



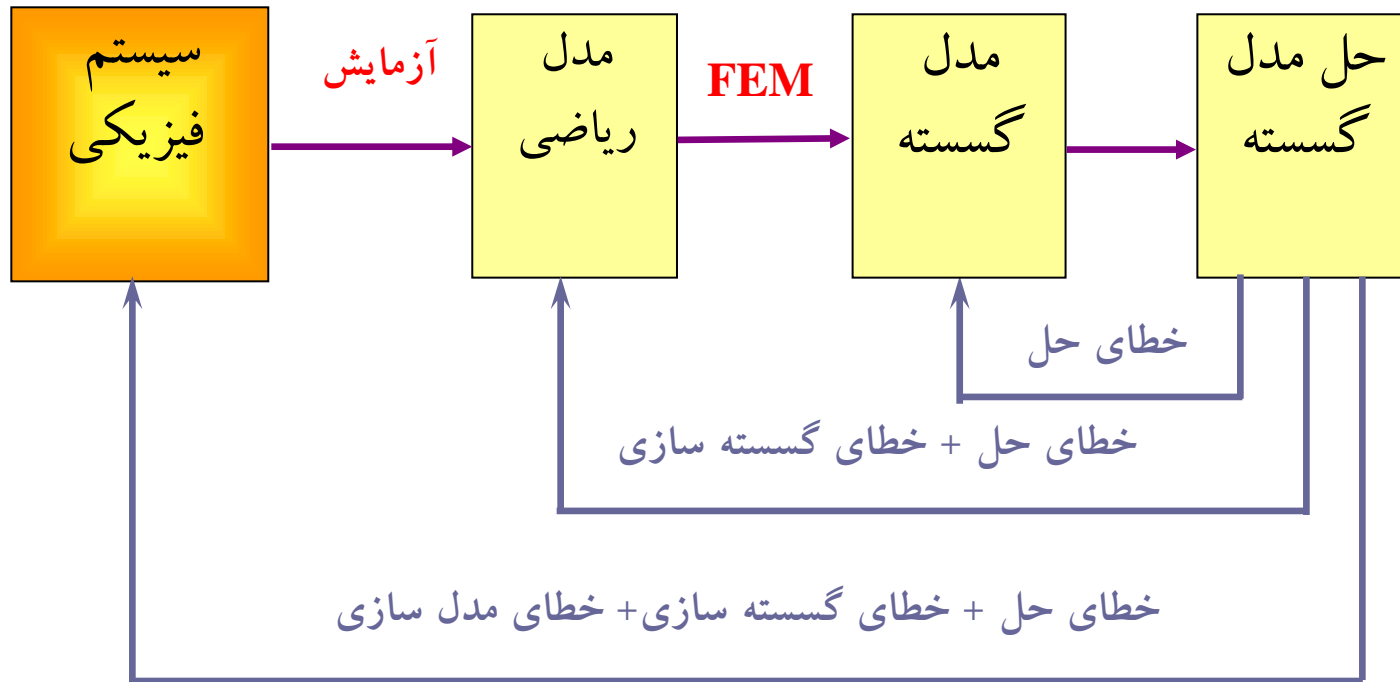
استخراج معادلات اجزای محدود به روش مستقیم

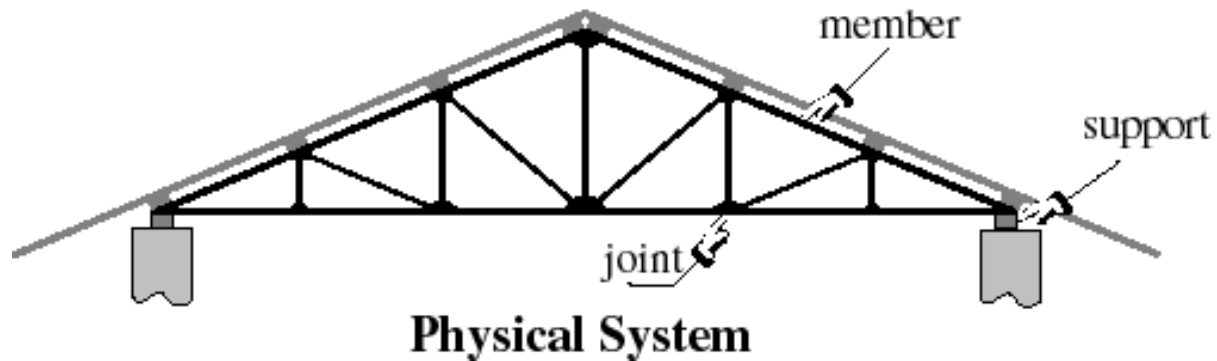
❖ روش مستقیم برای المان‌های ساده قابل اجراست.

❖ با توجه به بالا بردن مفاهیم فیزیکی، جهت مطالعه بسیار با ارزش است.



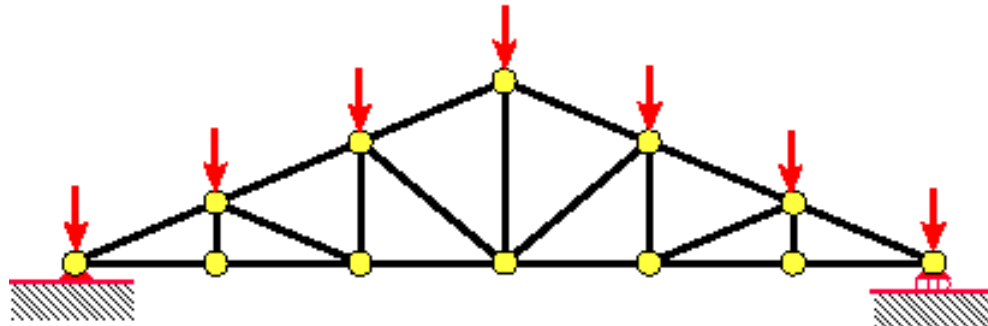
فرآیند مدل سازی و شبیه سازی در روش اجزای محدود



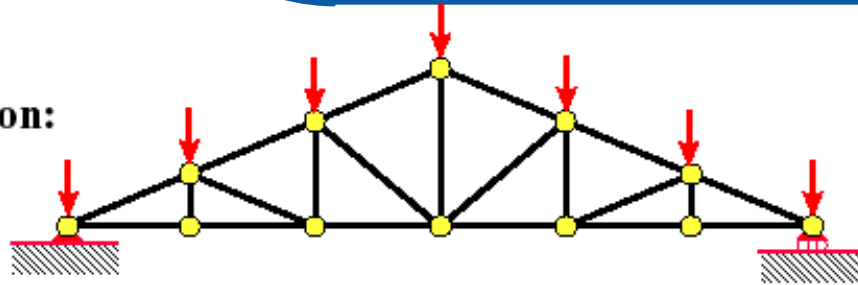


IDEALIZATION

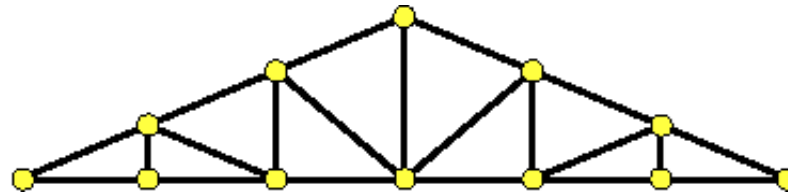
Mathematical Model



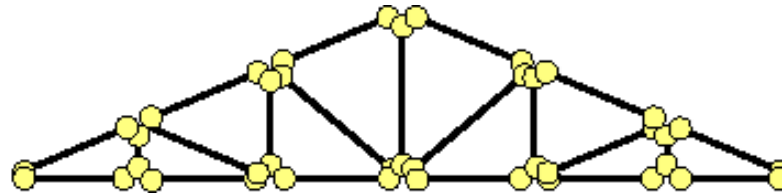
FEM idealization:



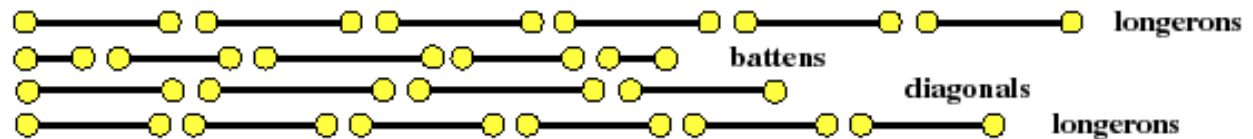
Remove loads & supports:



Disassemble:



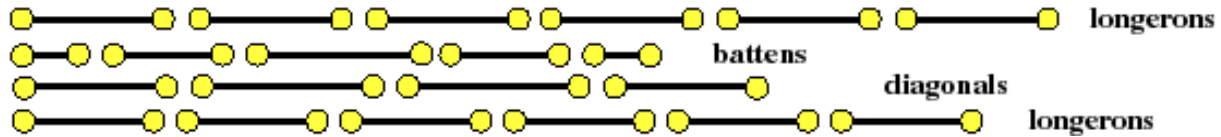
Localize:



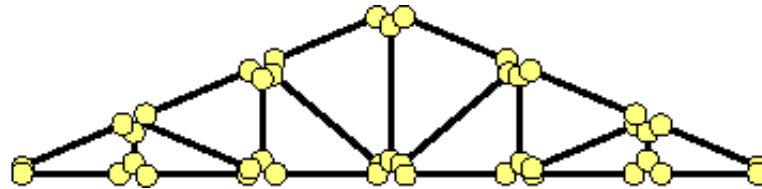
Generic element



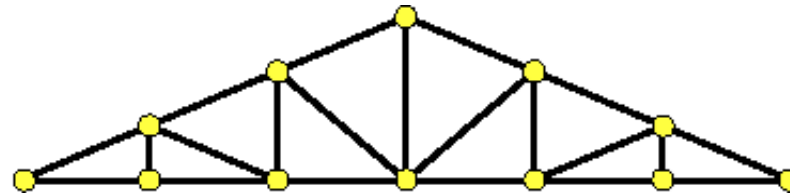
Form elements:



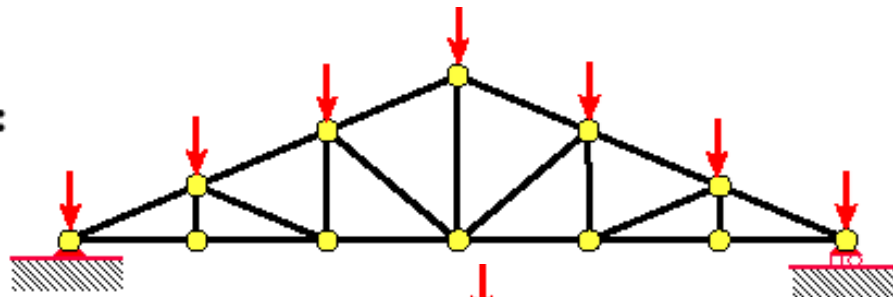
Globalize:



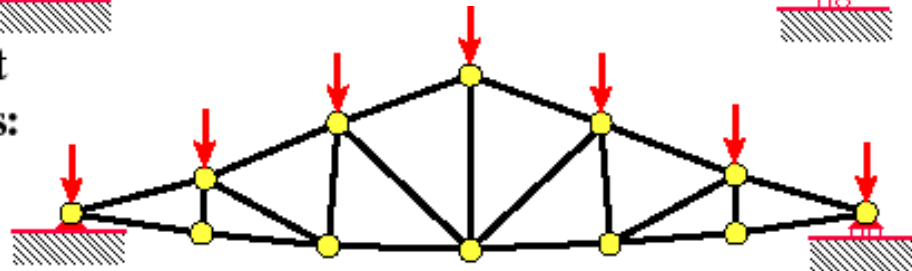
Merge:



Apply loads and supports:



Solve for joint displacements:



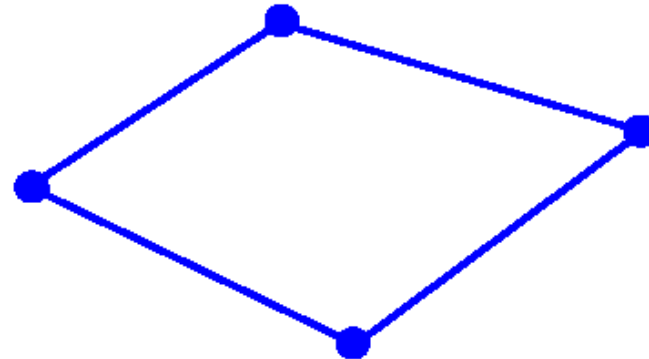
المان یک بعدی:



1-D (Line) Element

(Spring, truss, beam, pipe, etc.)

المان دو بعدی (صفحه‌ای):

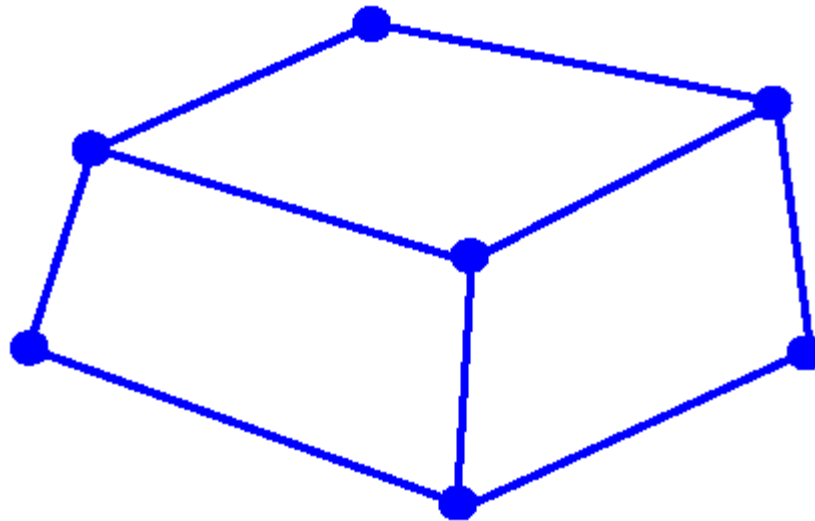


2-D (Plane) Element

(Membrane, plate, shell, etc.)

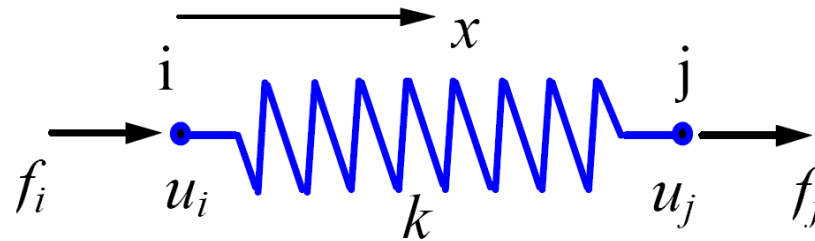
3-D (Solid) Element

المان سه بعدی (آجری):

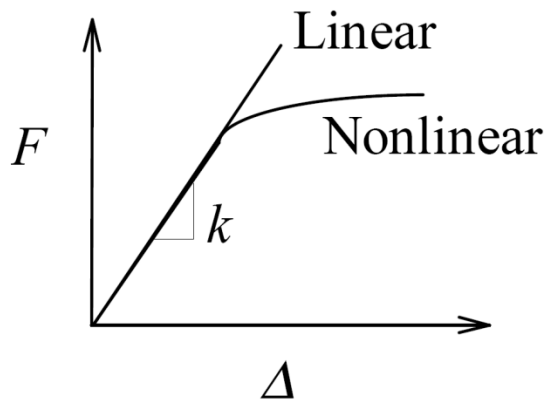


(3-D fields - temperature, displacement, stress, flow velocity)

One Spring Element



- Two nodes: i, j
- Nodal displacements: u_i, u_j (in, m, mm)
- Nodal forces: f_i, f_j (lb, Newton)
- Spring constant (stiffness): k (lb/in, N/m, N/mm)

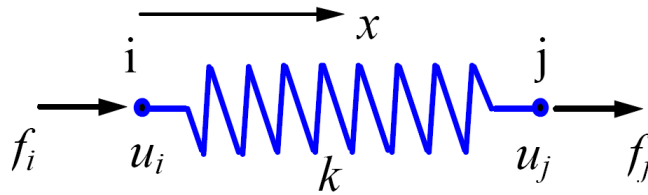


دیاگرام "تیرو-جابجایی" فنر

$$F = k\Delta$$

$$\text{with } \Delta = u_j - u_i$$

المان فنر : Spring Element



با در نظر گرفتن شرط تعادل نیرو در نقاط i و j خواهیم داشت:

$$f_i = -F = -k(u_j - u_i) = ku_i - ku_j \quad \text{در گره } i:$$

$$f_j = F = k(u_j - u_i) = -ku_i + ku_j \quad \text{در گره } j:$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

به فرم ماتریسی:

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

و یا:



$$ku = f$$

که در آن: \mathbf{k} ماتریس سختی (المان)

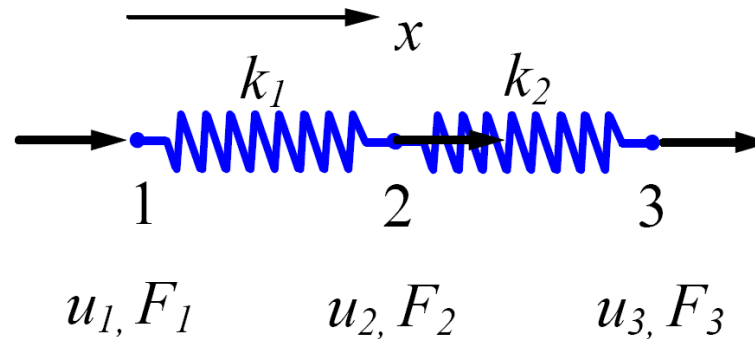
\mathbf{u} بردار تغییر مکان

\mathbf{f} بردار نیرو

ماتریس \mathbf{k} متقارن است. آیا ماتریس \mathbf{k} منفرد است؟

اگر ماتریس \mathbf{k} منفرد است، چگونه می توان معادله را حل کرد؟

چرا ماتریس \mathbf{k} منفرد است؟



برای المان اول :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

برای المان دوم :

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

f_i^m نیرو داخلی است که بر گره محلی i ام از المان m وارد می شود ($i=1,2$)



سوار نمودن سیستم فنر

$$F_1 = f_1^1$$

از تعادل نیرو در گره ۱ خواهیم داشت:

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2$$

در گره ۲:

$$F_3 = f_2^2$$

در گره ۳:

بنابراین خواهیم داشت:

$$F_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

$$F_2 = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3$$

$$F_3 = -k_2 u_2 + k_2 u_3$$

به فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

و یا:

k: ماتریس سختی برای کل سیستم فنر است.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

روش دیگری جهت سوار نمودن:

با توسیع (Enlarging) ماتریس
سختی برای المانهای ۱ و ۲:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

با جمع نمودن (*superposition*) دو
معادله ماتریسی فوق:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

معادله یکسان با
معادله ماتریسی
تعادل نیرو

اعمال بار گذاری و شرایط مرزی:

$u_1 = 0$ and $F_2 = F_3 = P$ با فرض:

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

قابل تقلیل به:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$F_1 = -k_1 u_2$$

و

مجهولات دستگاه فوق: $\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ و نیرو عکس العمل تکیه گاه F_1

با حل دستگاه تقلیل یافته (*)

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P / k_1 \\ 2P / k_1 + P / k_2 \end{Bmatrix}$$

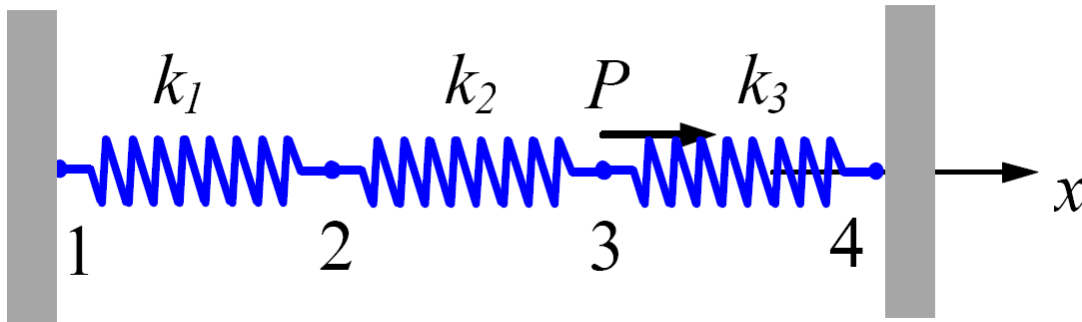
تغییر مکانها به دست می آیند:

و نیرو عکس العمل:

$$F_1 = -2P$$

صحت سنجی نتایج:

- *- تغییر شکل سازه
- *- توازن در نیروهای خارجی سازه
- *- رتبه و بزرگی اعداد



برای سیستم فوق داریم:

$$k_1 = 100 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N/mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$P = 500 \text{ N}, \quad u_1 = u_4 = 0$$

مطلوبست:

الف- ماتریس سختی کل سیستم

ب- تغییر مکان در گره‌های ۲ و ۳

ج- نیروهای عکس‌العمل در گره‌های ۱ و ۴

د- نیرو در فنر ۲

الف - ماتریسهای سختی المانها عبارتند از:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm})$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm})$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\text{N/mm})$$



سیستم المان فنر: مثال ۱

با توجه به مفهوم روش سوپرپوزیشن و اعمال آن بر ماتریس سختی هر المان، ماتریس سختی کل سیستم برابر است با:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

و یا:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریس \mathbf{K} به صورت متقارن و شبه قطری است.

معادله تعادل برای کل سیستم:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (**)$$

$$u_1 = u_4 = 0$$

ب- با قرار دادن شرایط مرزی :

با حذف سطر و ستونهای اول و چهارم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

و با حل دستگاه:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P / 250 \\ 3P / 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

ج- با معادلات اول و چهارم از دستگاه (***) نیروهای عکس العمل در گره‌های

$$F_1 = -100u_2 = -200 \text{ (N)}$$

۱ و ۴ به دست می‌آیند:

$$F_4 = -100u_3 = -300 \text{ (N)}$$

د- از معادلات اجزای محدود برای فنر (المان) ۲ داریم:

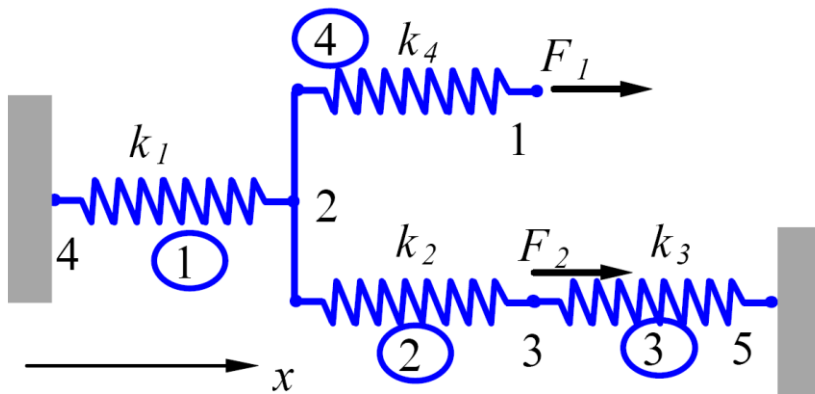
$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

در اینجا $i=2$ و $j=3$ برای المان ۲ است.

بنابراین می توان نیرو در المان (فنر) ۲ را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} F = f_j = -f_i &= [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ &= 200 \text{ (N)} \end{aligned}$$

بررسی نتایج؟



برای سیستم روبرو، که در آن گره‌ها به دلخواه شماره گذاری شده‌اند ماتریس سختی را به دست آورید.

جدول اتصال المان‌ها

Element Connectivity Table

<i>Element</i>	<i>Node i (1)</i>	<i>Node j (2)</i>
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

جدول بیانگر ارتباط شماره گره‌های سراسری با شماره گره‌های محلی در هر المان است.



سیستم المان فنر: مثال ۲

ماتریس سختی برای هر المان:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & u_4 & u_2 \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & u_2 & u_3 \\ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{matrix} & u_3 & u_5 \\ \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = \begin{matrix} & u_2 & u_1 \\ \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

روش سوپرپوزیشن جهت محاسبه ماتریس سختی:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\
 k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\
 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\
 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\
 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3
 \end{bmatrix}$$

این ماتریس متقارن، شبه قطری، ولی منفرد است. چرا؟

مفهوم فیزیکی مولفه های ماتریس سختی (k):

ستون j ام ماتریس (k) (در اینجا $j=1,2$) بیانگر نیروهای اعمال شده به فنر است وقتی که تغییر مکان در گره j ام برابر یک و تغییر مکان در بقیه گره ها صفر باشد.

- 1- Suitable for stiffness analysis.
- 2- Not suitable for stress analysis of the spring itself.
- 3- Can have spring elements with stiffness in the lateral direction, spring elements for torsion, etc.

Reference: Yijun Liu, University of Cincinnati, 1998.