



دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده مکانیک

# روش اجزای محدود

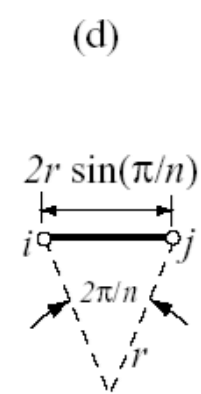
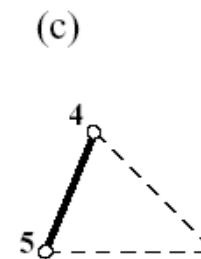
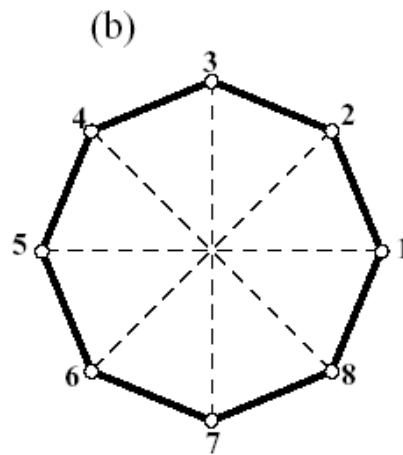
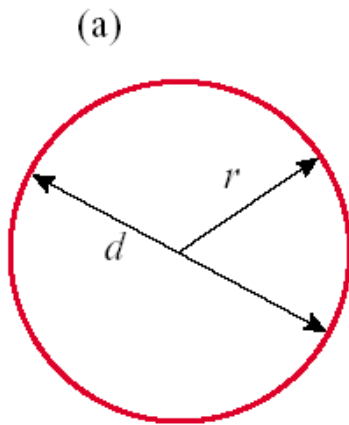
➤ پیچیدگی هندسی، رفتار پیچیده ماده و شرایط مرزی موجود در مسایل واقعی، رسیدن به حل دقیق را با دشواری روبرو ساخته است.

➤ استفاده از حل‌های تقریبی قابل قبول که در زمان محدود به دست می‌آید اجتناب ناپذیر است روش اجزای محدود یکی از این انتخاب‌ها است.

➤ روش اجزای محدود یک روش عددی برای رسیدن به حل تقریبی در بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی است که رفتار حاکم بر آنها توسط یک (و یا یک دستگاه) معادله دیفرانسیل بیان می‌شود. در این روش از توابع پیوسته چند تکه‌ای و هموار برای تقریب کمیت مجهول مورد نظر سود برده می‌شود.



هدف اصلی در روش اجزای محدود، یافتن حل یک مسئله پیچیده از طریق جایگزینی آن با یک مدل ساده‌تر است. در روش اجزای محدود ناحیه حل به صورت مجموعه‌ای از زیر ناحیه‌های کوچک متصل به هم، به نام المان و یا اجزای محدود در نظر گرفته می‌شود. در ادامه برای هر قطعه یا المان یک حل تقریبی مناسب فرض می‌شود. با سوار نمودن این اجزاء و ... شرایط تعادل کلی سیستم (مانند سازه) استخراج می‌شود. با ارضای این شرایط جواب تقریبی برای کمیت مورد نظر (تغییر مکانها) به دست می‌آید.



$$S_i = (R \cos \theta_i / 2)(R \sin \theta_i / 2)$$

$$S_i = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta_i$$

$$S_N = \sum S_i = \frac{1}{2} R^2 N \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \rightarrow \pi R^2 \rightarrow as \quad N \rightarrow \infty$$

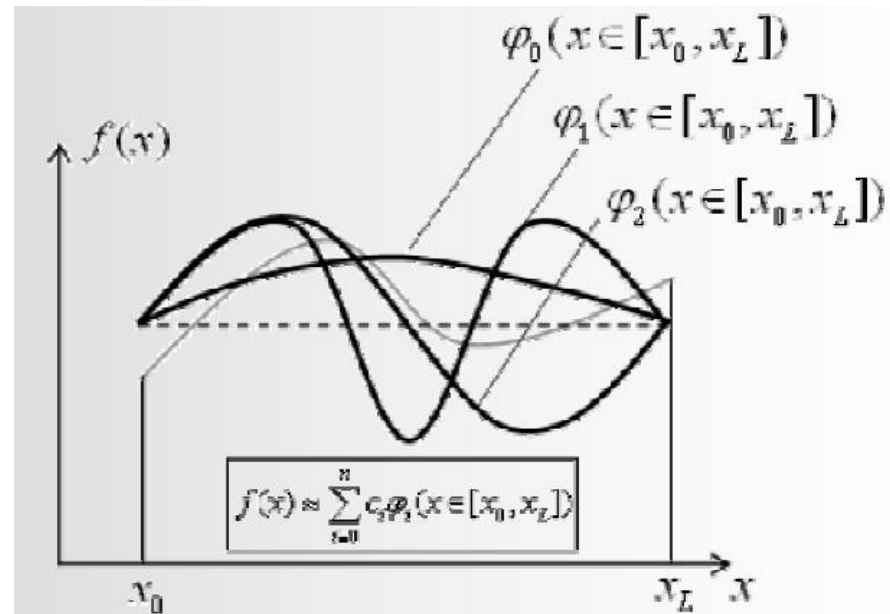
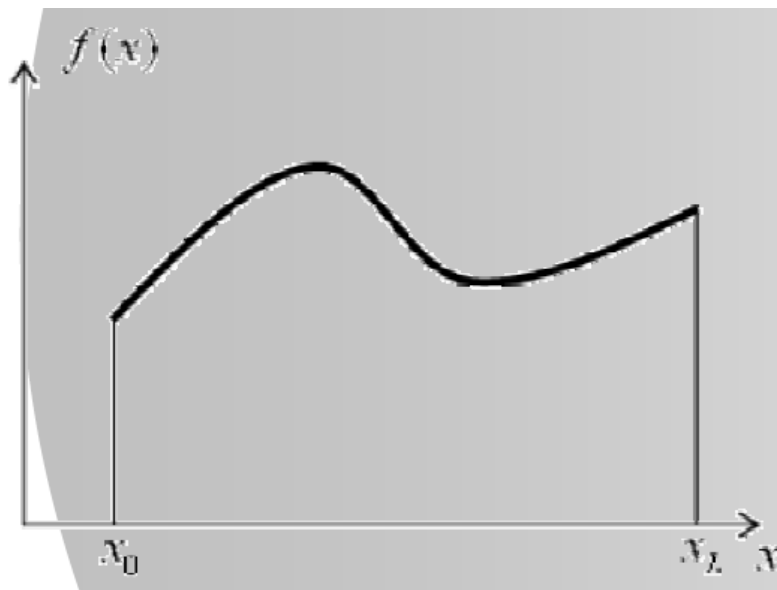


## مقدمه: روش اجزای محدود

$n$	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn- $\epsilon$	Exact $\pi$ to 16 places
1	0.0000000000000000		
2	2.0000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

## Discretized approximation

تقریب گسسته سازی

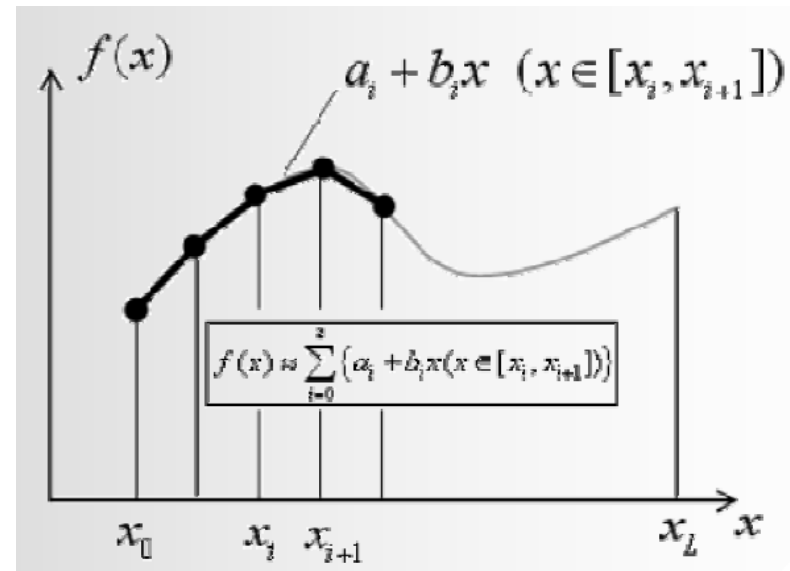
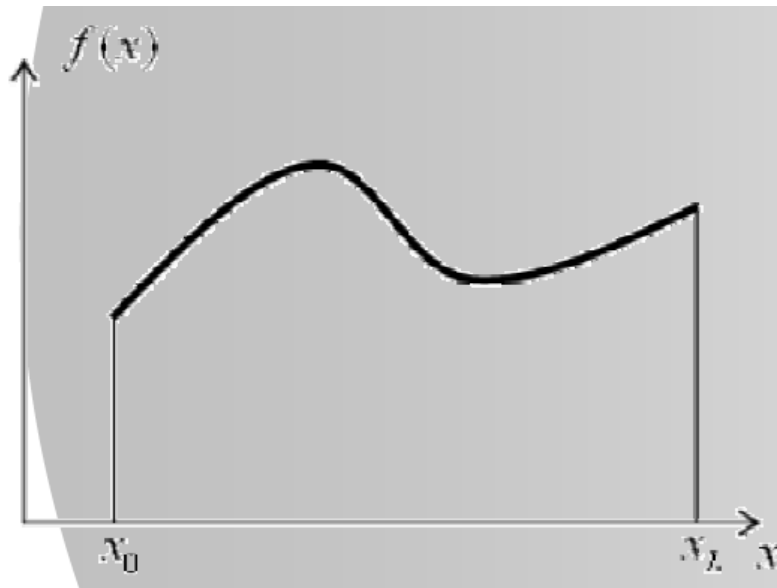


### Rayleigh-Ritz principle

- Approximation in the whole domain
- Higher-order continuous function
- Fewer base functions

## Discretized approximation

تقریب گسسته سازی

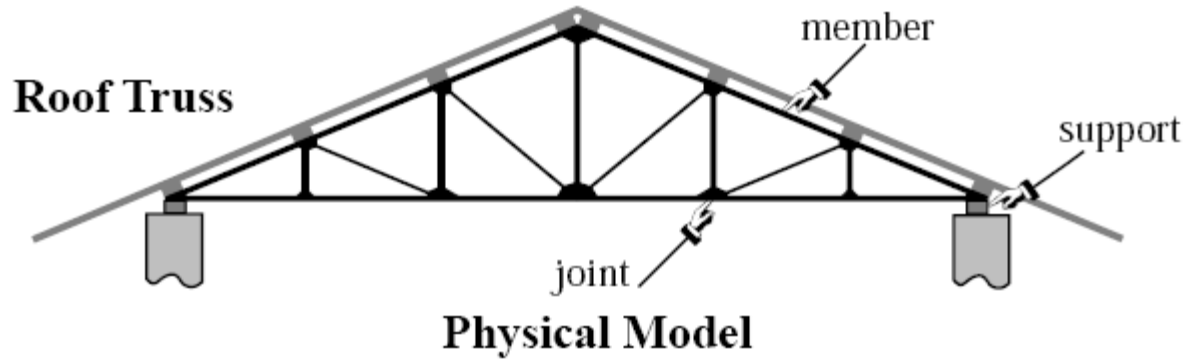


### Another method

- Pieces function approximation in sub-domain
- Linear or polynomial function
- More base functions

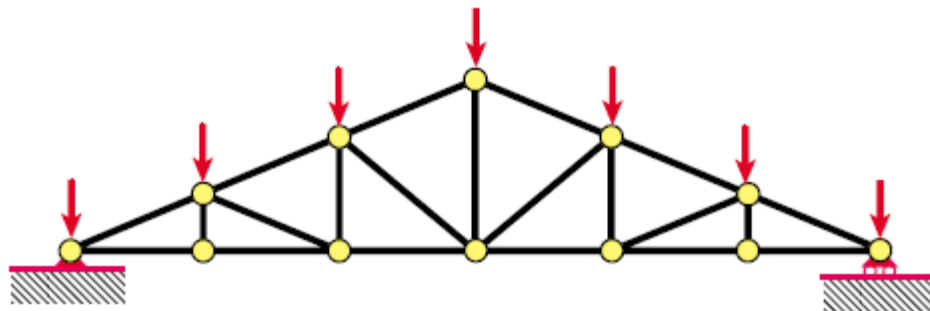


ایده اساسی روش اجزای محدود



**IDEALIZATION & DISCRETIZATION**

**Mathematical *and* Discrete Model**







FINITE

**Finite Number**

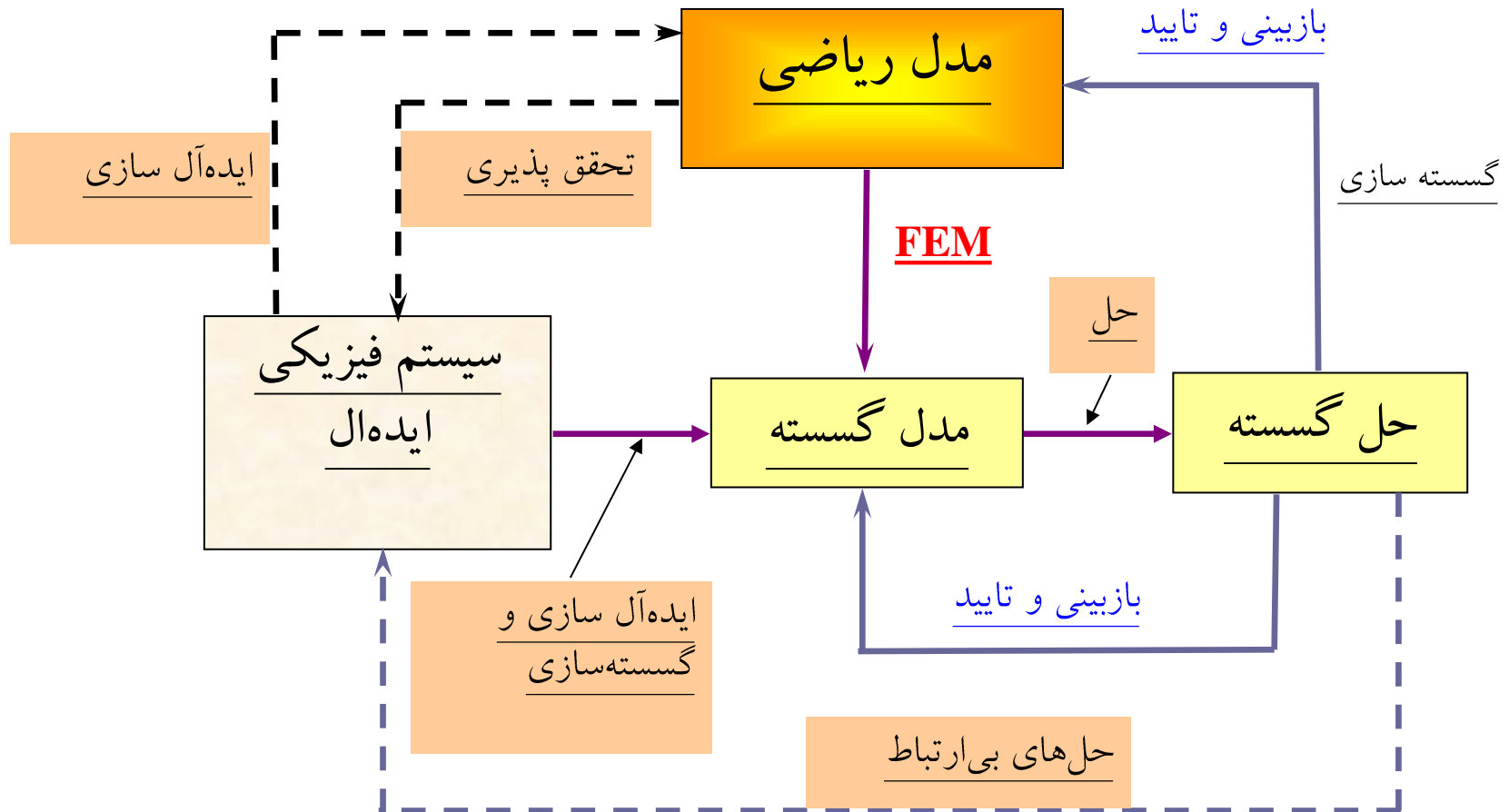
There is only finite number of elements in your analysis model, not infinite.

**Finite Accuracy**

The accuracy of your analysis is finite. Even for very fine model, it is not accurate solution.

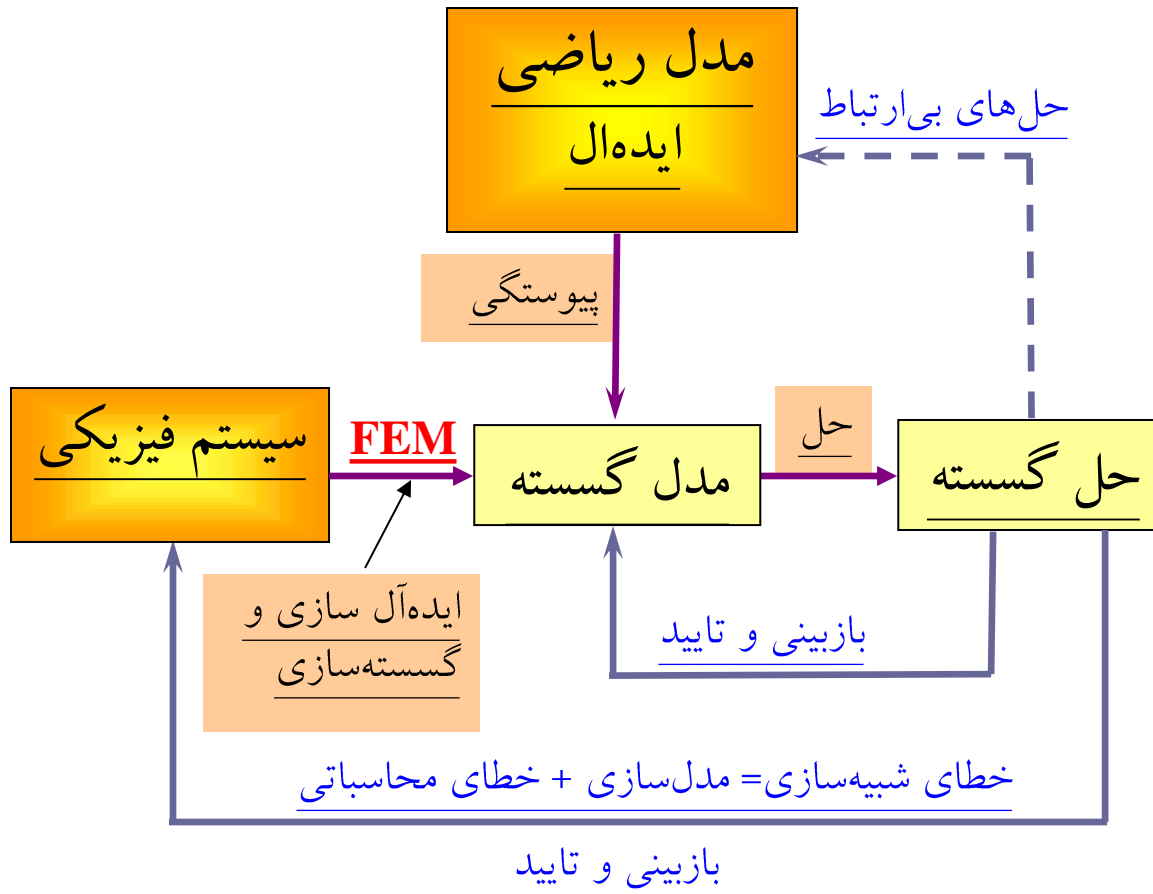


# مدل سازی و شبیه سازی روش اجزای محدود بر مبنای مدل ریاضی



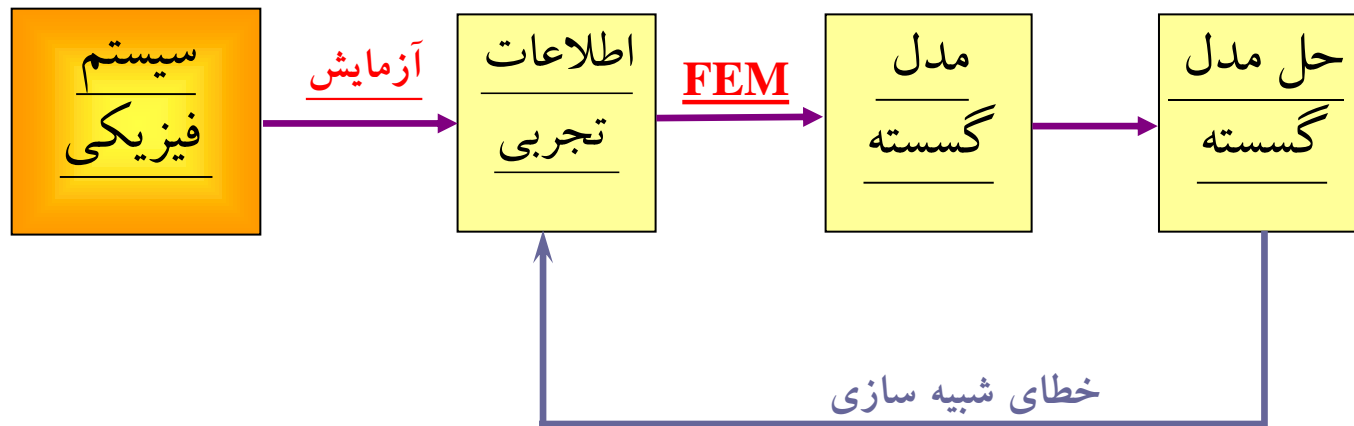


# مدل سازی و شبیه سازی روش اجزای محدود بر مبنای مدل فیزیکی



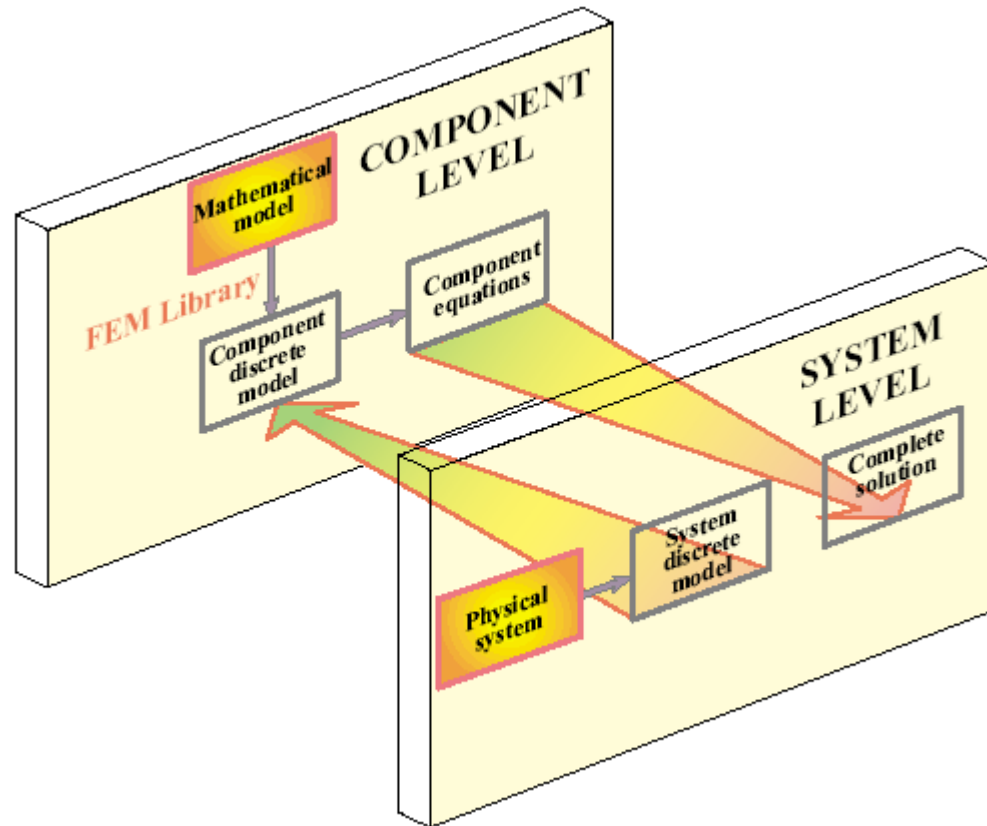


# بهنگام نمودن روش اجزای محدود با مدل فیزیکی





# ترکیب دو مدل فیزیکی و ریاضی در روش اجزای محدود





# روش‌های گسسته سازی جهت شبیه‌سازی عددی

Finite Element method	روش اجزای محدود
Finite Difference method	روش تفاضل محدود
Boundary Element method	روش اجزای مرزی
Finite Volume method	روش حجم محدود
Mesh Free method	روش بدون المان
Spectral method	روش طیفی



## *Direct Method*

۱- روش مستقیم

## *Variational*

۲- روش حساب تغییرات

## *Method*

۳- روش باقیمانده‌های وزنی *Weighted Method*

## *Residuals*

۳-۱- روش گالرکین

۳-۲- روش حداقل مجذورات

## *Stiffness Method*

۴- روش سختی



## روش‌های استخراج معادلات روش اجزای محدود

۱- روش مستقیم: الف- این روش برای المان‌های ساده قابل اجراست.

ب- با توجه به بالا بردن مفاهیم فیزیکی، جهت مطالعه بسیار با ارزش است.

۲- روش حساب تغییرات: این روش برای مسایلی قابل پیاده سازی است که رفتار حاکم بر آن به فرم انتگرالی بیان شود.

۳- روش باقیمانده های وزنی:

این روش برای مسایلی که رفتار حاکم بر آن به فرم معادلات دیفرانسیل باشد و بیان انتگرالی آن در دسترس نباشد استفاده می شود.



مرحله (I) : گسسته (مجزا) سازی سازه

در این مرحله سازه مکانیکی یا ناحیه حل مورد نظر به بخش‌های کوچکتر (المان) تقسیم می‌شود. نقاط مشترک در مرز المان به نام گره شناخته می‌شود. در مورد نوع، تعداد و ترتیب المان باید تصمیم‌گیری نمود.

مرحله (II) : ارائه رفتار فیزیکی حاکم بر المان به صورت کمی

در این مرحله لازم است رفتار فیزیکی حاکم بر المانهای سازه مکانیکی به صورت یک (و یا چند) معادله بیان شود.



مرحله (III): انتخاب یک مدل درونیاب یا مدل جابجایی مناسب

از آنجا که تغییرات واقعی متغیر میدان (مانند جابجایی، تنش، دما، فشار یا سرعت) در داخل این محیط پیوسته مجهول است، تغییرات متغیر میدان در داخل یک المان محدود به وسیله یک تابع ساده تقریب زده می‌شوند و بر حسب مقادیر متغیرهای میدان در گره‌ها بیان می‌شوند. معمولاً مدل درونیاب (تابع تقریب، توابع شکل) را به شکل چند جمله‌ای در نظر می‌گیرند.

مرحله (IV) : به دست آوردن ماتریس سختی و بردارهای نیروی المان

هنگامی که معادلات میدان (مانند معادلات تعادل) برای یک المان نوشته شد، مجهولات مسئله، متغیر میدان در گره‌ها خواهند بود. در این مرحله ماتریس سختی و بردار نیروی المان محاسبه می‌شود.

مرحله (V) : سوار (جمع) کردن معادلات المانها برای به دست آوردن معادلات کلی تعادل

از آنجا که سازه از چندین المان تشکیل شده است، ماتریس سختی و بردارهای نیروی المانهای منفرد را با یک روش مناسب با یکدیگر جمع می‌شوند.



مرحله (VI): به دست آوردن متغیرهای میدان (جابجایی‌ها) در گره‌ها

معادلات کلی میدان (مانند معادلات تعادل) باید برای شرایط مرزی اصلاح شوند و پس از آن با استفاده از یک روش عددی مناسب مقادیر متغیرهای میدان استخراج شوند.

مرحله (VII): محاسبه متغیرهای وابسته (نظیر تنشها و کرنشهای المان)

در صورت نیاز با استفاده از متغیرهای میدان (نظیر جابجایی‌ها) میتوان متغیرهای وابسته (نظیر تنشها و کرنشهای المان) را با استفاده از معادلات مورد لزوم حاکم بر مسئله (نظیر معادلات مکانیک جامدات) محاسبه نمود.



## پیاده‌سازی روش اجزای محدود

مرحله (I) : پیش پردازش

در این مرحله مدل هندسی و مدل شبکه‌بندی شده مسئله ساخته می‌شود. سپس بارگذاری و شرایط مرزی به مدل اعمال می‌گردد.

مرحله (II) : حل مدل اجزای محدود

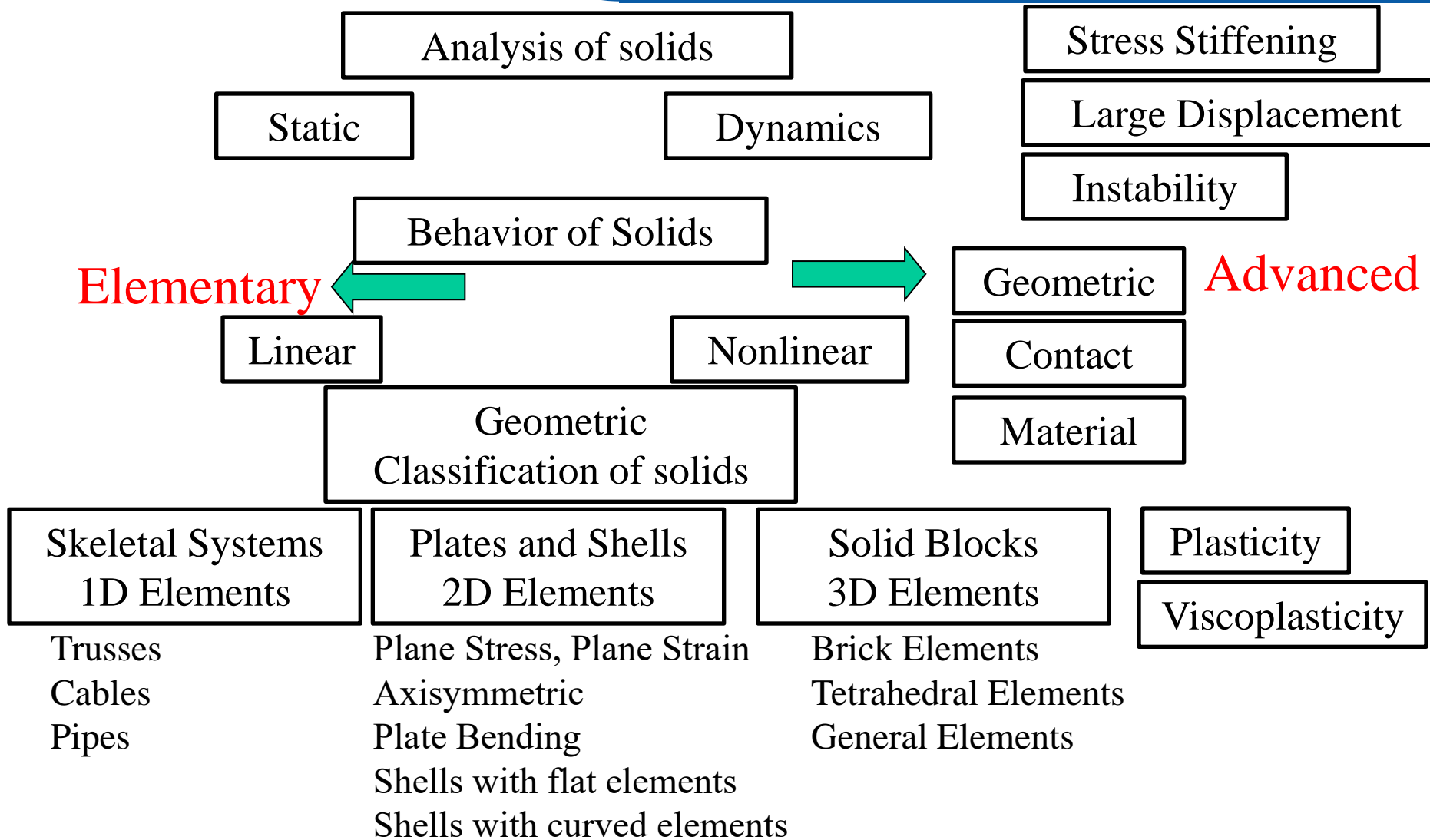
سوار کردن معادلات سیستم و حل معادلات کلی در این مرحله انجام می‌پذیرد.

مرحله (III) : پس پردازش

آماده نمودن و نمایش نتایج



# تقسیم بندی مسایل مکانیک جامدات





- آشنایی با مفاهیم اولیه روش اجزای محدود
- روش های استخراج معادلات اجزای محدود
- روش مستقیم استخراج معادلات اجزای محدود به روش مستقیم
- آنالیز استاتیکی: المان میله دو بعدی، سه بعدی همراه با پیاده سازی عددی
- المان تیر دو بعدی، سه بعدی همراه با پیاده سازی عددی
- حل مسایل دو بعدی جامدات؛ المان مثلثی، المان مربعی، المان صفحه
- تکنیک های مدل سازی و حل مسئله به روش اجزای محدود

- روش حل معادلات اجزای محدود؛ همگرایی، اعمال قيود، انتگرال گیری عددی
- فرمول بندی روش اجزای محدود به صورت فرم ضعیف
  - \*- روش حساب تغییرات
  - \*- روش باقیمانده‌های وزنی، گالرکین
  - \*- روش ریلی-ریتز
- حل مسایل میدان به روش اجزای محدود
- حل مسایل دینامیک به روش اجزای محدود





- ❖ شناخت و تسلط بر مبنای روش اجزای محدود
- ❖ استخراج و به کارگیری انواع المان (معرفی شده در این درس)
- ❖ پیاده سازی روش اجزای محدود
  - نرم افزار MATLAB
  - نرم افزار ABAQUS یا ANSYS
- ❖ تهیه مدل مناسب اجزای محدود
- ❖ توانایی تفسیر و ارزیابی نتایج اجزای محدود
- ❖ شناخت محدودیت ها و مزیت های روش اجزای محدود



*Try to study FEA by:*

*Mathematical principle + Analysis modeling +  
Software application*

*Try to use FEA by*

*Software + Practical problem + Self development*



**1- Introduction To Finite Elements in Engineering**

*T. Chandrupatla and A. D. Belegundu, Prentice Hall, 2001.*

**2- A First Course in the Finite Element Method**

*D.L. Logan, 2011.*

**3- The Finite Element Method in Engineering**

*S.S. Rao, 2010.*

**4- A First Course in Finite Elements**

*J. Fish, and T. Belytschko, 2007.*

**5-An Introduction to the Finite Element Method**

*J. N. Reddy, McGraw-Hill, 1993.*

**6- Fundamental Finite Element Analysis and Applications**

*M. A. Bhatti, 2005.*

**7- The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**

*Thomas J. R. Hughes, Prentice-Hall, 2000.*

**8-Finite Element Modeling for Stress Analysis**

*R. D. Cook, John Wiley & Sons, 1995.*

**9- The Finite Element Method: Volume 1, Basic Formulation and Linear Problems**

*O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, 2000.*



بارم نمره

تکالیف : ۱۵٪

امتحان میانترم: ۳۵٪ چهارشنبه ۹۶/۸/۲۴ ساعت: ۱۱ - ۸/۳۰

امتحان پایانترم: ۵۰٪

فایل های درس، تکالیف و مراجع:

<http://mashayekhi.iut.ac.ir/>

\\172.16.60.2\teachers\mashayekhi\Finite Element Method



# تاریخچه روش اجزای محدود

Engineering ←

→ Mathematics

Trial function

Finite difference method

Variational method

Method of Weighted Residuals

Richardson 1910  
Liebman 1918  
Southwell 1946

Rayleigh 1870  
Ritz 1909

Gauss 1795  
Galerkin 1915  
Biezeno-Koch 1923

Similar structure replacement

Continuous trial function

Variable finite difference method

Hrenikoff 1941  
Mchenry 1943  
Newmark 1949

Courant 1943  
Prager-Synge 1947  
Zienkiewicz 1964

Varga 1962

Direct continuum elements

Argyris 1955  
Turner et al. 1956

Present Finite Element Method

First coined by Clough 1960



# تاریخچه روش اجزای محدود

■ ۱۹۴۳ ..... Courant : وی برای اولین بار روش مشابه روش اجزای محدود ارائه کرد که در آن از توابع دارای پیوستگی تکه‌ای که در نواحی مثلثی تعریف می‌شوند استفاده کرد.

■ ۱۹۵۶ ..... Turner, Clough, Martin and Topp : آنان در یک مقاله کاربرد اجزای محدود ساده (شامل میله‌های مفصل شده) برای تحلیل سازه هواپیما استفاده نمودند. این تحلیل به‌عنوان یک پیشرفت کلیدی در توسعه روش اجزای محدود به حساب می‌آید.

- ۱۹۶۰ ..... Clough : وی توانست با استفاده از المانهای مثلثی تحلیل یک بال سازه‌ی هواپیما را در شرایط تنش صفحه‌ای انجام دهد.
- دهه ۱۹۷۰ : در این دهه با ورود کامپیوترهای دیجیتال (با پردازنده مرکزی)، ابزار نیرومندی برای محاسبات مورد نیاز در اجزای محدود فراهم گردید و بطور عملی این روش را توسعه داد.
- دهه ۱۹۸۰ : در این دهه زمینه انجام مراحل پیش پردازش و پس پردازش روش اجزای محدود در کامپیوترهای شخصی فراهم شد.
- دهه ۱۹۹۰ : در این دهه تحلیل سازه‌های بزرگ به کمک روش اجزای محدود انجام گرفت.



# تاریخچه روش اجزای محدود

درجات آزادی در روش اجزای محدود:

دهه ۱۹۵۰: تحلیل تا ۱۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۶۰: تحلیل تا ۱۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۸۰: تحلیل تا ۱۰۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۹۰: تحلیل تا ۱۰۰۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۲۰۰۰: تحلیل از ۵۰۰۰۰۰ تا چندین میلیون درجه آزادی





# تاریخچه روش اجزای محدود

مقالات منتشر شده در زمینه روش اجزای محدود:

تا ۱۹۶۱: ۱۰ مقاله

تا ۱۹۶۶: ۱۳۴ مقاله

تا ۱۹۷۱: ۸۴۴ مقاله

تا ۱۹۷۶: ۷۰۰۰ مقاله

تا ۱۹۸۶: ۲۰۰۰۰ مقاله

.....



## نرم افزارهای اجزای محدود

Year	Software	Company	Website
1965	ASKA (PERMAS)	IKOSS GmbH, (INTES), Germany	<a href="http://www.intes.de">www.intes.de</a>
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	<a href="http://www.macsch.com">www.macsch.com</a>
1967	ASAS	Atkins Res.&Devel., UK	<a href="http://www.wsasoft.com">www.wsasoft.com</a>
1970	ANSYS	Swanson Anal. Syst., USA	<a href="http://www.ansys.com">www.ansys.com</a>
	SAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	<a href="http://www.eerc.berkeley.edu">www.eerc.berkeley.edu</a>
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	<a href="http://www.adina.com">www.adina.com</a>



## نرم افزارهای اجزای محدود

Year	Software	Company	Website
1976	NISA	Eng. Mech. Res. Corp., USA	<a href="http://www.emrc.com">www.emrc.com</a>
1978	DYNA2D, DYNA3D	Livermore Softw. Tech. Corp., USA	<a href="http://www.lstc.com">www.lstc.com</a>
1979	ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA	<a href="http://www.abaqus.com">www.abaqus.com</a>
1980	LUSAS	FEA Ltd., UK	<a href="http://www.lusas.com">www.lusas.com</a>
1982	COSMOS/M	Structural Res. & Anal. Corp., USA	<a href="http://www.cosmosm.com">www.cosmosm.com</a>
1984	ALGOR	Algor Inc., USA	<a href="http://www.algor.com">www.algor.com</a>



- *ANSYS* (General purpose, PC and workstations)
- *NISA* (PC and workstation)
- *SDRC/I-DEAS* (Complete CAD/CAM/CAE package)
- *NASTRAN* (General purpose FEA on mainframes)
- *ABAQUS* (Nonlinear and dynamic analyses)
- *COSMOS* (General purpose FEA)
- *ALGOR* (PC and workstations)
- *PATRAN* (Pre/Post Processor)
- *HyperMesh* (Pre/Post Processor)
- *Dyna-3D* (Crash/impact analysis)
- .....



## ❖ Static analysis

- Deflection
- Stresses
- Strains
- Forces
- Energies

## ❖ Dynamic analysis

- Frequencies
- Deflection (mode shape)
- Stresses
- Strains
- Forces
- Energies

## ❖ Heat transfer analysis

- Temperature
- Heat fluxes
- Thermal gradients
- Heat flow from  
convection faces

## ❖ Fluid analysis

- Pressures
- Gas temperatures
- Convection coefficients
- Velocities



## ❖ Automotive industry

- Static analyses
- Modal analyses
- Transient dynamics
- Heat transfer
- Mechanisms
- Fracture mechanics
- Metal forming
- Crashworthiness

## ❖ Architectural

- Soil mechanics
- Rock mechanics
- Hydraulics
- Fracture mechanics

## ❖ Aerospace industry

- Static analyses
- Modal analyses
- Aerodynamics
- Transient dynamics
- Heat transfer
- Fracture mechanics
- Creep and plasticity analyses
- Composite materials
- Aeroelasticity
- Metal forming
- Crashworthiness