفتار الاستیک:** نه پلاستیک، نه شکست و نه ...

◀ **بار گذاری استاتیکی:** بار گذاری به صورت تدریجی به سازه وارد می شود.

آنالیز خطی اطلاعات زیادی در مورد رفتار سازه را در اختیار قرار می دهد. از طرف دیگر آنالیز غیرخطی بر مبنای تحلیل آنالیز خطی بنا می شود و تقریب خوبی برای بسیاری از تحلیل هاست.

المان میله: Bar Element



L	طول:	$u = u(x)$	تغییر مکان:
A	سطح مقطع:	$\varepsilon = \varepsilon(x)$	کرنش:
E	مدول الاستیسیته:	$\sigma = \sigma(x)$	تنش:

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

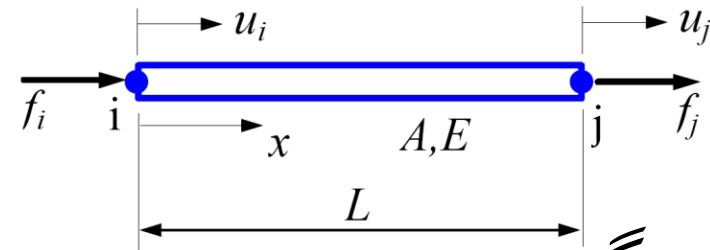
رابطه کرنش-تغییر مکان:

$$\sigma = E\varepsilon$$

رابطه تنش-کرنش:

با فرض آن که تغییر مکان u در امتداد میله به صورت خطی تغییر کند:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$$



از طرف دیگر:

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L}$$



$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta}{L}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

که F نیرو در امتداد میله است.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{همچنین داریم:}$$

$$F = \frac{EA}{L} \Delta = k\Delta \quad \Rightarrow \quad k = \frac{EA}{L}$$

که k سختی میله خواهد بود.

بنابراین میله در این حالت همانند یک فنر عمل خواهد کرد و ماتریس

سختی میله عبارت است از:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان میله (محاسبه ماتریس سختی)

با در نظر گرفتن معادلات تعادل برای دو گرهی المان خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

درجه آزادی: تعداد مولفه‌های بردار تغییر مکان در هر گره. به عنوان مثال میله یک بعدی (1D) دارای یک درجه آزادی در هر گره است.

مفهوم فیزیکی مولفه‌های ماتریس سختی (k):

ستون ژام ماتریس (k) (در اینجا $j=1,2$) بیانگر نیروهای اعمال شده به میله است وقتی که تغییر مکان در گره ژام برابر یک و تغییر مکان در بقیه گره‌ها صفر باشد.

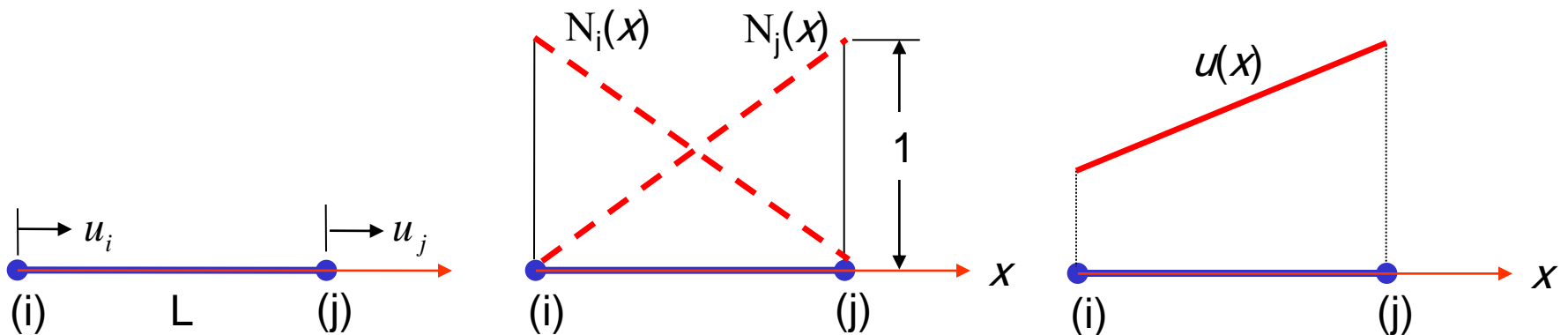
المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$$

تعریف توابع شکل (خطی): $N_i(\xi) = 1 - \xi$, $N_j(\xi) = \xi$

که در آن: $\xi = \frac{x}{L}$, $0 \leq \xi \leq 1$

بنابراین u برابر است با: $u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j$





المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

$$u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j \quad \text{u برابر است با:}$$

$$u = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N}u \quad \text{یا:}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \mathbf{N} \right] u = \mathbf{B}u \quad \text{گرنش در امتداد میله:}$$

B: ماتریس جابجایی-گرنش



المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

B: ماتریس جابجایی - کرنش

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} = \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} \bullet \frac{d\xi}{dx}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

یا:

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u}$$

تنش:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{u}) dV$$

انرژی کرنشی

ذخیره شده در میله:

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u}$$



المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

کار حاصل از نیروها:

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

$$U = W$$

در یک سیستم کنسرواتيو (پایستار):

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

یا:

$$\left[\int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

بنابراین:



المان میله (محاسبه ماتریس سختی به روش دیگر)

با مقایسه با :

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

یعنی ماتریس \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV$$

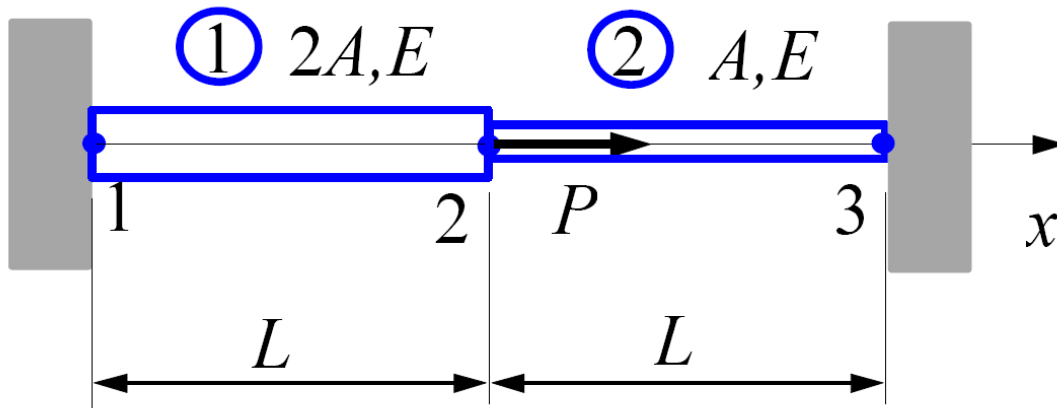
محاسبه ماتریس \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E [-1/L \quad 1/L] A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}$$

انرژی کرنشی:

مطلوبست محاسبه تنشهای ایجاد شده در سیستم دو میله‌ای زیر، وقتی نیرو P به گره ۲ وارد شده و میله در دو انتها مقید شده باشد.



المان میله دوم:

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$u_2 \quad u_3$

المان میله اول:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$u_1 \quad u_2$

با فرض اتصال بدون اصطکاک دو المان در گره ۲، می توان معادلات تعادل FE

را برای کل سیستم نوشت:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = u_3 = 0, \quad F_2 = P$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

با حذف سطر و ستون اول و همچنین حذف سطر و ستون سوم خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\} \implies u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

و:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{تنش در المان اول:}$$

$$= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A}$$

میله ۱ در حالت کشش قرار دارد.



المان میله، مثال ۱

تنش در المان دوم:

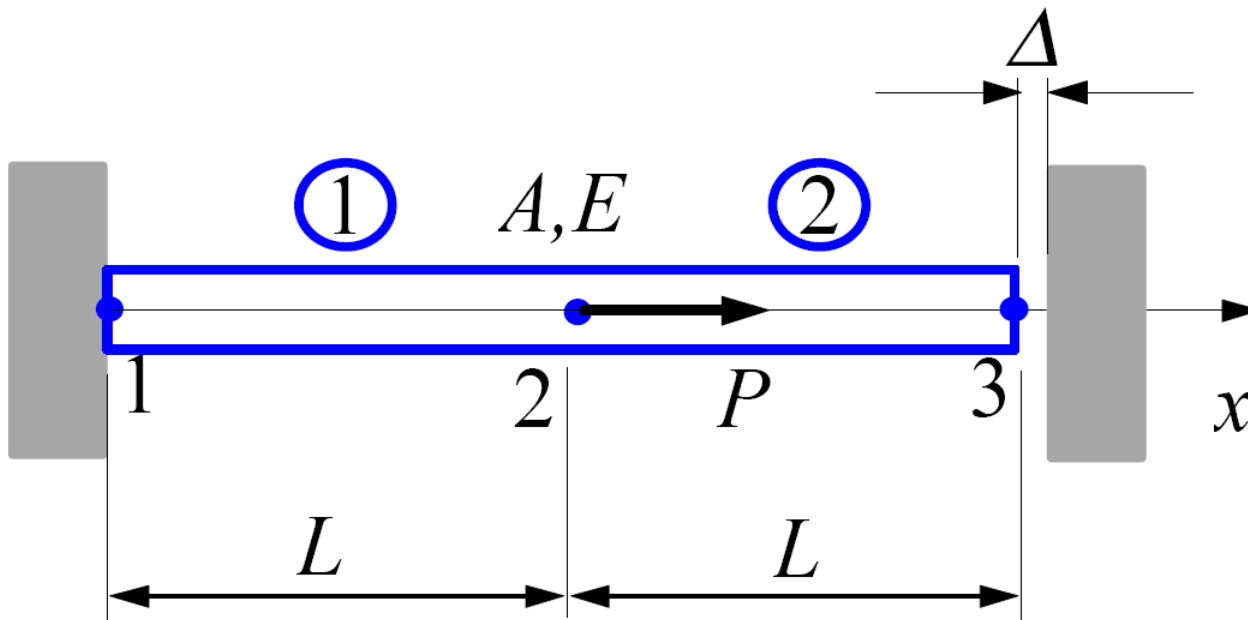
$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = EB_2\mathbf{u}_2 = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A}$$

میله ۲ در حالت فشار قرار دارد.

- ◀ در این مثال، تنش‌های محاسبه شده در المانهای ۱ و ۲ دقیقاً با مقادیر تنش حاصل از تئوری خطی سازه‌ها برابر است. بنابراین تقسیم المان‌های ۱ و ۲ به المانهای کوچکتر کمکی به دقت حل نخواهد کرد.
- ◀ برای میله‌های مخروطی شکل، می‌توان از مقدار متوسط سطح مقطع برای هر المان استفاده نمود.
- ◀ برای محاسبه تنش‌ها لازم است در ابتدا تغییر مکانها محاسبه شوند، از این رو روش فوق، روش اجزای محدود بر مبنای تغییر مکان شناخته می‌شود.

در سازه زیر نیروهای عکس العمل در تکیه گاه‌های دو طرف میله را به دست آورید.



$$P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}, \quad E = 2.0 \times 10^4 \text{ N / mm}^2,$$

$$A = 250 \text{ mm}^2, \quad L = 150 \text{ mm}, \quad \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

ابتدا باید بررسی شود آیا میله با دیوار سمت راست تماس پیدا می کند یا خیر؟ برای این منظور با فرض عدم وجود دیوار، جابجایی انتهای میله محاسبه می شود.

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{(6.0 \times 10^4)(150)}{(2.0 \times 10^4)(250)} = 1.8 \text{ mm} > \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

بنابراین تماس اتفاق می افتد از این رو معادلات اجزای محدود عبارت است از:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی:

$$F_2 = P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}$$

$$u_1 = 0, \quad u_3 = \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

بنابراین:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

از معادله دوم:

$$\frac{EA}{L} [2 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\} \implies u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EA} + \Delta \right) = 1.5 \text{ mm}$$

و:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.2 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

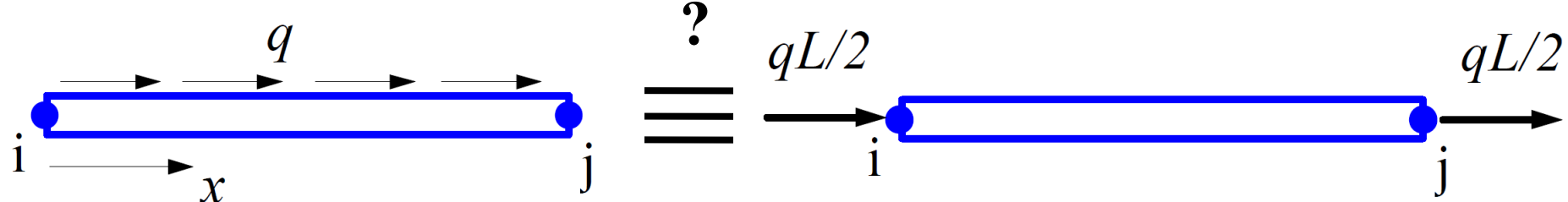
از معادله اول:

$$F_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2) = -5.0 \times 10^4 \text{ N}$$

از معادله سوم:

$$F_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) \\ = -1.0 \times 10^4 \text{ N}$$

❖ محاسبه نیروی معادل برای بارهای گسترده



$$W_q = \int_0^L \frac{1}{2} u q dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u(\xi) q (L d\xi) = \frac{qL}{2} \int_0^1 u(\xi) d\xi$$

$$= \frac{qL}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} d\xi = \frac{qL}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

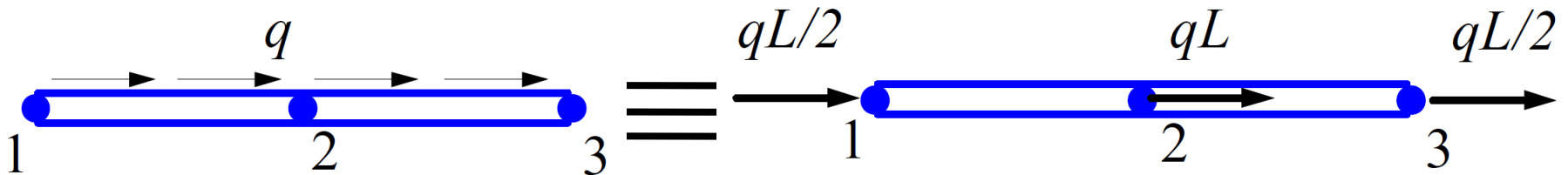
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} qL & qL \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} W_q &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q \\ \mathbf{f}_q &= \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن $U=W$ برای هر المان

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_q$$

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} f_i + qL/2 \\ f_j + qL/2 \end{Bmatrix}$$

برای مجموعه سوار شده المان ها ❖



To understand further the difference between work done by external forces and internal forces, consider a spring–mass system in static equilibrium (see Fig. 4.2a). Suppose that the mass m is placed slowly (to eliminate dynamic effects) at the end of the spring. The spring will elongate by an amount e_0 , measured from its undeformed state. In this case, the force is due to gravity and it is equal to $F = mg$. Clearly, F is independent of the extension e_0 in the spring, and F does not change

during the course of the extension e , going from 0 to its final value e_0 (see Fig. 4.2b). The work done by F is

$$W_E = -(F e_0).$$

Next consider the force in the spring F_s . It goes from 0 to its final value as e goes from 0 to e_0 (see Fig. 4.2c). The work done by F_s in moving through de is $F_s de$. To obtain the total work done, we must integrate, because F_s depends on e , from 0 to e_0 :

$$W_I = \int_0^{e_0} F_s(e) de.$$

Since the spring is assumed to be linearly elastic with spring constant k , we have $F_s = ke$. Hence

$$W_I = \frac{1}{2} k e_0^2.$$

At equilibrium we have $F_s^f = F$, where F_s^f denotes the final force in the spring.

Now suppose that we wish to elongate the spring from e_0 to $e_0 + \Delta e$, Δe being infinitesimally small. Then the additional (or incremental) work done by $F = mg$ and $F_s = F_s(e_0)$ are simply

$$\Delta W_E = -F \Delta e = -mg \Delta e, \quad \Delta W_I = F_s \Delta e = k e_0 \Delta e,$$

which shows that $\Delta W_I = -\Delta W_E$ since $F = F_s$.

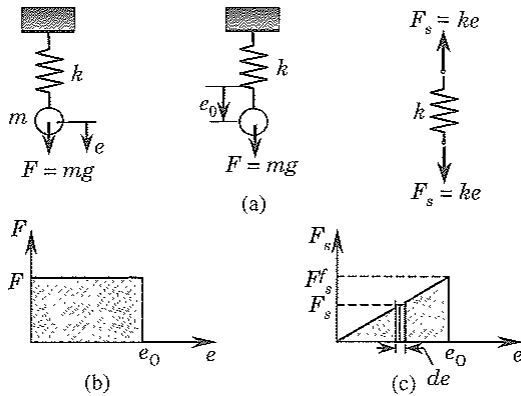


Figure 4.2 A spring–mass system in equilibrium. (a) Elongation due to weight mg . (b) External work done. (c) Internal work done.