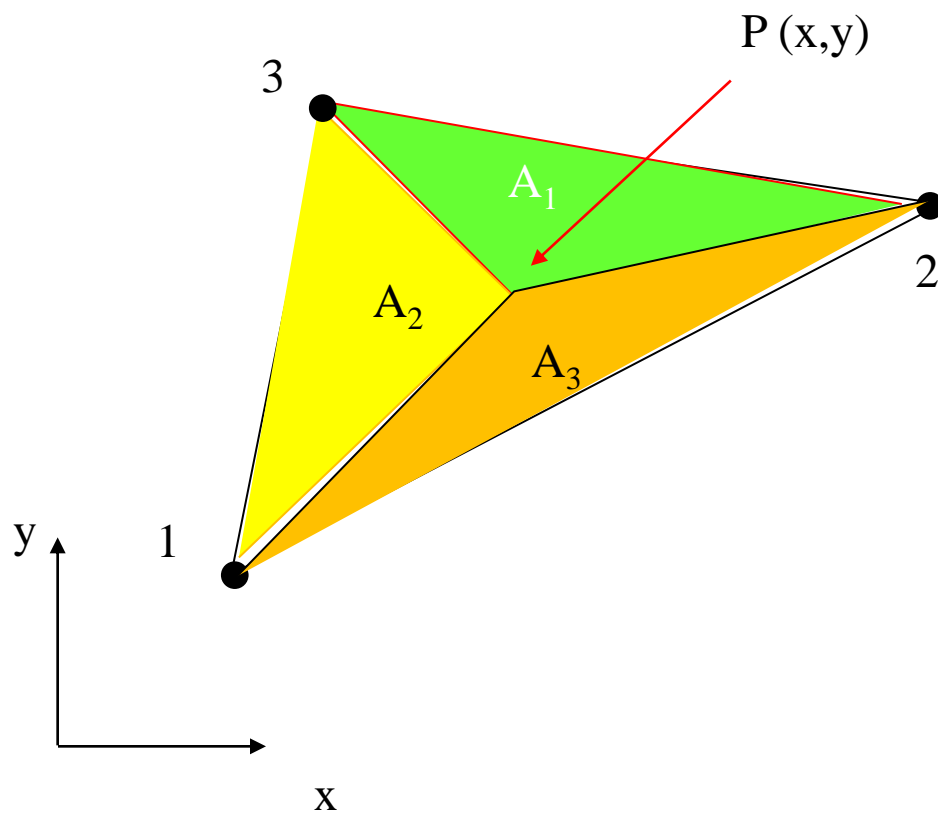


یادآوری: برای توابع شکل در المان مثلثی خطی:

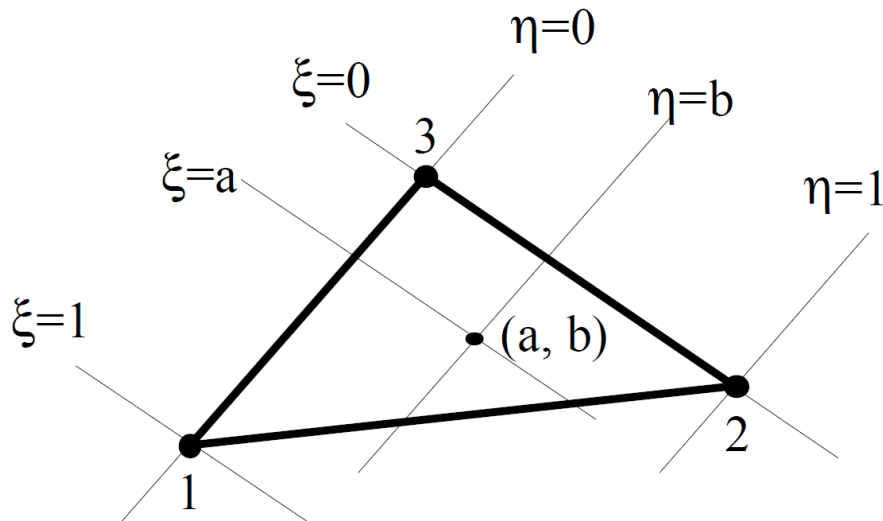
برای هر نقطه از المان:



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$
$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$
$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$

## مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

برای مختصات طبیعی  $(\xi, \eta)$  می توان توابع شکل به صورت زیر تعریف نمود:

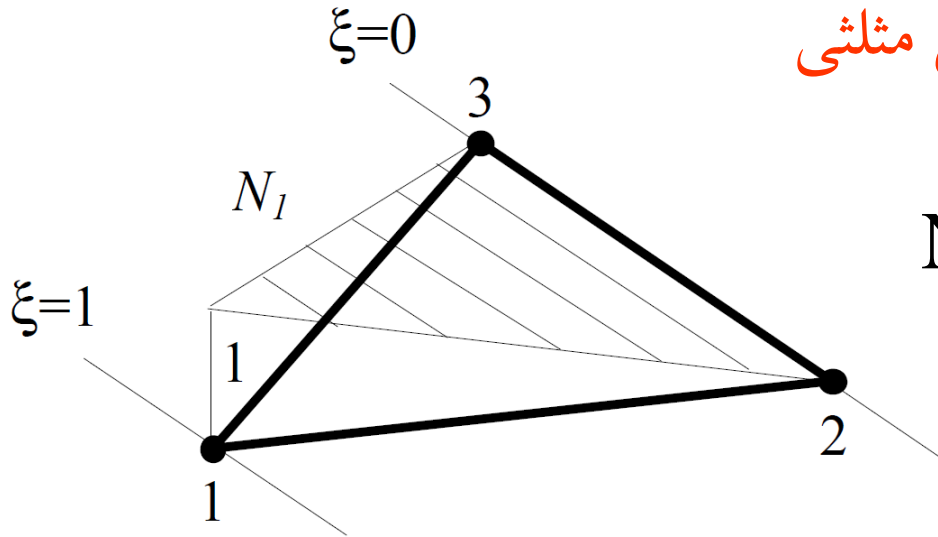


$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

در این صورت:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی



$$N_i = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

در نقطه  $i$ :  
در نقاط دیگر:

تغییر مکان  $(u, v)$  در داخل المان قابل بیان بر حسب  $(\xi, \eta)$  و یا بر حسب  $(x, y)$  است.

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3$$

# المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

در اینجا دو دستگاه مختصات داریم: یکی مختصات طبیعی  $(\xi, \eta)$  که محلی است و دیگری دستگاه سراسری  $(x, y)$ . اگر برای ارتباط بین این دو دستگاه مختصات از توابع شکل تغییر مکان استفاده شود (المان *isoparametric*) می توان نوشت:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

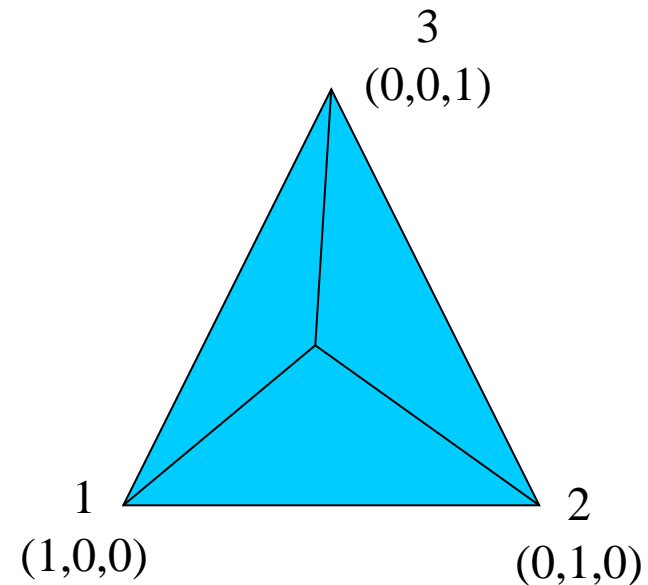
$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3$$

$$N_1 = \xi, N_2 = \eta, N_3 = 1 - \xi - \eta$$

$$(1) \rightarrow N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 0 \quad \uparrow x = x_1, y = y_1$$

$$(2) \rightarrow N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 0 \quad \uparrow x = x_2, y = y_2$$

$$(3) \rightarrow N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 1 \quad \uparrow x = x_3, y = y_3$$



# المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \quad \longrightarrow \quad x = \xi x_1 + \eta x_2 + (1 - \xi - \eta)x_3$$

$$x = \xi(x_1 - x_3) + \eta(x_2 - x_3) + x_3$$

$$x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 \quad \longrightarrow \quad y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \quad \longrightarrow \quad x = 1.5N_1 + 7N_2 + 4N_3$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 \quad \longrightarrow \quad y = 2N_1 + 3.5N_2 + 7N_3$$

مثال:

$$3.85 = 1.5\xi + 7\eta + 4(1 - \xi - \eta)$$

$$4.8 = 2\xi + 3.5\eta + 7(1 - \xi - \eta)$$

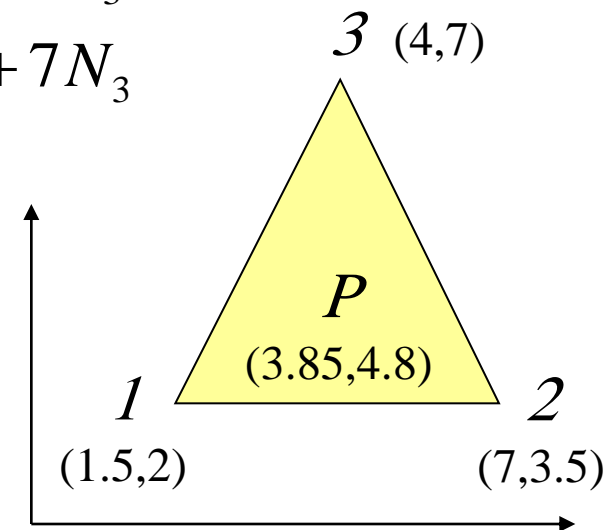
$$\longrightarrow \quad \xi = 0.3$$

$$\longrightarrow \quad \eta = 0.2$$

$$N_1 = 0.3$$

$$N_2 = 0.2$$

$$N_3 = 0.5$$



# المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

❖ محاسبه ماتریس سختی

با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{J}$  ژاکوبین ماتریس انتقال نامیده می‌شود و

برابر است با:

$$x = \xi x_1 + \eta x_2 + (1 - \xi - \eta)x_3$$

$$x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = x_{13}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = x_{23}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = y_{13}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_{23}$$



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & x_{23} \\ y_{13} & y_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} = 2A$$

# المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{Bmatrix} y_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}(u_1 - u_3) - y_{13}(u_2 - u_3) \\ -x_{23}(u_1 - u_3) + x_{13}(u_2 - u_3) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{Bmatrix} y_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}(v_1 - v_3) - y_{13}(v_2 - v_3) \\ -x_{23}(v_1 - v_3) + x_{13}(v_2 - v_3) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}(u_1 - u_3) - y_{13}(u_2 - u_3) \\ -x_{23}(v_1 - v_3) + x_{13}(v_2 - v_3) \\ -x_{23}(u_1 - u_3) + x_{13}(u_2 - u_3) + y_{23}(v_1 - v_3) - y_{13}(v_2 - v_3) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

با مقایسه با  $\varepsilon = \mathbf{D}u = \mathbf{D}N\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$ ؛ می توان ماتریس کرنش-تغییر مکان برابر با:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$





# المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

❖ ماتریس سختی برای المان برابر است با:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B})$$

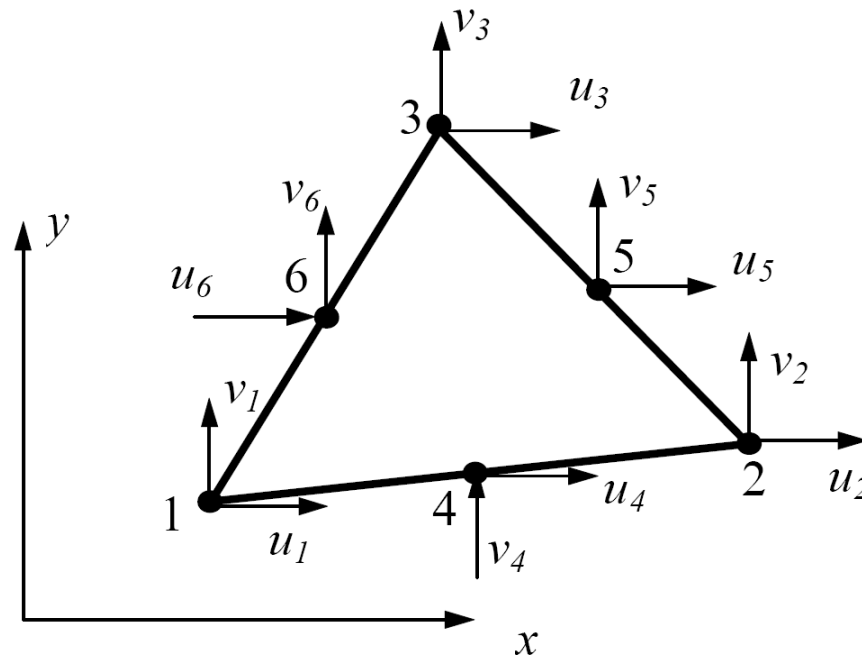
$$\mathbf{k} = \int_A t \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA$$

Murnaghan (1951):  $dA = \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta$

$$\mathbf{k} = \int_0^{+1} \int_0^{+1} t \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta$$

المانهای مورد استفاده در مسایل دو بعدی المانهای مثلثی خطی و درجه دو، و المانهای مربعی خطی و درجه دو هستند.

## *Linear Strain Triangle (LST or T6)*



## *Quadratic Triangular Element*

## المان مثلثی درجه ۲

در این المان شش گره؛ سه گره در رئوس المان و سه گره در وسط هر ضلع وجود دارد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. هر گره دارای دو درجه آزادی (جابجایی در جهت  $X$  و  $Y$ ) است. تغییر مکان در داخل المان به صورت توابع درجه دو بر حسب ( $X$  و  $Y$ ) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2$$

$$v = b_7 + b_8x + b_9y + b_{10}x^2 + b_{11}xy + b_{12}y^2$$

$b_i$  ( $i=1,2,\dots,12$ ) اعداد ثابتی هستند.

$$\varepsilon_x = b_2 + 2b_4x + b_5y$$

مقادیر کرنش خطی حاصل می‌شود و نتایج بهتری

$$\varepsilon_y = b_9 + b_{11}x + 2b_{12}y$$

در مقایسه با المان خطی مورد انتظار است.

$$\gamma_{xy} = (b_3 + b_8) + (b_5 + 2b_{10})x + (2b_6 + b_{11})y$$

در مختصات طبیعی می توان شش تابع تابع شکل برای المان در نظر گرفت:

$$N_1 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_2 = \eta(2\eta - 1)$$

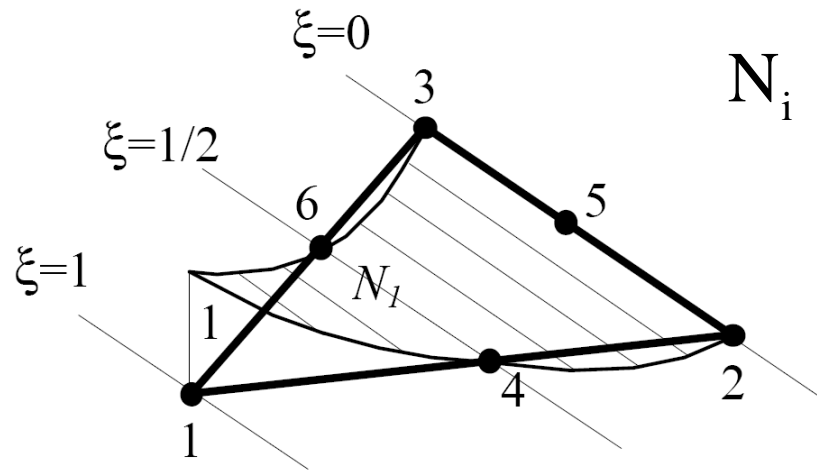
$$N_3 = \zeta(2\zeta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta\zeta$$

$$N_6 = 4\zeta\xi$$

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{در نقطه } i \\ 0, & \text{در نقاط دیگر} \end{cases}$$



*Shape Function  $N_1$  for LST*

$$\zeta = 1 - \xi - \eta$$



## المان مثلثی درجه ۲

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$$

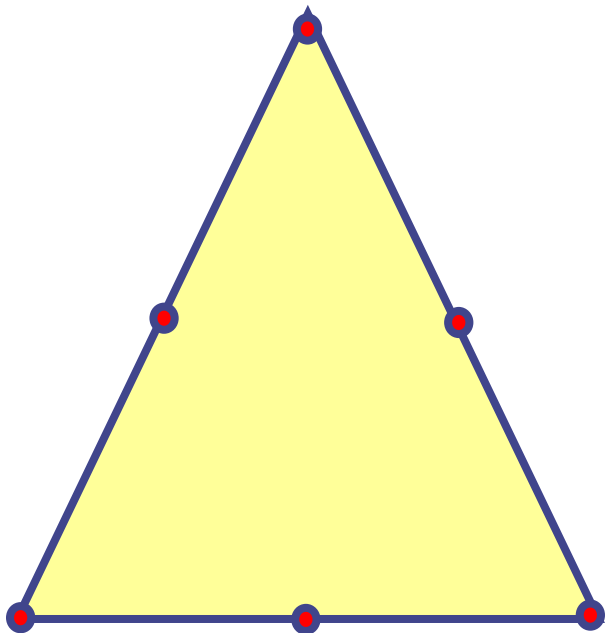
$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$$

تغییر مکان در گره‌ها عبارت است از:

ماتریس سختی المان:

*but here  $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$  is quadratic in  $x$  and  $y$ . In general, the integral has to be computed numerically.*

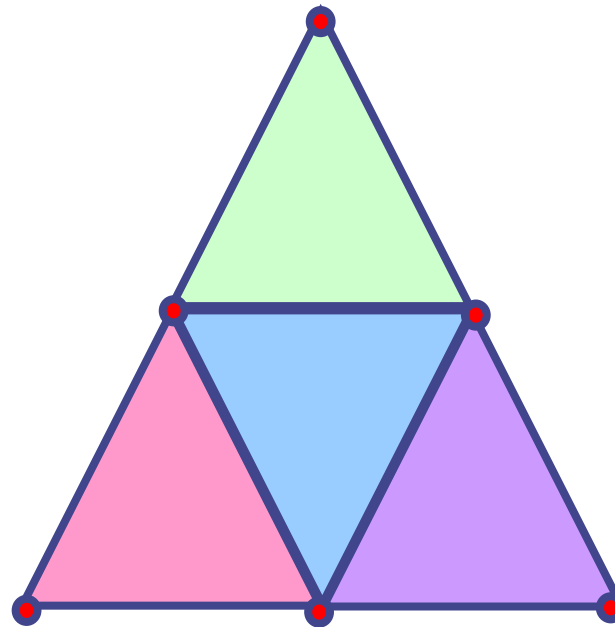
مثال:



1 Linear Strain Triangle

6 Nodes

12 D-O-F



4 Constant Strain Triangles

6 Nodes

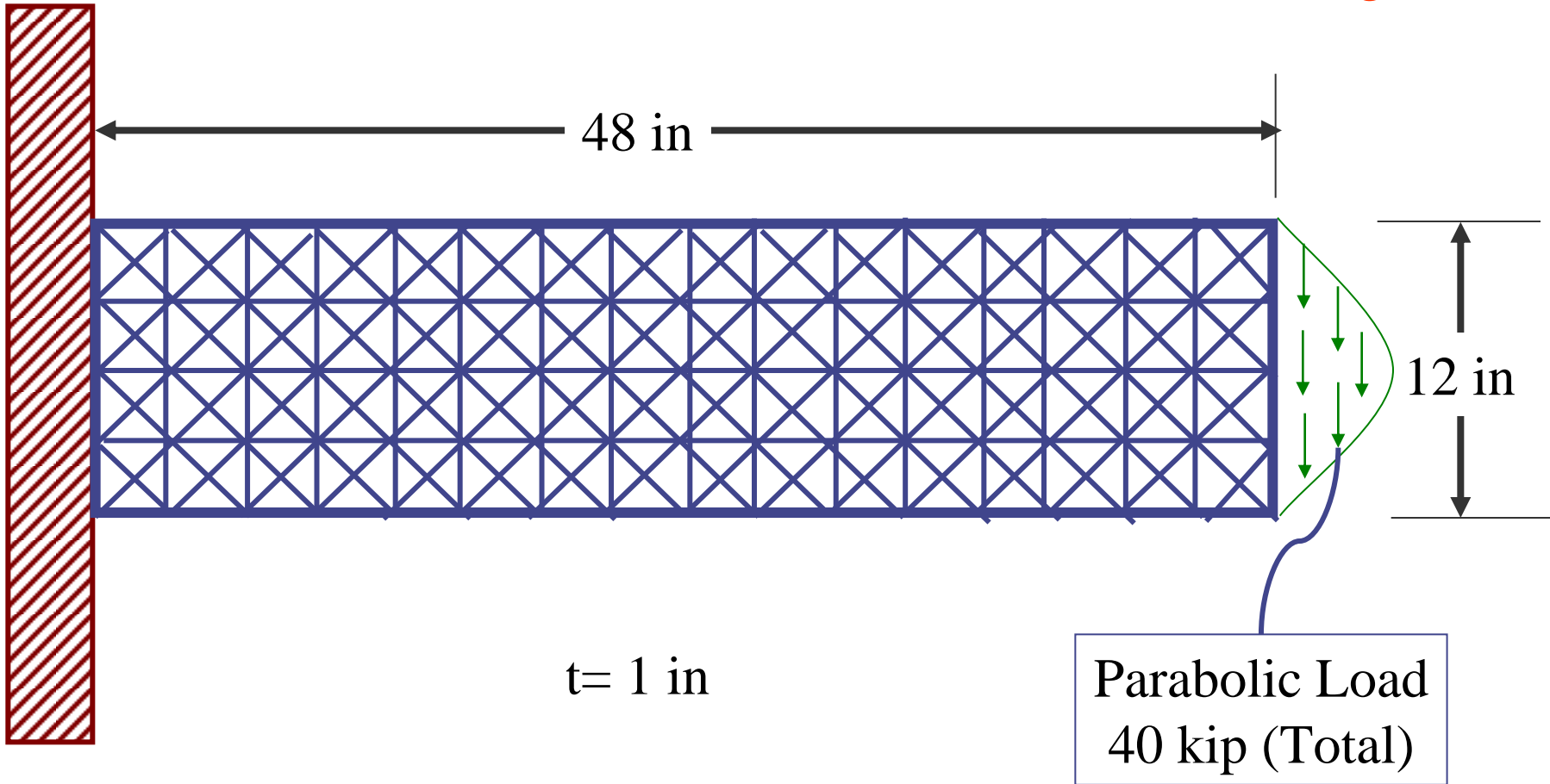
12 D-O-F



# مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:

4 x 16 mesh





# مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:

| Test Run    | # of Nodes | # of D-O-F | # of Elements |
|-------------|------------|------------|---------------|
| 4 x 16 Mesh | 85         | 160        | 128 CST       |
| 8 x 32 Mesh | 297        | 576        | 512 CST       |
| 2 x 8       | 85         | 160        | 32 LST        |
| 4 x 16      | 297        | 576        | 128 LST       |





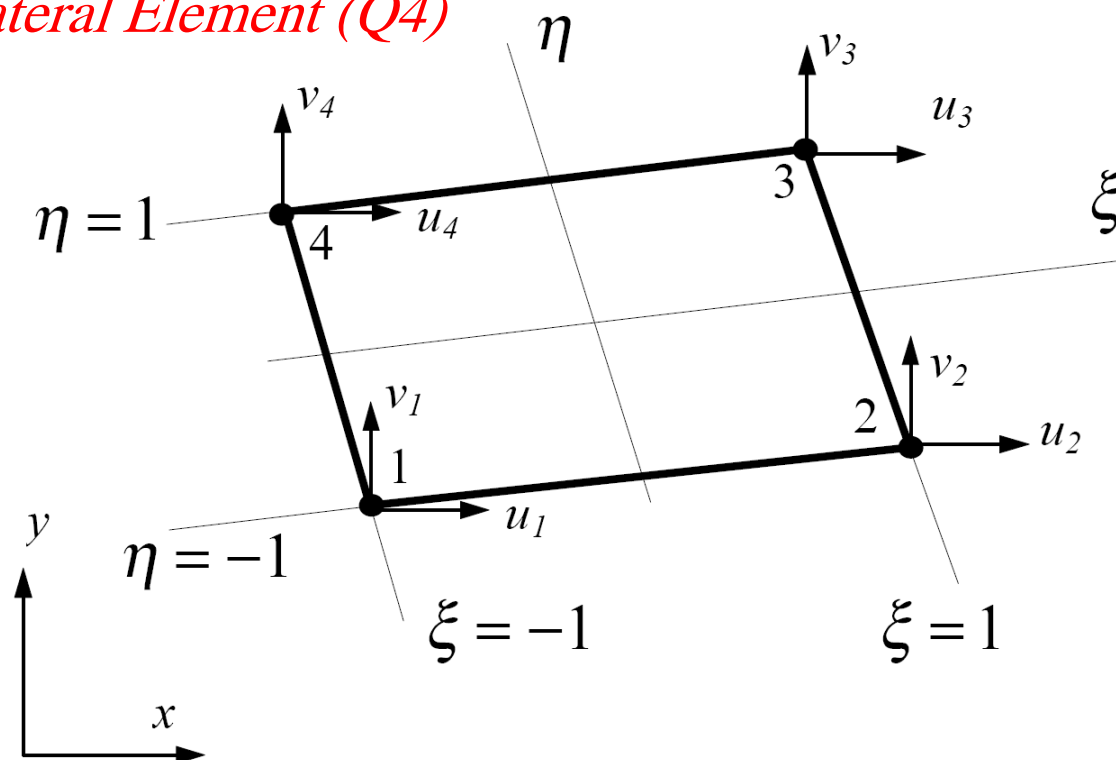
# مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:

| Run            | D-O-F | Tip Deflection (in) | Max Stress (ksi) | x-location | y-location |
|----------------|-------|---------------------|------------------|------------|------------|
| 1              | 160   | -0.29555            | 67.236           | 2.250      | 11.250     |
| 2              | 576   | -0.33850            | 81.302           | 1.125      | 11.630     |
| 3              | 160   | -0.33470            | 58.885           | 4.500      | 10.500     |
| 4              | 576   | -0.35159            | 69.956           | 2.250      | 11.250     |
| Exact Solution |       | -0.36133            | 80.00            | 0          | 12         |

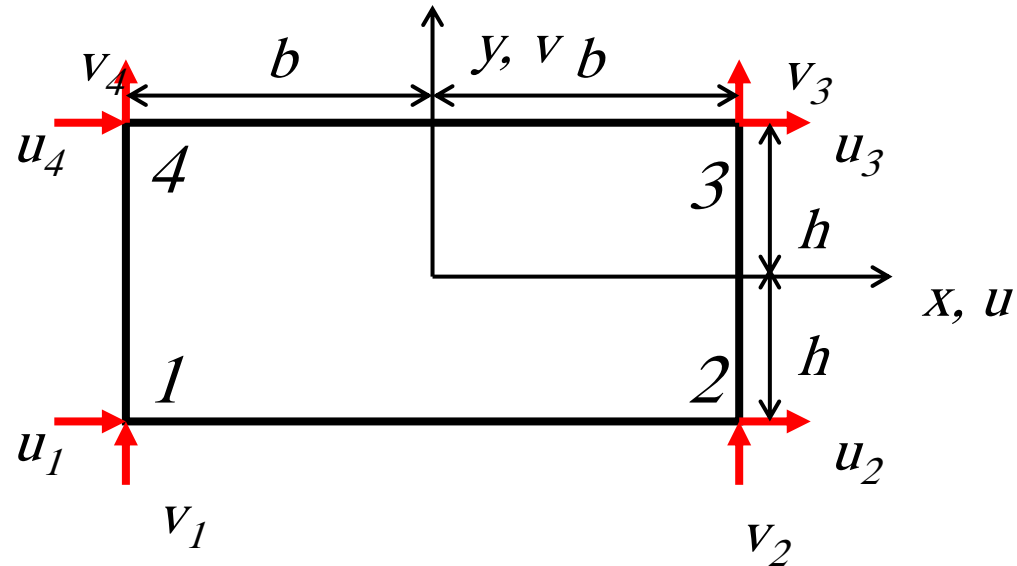
- Non-constant strain matrix
- More accurate representation of stress and strain
- Regular shape makes formulation easy

## Linear Quadrilateral Element (Q4)



$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{displacements at node 1} \\ \text{displacements at node 2} \\ \text{displacements at node 3} \\ \text{displacements at node 4} \end{array} \right.$$

المان مربعی در دستگاه مختصات (x,y)



$$N_1 = \frac{(b-x)(h-y)}{4bh},$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(h+y)}{4bh},$$

$$N_4 = \frac{(b-x)(h+y)}{4bh}$$

توابع شکل در دستگاه مختصات  $(x,y)$

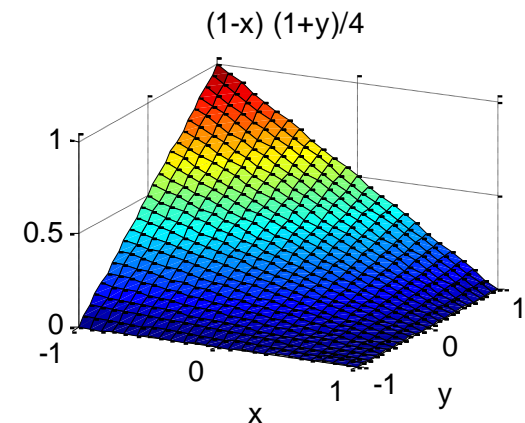
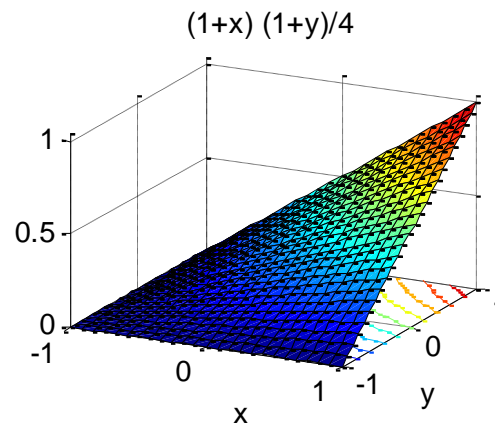
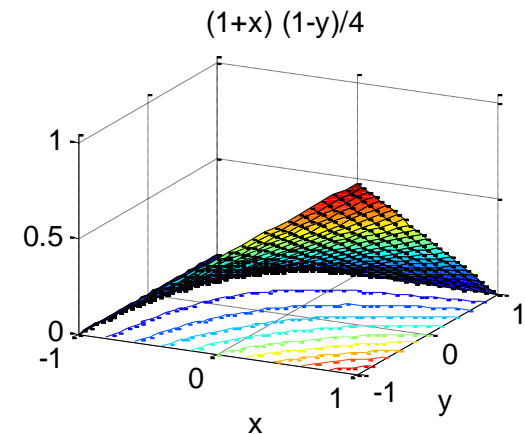
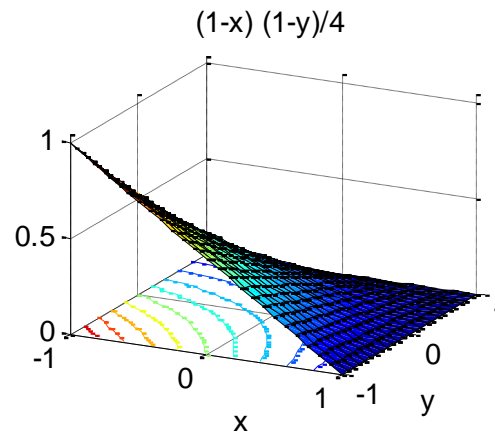
$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$N_1 = \frac{(b-x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(h+y)}{4bh}$$

$$N_4 = \frac{(b-x)(h+y)}{4bh}$$



Interpolation functions ( $b=h=1$ )



# المان مربعی خطی

## تغییر مکان در المان مربعی

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4bh} \left( \begin{aligned} &(b-x)(h-y)u_1 + (b+x)(h-y)u_2 \\ &+ (b+x)(h+y)u_3 + (b-x)(h+y)u_4 \end{aligned} \right)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4bh} \left( \begin{aligned} &(b-x)(h-y)v_1 + (b+x)(h-y)v_2 \\ &+ (b+x)(h+y)v_3 + (b-x)(h+y)v_4 \end{aligned} \right)$$

تغییر مکان در المان مربعی

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Define Strain/Displacement:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd}$$



# المان مربعی خطی

ماتریس سختی المان مربعی در دستگاه مختصات  $(x,y)$

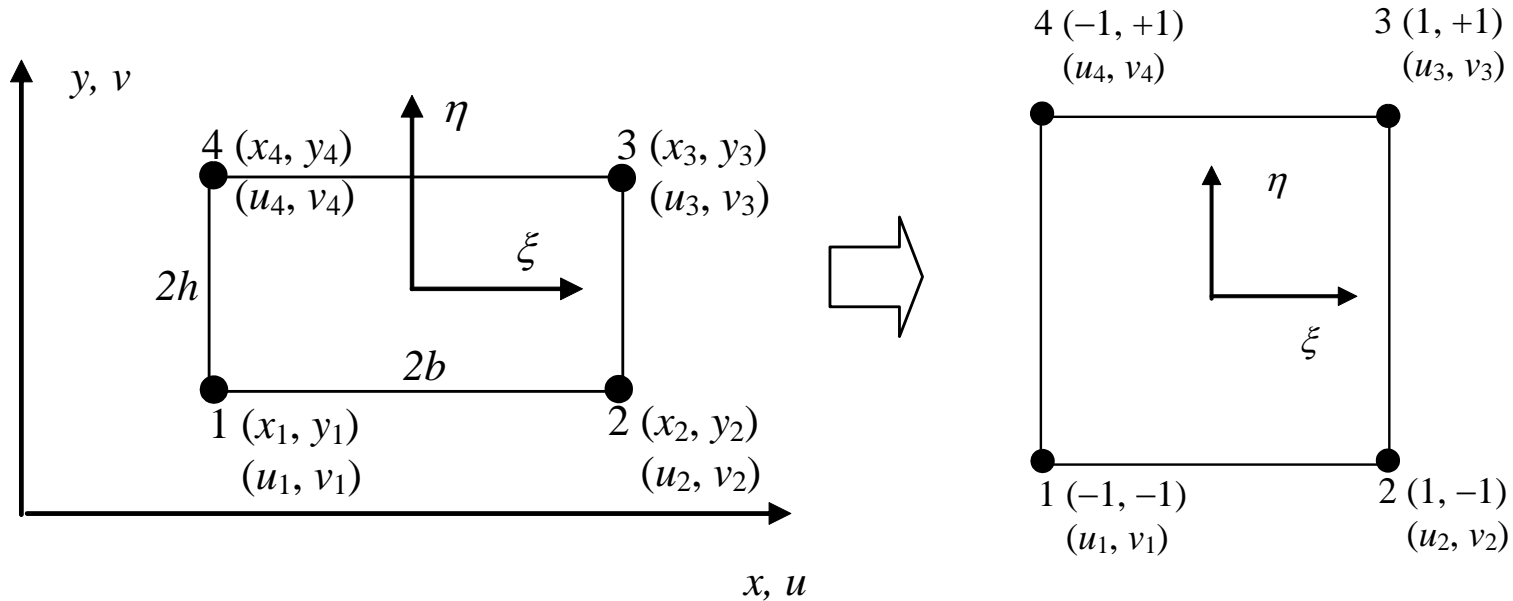
$$\mathbf{B} = \frac{1}{4bh} \begin{bmatrix} -(h-y) & 0 & (h-y) & 0 & (h+y) & 0 & -(h+y) & 0 \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & 0 & (b+x) & 0 & (b-x) \\ -(b-x) & -(h-y) & -(b+x) & (h-y) & (b+x) & (h+y) & (b-x) & -(h+y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} t dx dy$$

$$\mathbf{f} = \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dv + \iint_S \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS$$

# المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

## توابع شکل المان مربعی در دستگاه مختصات طبیعی



$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{d} \quad \text{where} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Node 1
Node 2
Node 3
Node 4



# المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

توابع شکل المان مربعی در دستگاه مختصات طبیعی

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)$$

$$N_3 \Big|_{\text{at node 1}} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \Big|_{\substack{\xi=-1 \\ \eta=-1}} = 0$$

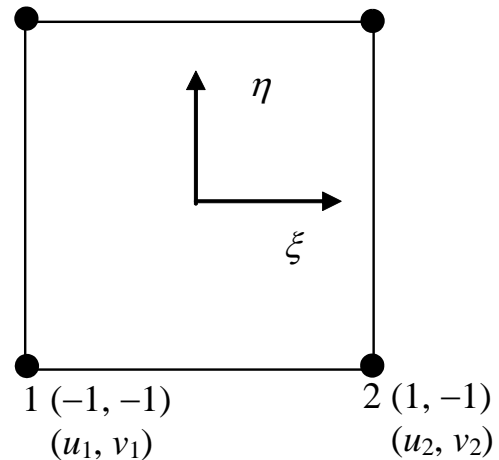
$$N_3 \Big|_{\text{at node 2}} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \Big|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=-1}} = 0$$

$$N_3 \Big|_{\text{at node 3}} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \Big|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=1}} = 1$$

$$N_3 \Big|_{\text{at node 4}} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \Big|_{\substack{\xi=-1 \\ \eta=1}} = 0$$

Delta function property

$$\begin{array}{ll} 4 \ (-1, +1) & 3 \ (1, +1) \\ (u_4, v_4) & (u_3, v_3) \end{array}$$



$$\sum_{i=1}^4 N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$

$$= \frac{1}{4}[(1 - \xi)(1 - \eta) + (1 + \xi)(1 - \eta) + (1 + \xi)(1 + \eta) + (1 - \xi)(1 + \eta)]$$

$$= \frac{1}{4}[2(1 - \xi) + 2(1 + \xi)] = 1$$

Partition of unity

# المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

انتقال از دستگاه مختصات  $(X, Y)$  به دستگاه مختصات طبیعی

- Rectangular elements have limited application
- Quadrilateral elements with unparallel edges are more useful
- Irregular shape requires coordinate mapping before using Gauss integration

