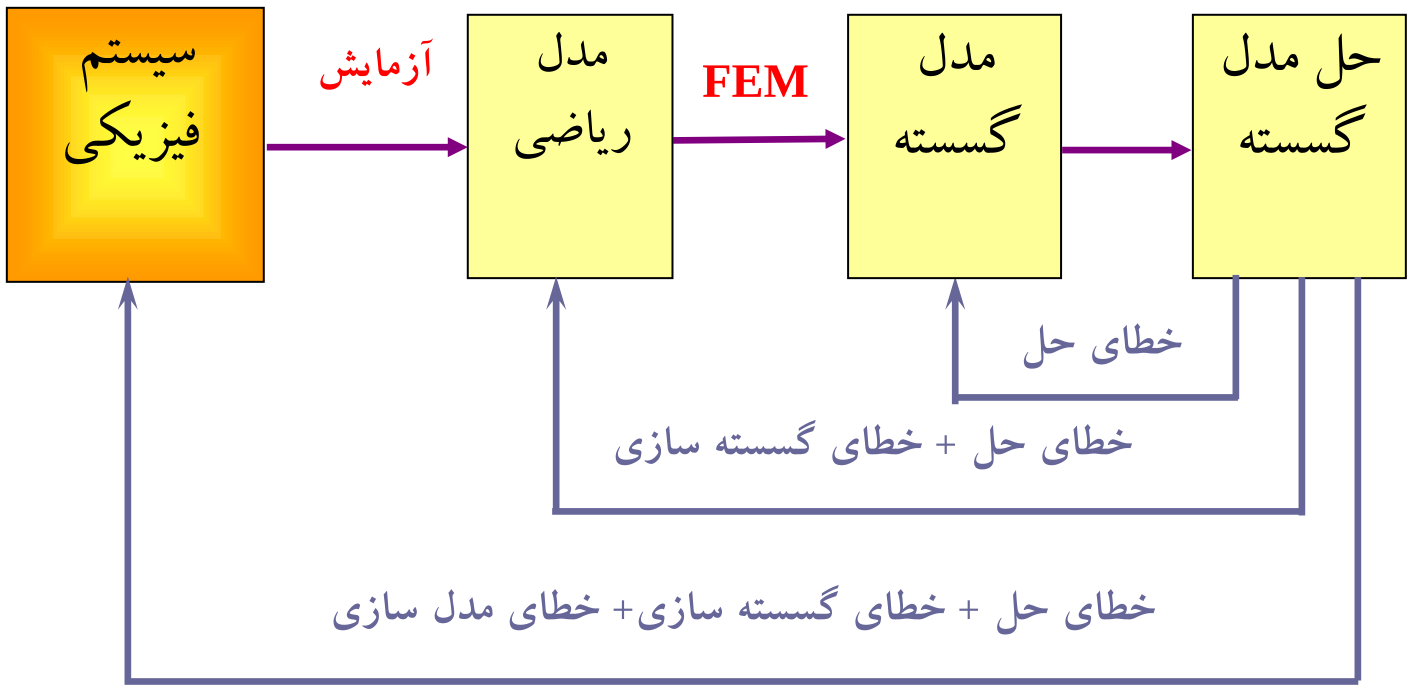
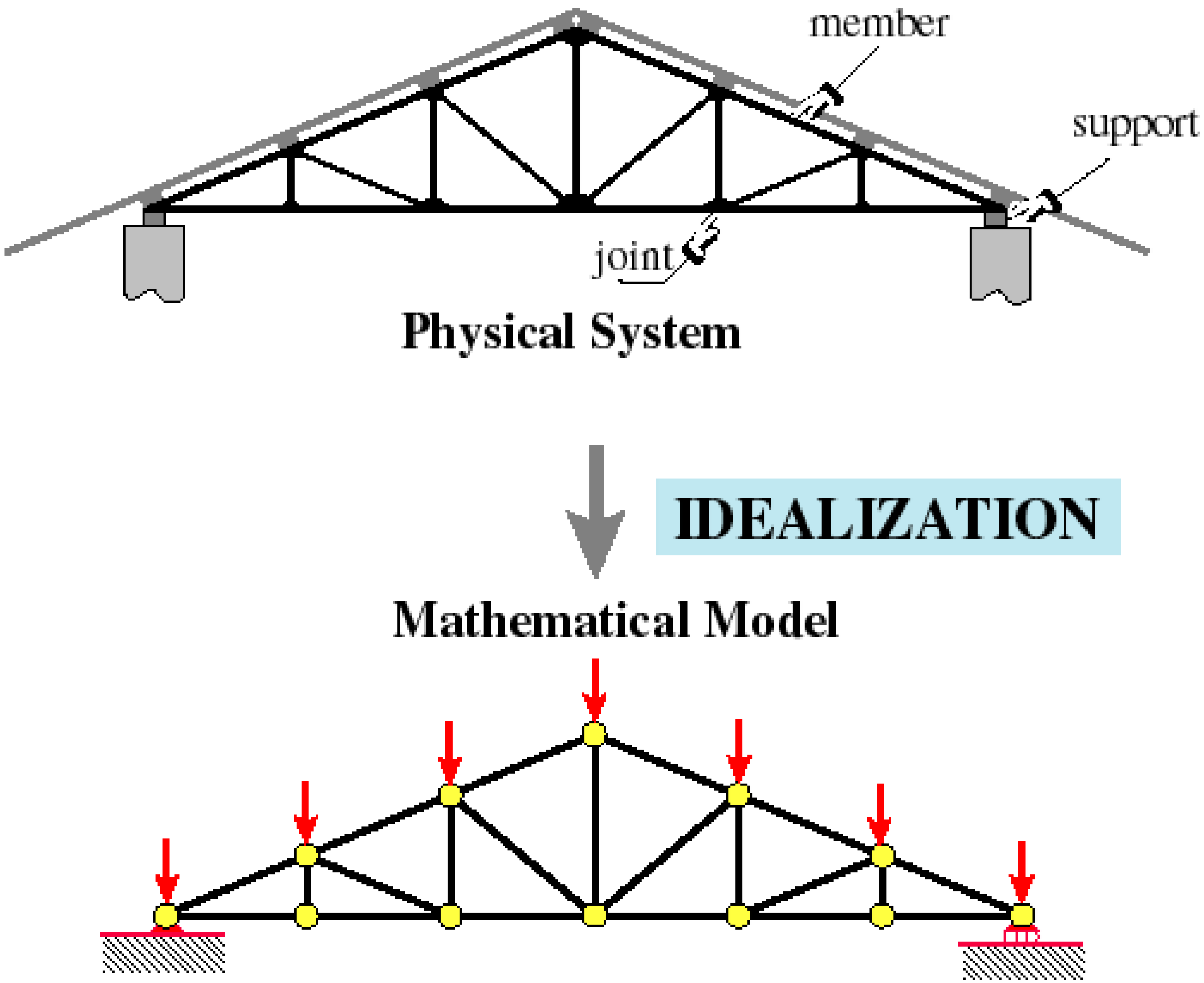
استخراج معادلات اجزای محدود به روش مستقیم

- روش مستقیم برای المان‌های ساده قابل اجراست.
- با توجه به بالا بردن مفاهیم فیزیکی، جهت مطالعه بسیار با ارزش است.

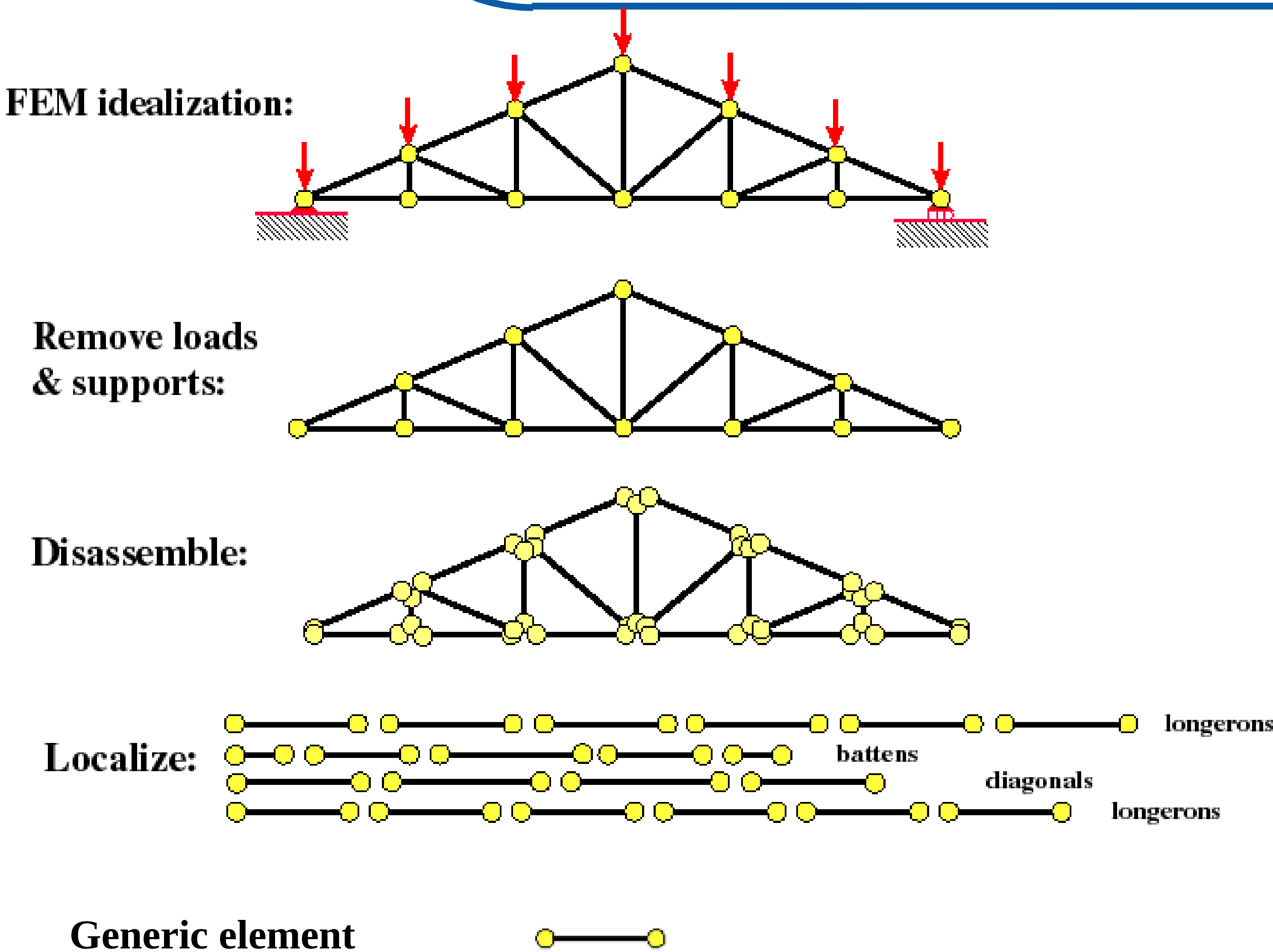
فرآیند مدل‌سازی و شبیه‌سازی در روش اجزای محدود



فرآیند مدل‌سازی در روش اجزای محدود



فرآیند گسسته‌سازی در روش اجزای محدود



فرآیند سوار کردن و حل در روش اجزای محدود

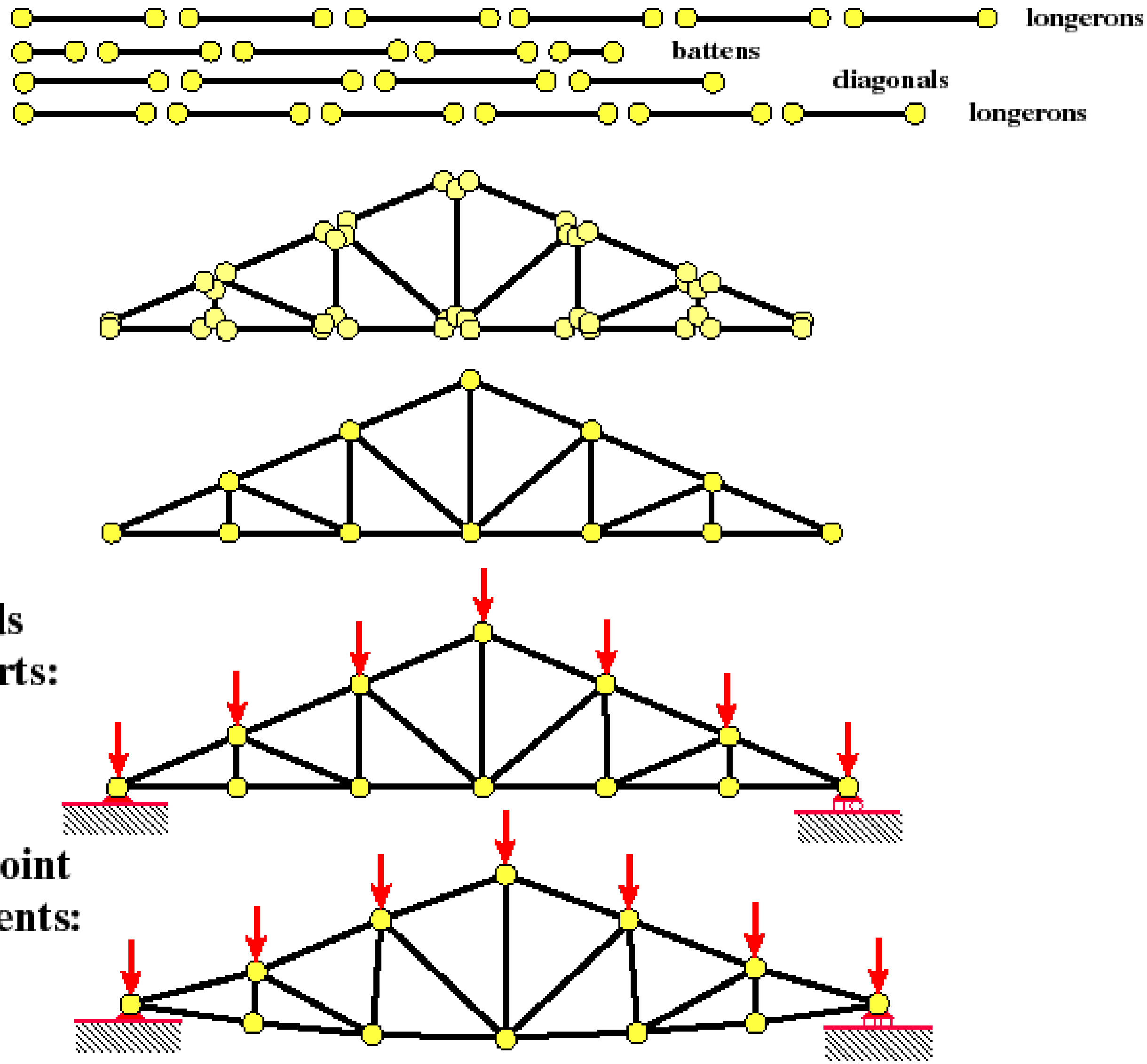
Form elements:

Globalize:

Merge:

Apply loads and supports:

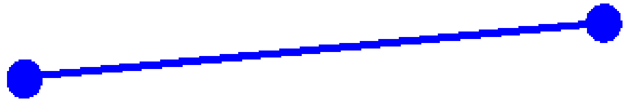
Solve for joint displacements:



انواع المان (اجزای محدود)

المان یک بعدی:

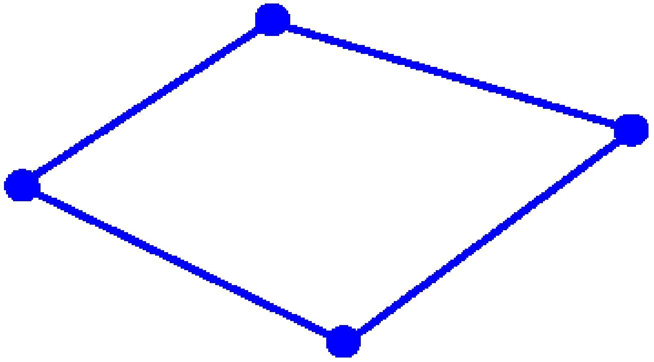
1-D (Line) Element



(Spring, truss, beam, pipe, etc.)

المان دو بعدی (صفحه‌ای):

2-D (Plane) Element

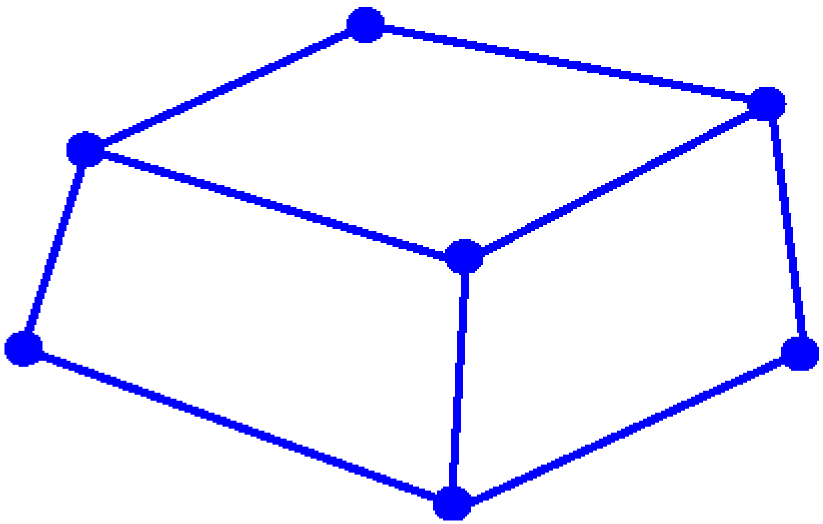


(Membrane, plate, shell, etc.)

انواع المان (اجزای محدود)

المان سه بعدی (آجری):

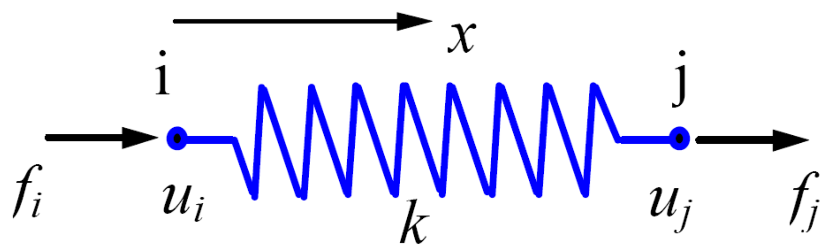
3-D (Solid) Element



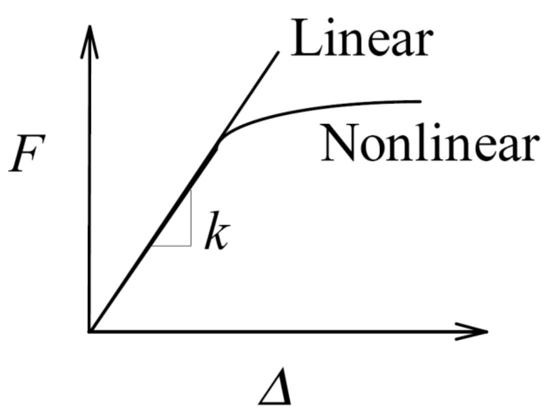
(3-D fields - temperature, displacement, stress, flow velocity)

Spring Element : المان فنر

One Spring Element



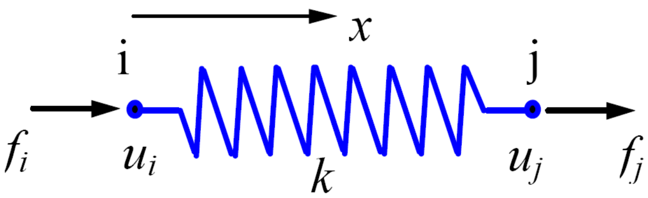
Two nodes:	i, j
Nodal displacements:	u_i, u_j (in, m, mm)
Nodal forces:	f_i, f_j (lb, Newton)
Spring constant (stiffness):	k (lb/in, N/m, N/mm)



دیاگرام "نیرو-جابجایی" فنر

$$F = k\Delta \qquad \text{with } \Delta = u_j - u_i$$

المان فنر : Spring Element



با در نظر گرفتن شرط تعادل نیرو در نقاط i و j خواهیم داشت:

در گره i:

$$f_i = -F = -k(u_j - u_i) = ku_i - ku_j$$

در گره j:

$$f_j = F = k(u_j - u_i) = -ku_i + ku_j$$

به فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

و یا :

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

که در آن: **k** ماتریس سختی (المان)

u بردار تغییر مکان

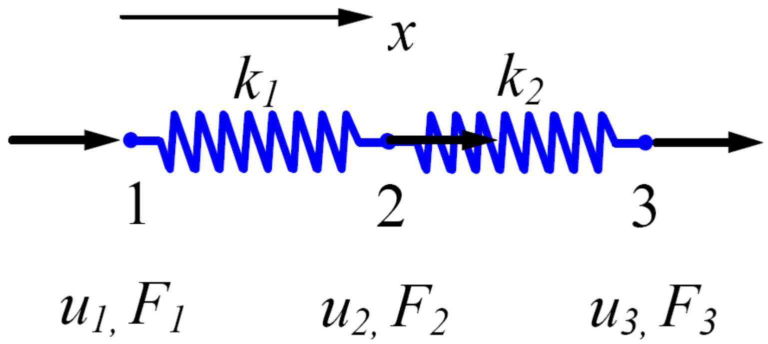
f بردار نیرو

ماتریس **k** متقارن است. آیا ماتریس **k** منفرد است؟

اگر ماتریس **k** منفرد است، چگونه می توان معادله را حل کرد؟

چرا ماتریس **k** منفرد است؟

سیستم فنر : Spring System



برای المان اول :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

برای المان دوم :

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

f_i^m نیرو داخلی است که بر گره محلی iام از المان mام وارد می‌شود (i=1,2)

سوار نمودن سیستم فنر

از تعادل نیرو در گره ۱ خواهیم داشت:

$$F_1 = f_1^1$$

در گره ۲:

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2$$

در گره ۳:

$$F_3 = f_2^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$F_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

$$F_2 = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3$$

$$F_3 = -k_2 u_2 + k_2 u_3$$

سوار نمودن سیستم فنر

به فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

و یا :

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f}$$

k : ماتریس سختی برای کل سیستم فنر است.

سوار نمودن سیستم فنر

روش دیگری جهت سوار نمودن:

با توسیع (Enlarging) ماتریس سختی برای المانهای ۱ و ۲:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

با جمع نمودن (*superposition*) دو معادله ماتریسی فوق :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

معادله یکسان با معادله ماتریسی تعادل نیرو

اعمال بارگذاری و شرایط مرزی:

با فرض :

$$u_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad F_2 = F_3 = P$$

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

قابل تقلیل به:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \qquad (*)$$

و

$$F_1 = -k_1 u_2$$

سوار نمودن سیستم فنر

مجهولات دستگاه فوق: $\mathbf{U}=\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}$ و نیرو عکس‌العمل تکیه‌گاه F_1

با حل دستگاه تقلیل یافته (*)

تغییرمکانها به دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2P/k_1\\2P/k_1+P/k_2\end{Bmatrix}$$

و نیرو عکس‌العمل:

$$F_1=-2P$$

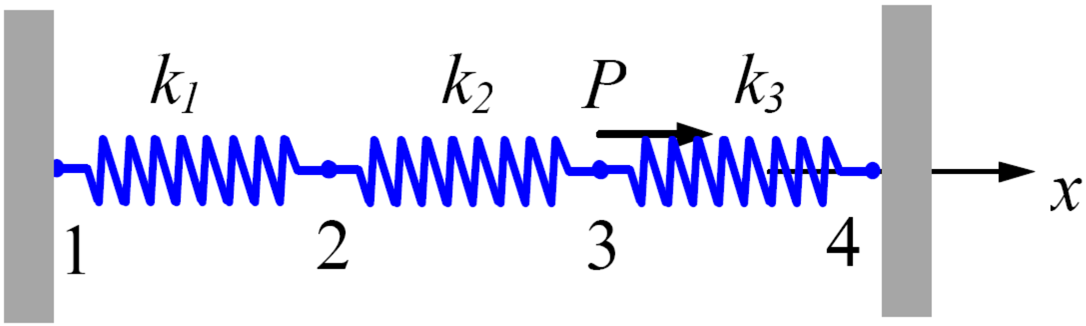
صحت سنجی نتایج:

*– تغییرشکل سازه

*– توازن در نیروهای خارجی سازه

*– رتبه و بزرگی اعداد

سیستم المان فنر: مثال ۱



برای سیستم فوق داریم:

$$k_1 = 100 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N/mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$P = 500 \text{ N}, \quad \mathrm{u}_1 = u_4 = 0$$

مطلوبست:

الف- ماتریس سختی کل سیستم

ب- تغییر مکان در گره‌های ۲و۳

ج- نیروهای عکس‌العمل در گره‌های ۱و۴

د- نیرو در فنر ۲

سیستم المان فنر: مثال ۱

الف- ماتریسهای سختی المانها عبارتند از:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{N/mm})$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{N/mm})$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{N/mm})$$

سیستم المان فنر: مثال ۱

با توجه به مفهوم روش سوپرپوزیشن و اعمال آن بر ماتریس سختی هر المان،
ماتریس سختی کل سیستم برابر است با:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{K} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

و یا :

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریس **K** به صورت متقارن و شبه قطری است.

معادله تعادل برای کل سیستم:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix} \qquad (**)$$

ب- با قرار دادن شرایط مرزی :

$$u_1 = u_4 = 0$$

با حذف سطر و ستونهای اول و چهارم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

و با حل دستگاه:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \ (\mathrm{mm})$$

ج- با معادلات اول و چهارم از دستگاه (**) نیروهای عکس‌العمل در گره‌های ۱و۴ به دست می‌آیند:

$$F_1 = -100u_2 = -200 \ \ (\mathrm{N})$$

$$F_4 = -100u_3 = -300 \ \ (\mathrm{N})$$

سیستم المان فنر: مثال ۱

د- از معادلات اجزای محدود برای فنر (المان) ۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

در اینجا i=2 و j=3 برای المان ۲ است.

بنابراین می‌توان نیرو در المان (فنر) ۲ را محاسبه نمود:

$$F = f_j = -f_i = [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

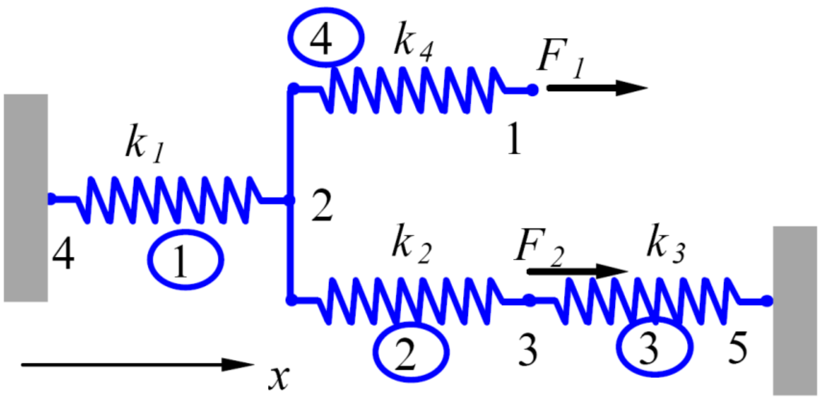
$$= [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$= 200 \ \ (\mathrm{N})$$

بررسی نتایج؟

سیستم المان فنر: مثال ۲

برای سیستم روبرو، که در آن گره‌ها به دلخواه شماره گذاری شده‌اند ماتریس سختی را به دست آورید.



جدول اتصال المان ها

Element Connectivity Table

Element	*Node i (1)*	*Node j (2)*
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

جدول بیانگر ارتباط شماره گره‌های سراسری با شماره گره‌های محلی در هر المان است.

سیستم المان فنر: مثال ۲

ماتریس سختی برای هر المان:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_4 & u_2 \end{array} \\ \mathbf{k}_1 = & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = & \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_3 & u_5 \end{array} \\ \mathbf{k}_3 = & \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_2 & u_1 \end{array} \\ \mathbf{k}_4 = & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

سیستم المان فنر: مثال ۲

روش سوپرپوزیشن جهت محاسبه ماتریس سختی:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\
-k_4 & k_1+k_2+k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\
0 & -k_2 & k_2+k_3 & 0 & -k_3 \\
0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\
0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

این ماتریس متقارن، شبه قطری، ولی منفرد است. چرا؟

جمع‌بندی المان فنر

مفهوم فیزیکی مولفه‌های ماتریس سختی (k):

ستون jام ماتریس (k) (در اینجا j=1,2) بیانگر نیروهای اعمال شده به فنر است وقتی که تغییر مکان در گره jام برابر یک و تغییرمکان در بقیه گره‌ها صفر باشد.

1- Suitable for stiffness analysis.

2- Not suitable for stress analysis of the spring itself.

3- Can have spring elements with stiffness in the lateral direction, spring elements for torsion, etc.

Reference: Yijun Liu, University of Cincinnati, 1998.