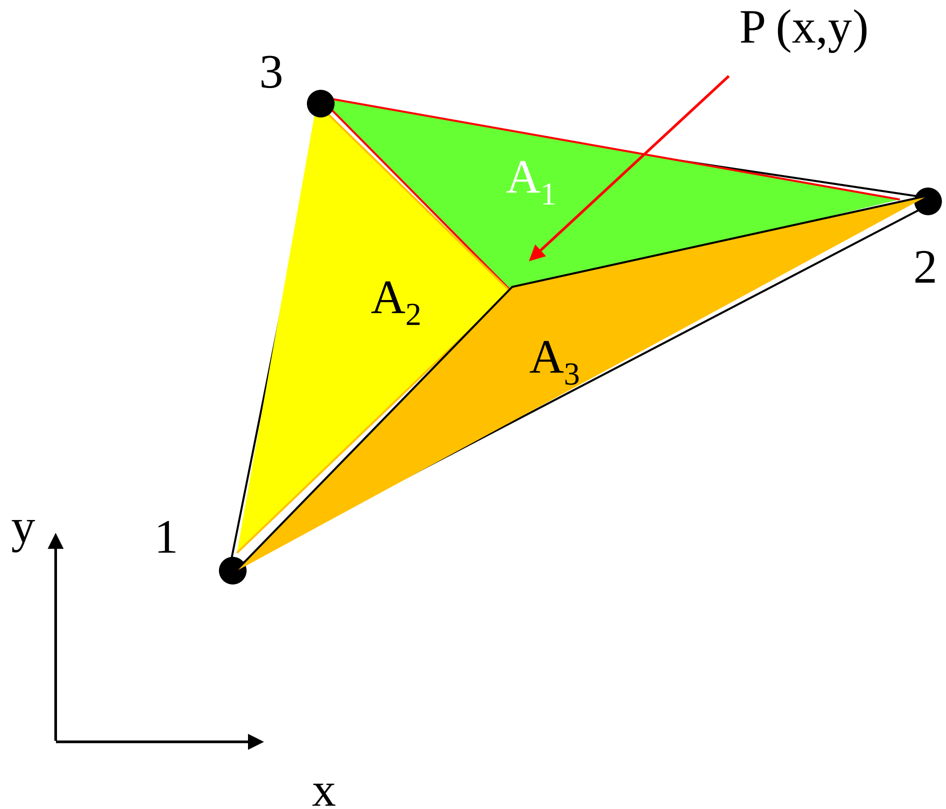
المان مثلثی خطی

یادآوری : برای توابع شکل در المان مثلثی خطی:

برای هر نقطه از المان:



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$

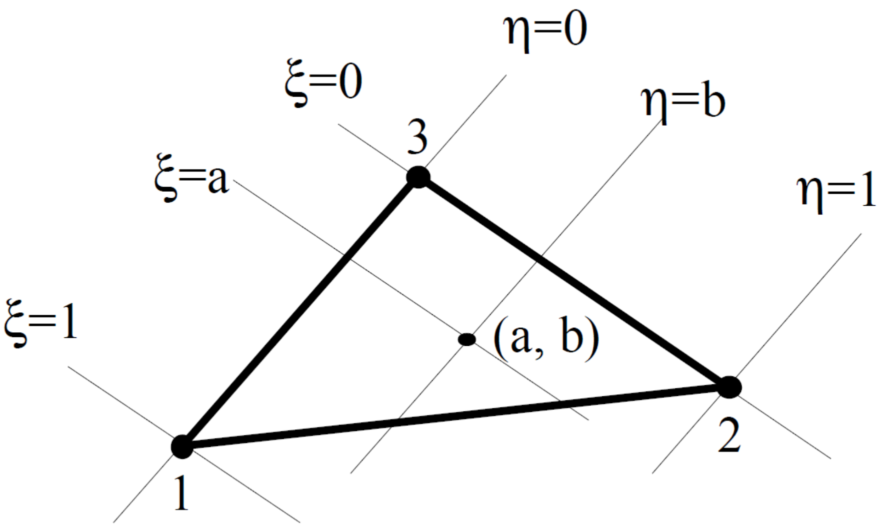
$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$

المان مثلثی خطی

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی

برای مختصات طبیعی (ξ,η) می‌توان توابع شکل به صورت زیر تعریف نمود:



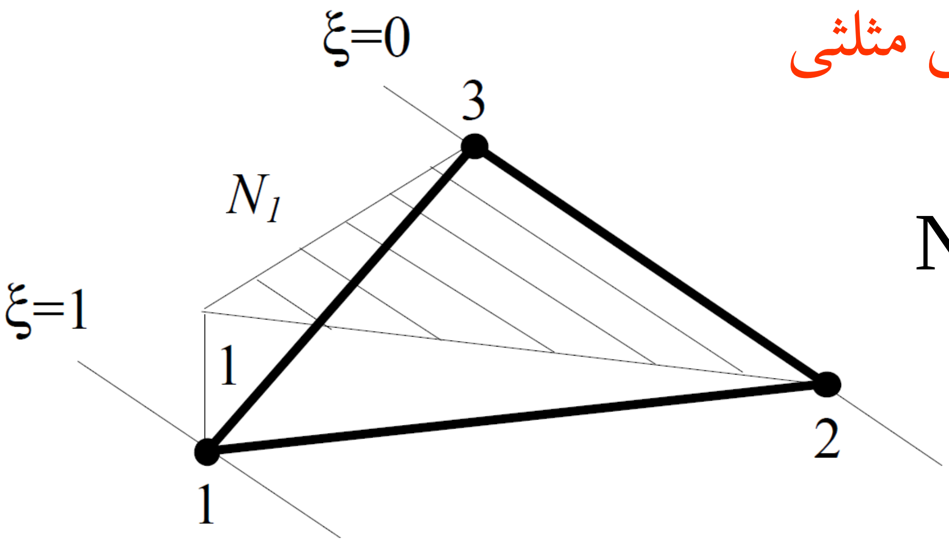
$$N_1=\xi,\quad N_2=\eta,\quad N_3=1-\xi-\eta$$

در این صورت:

$$N_1+N_2+N_3=1$$

المان مثلثی خطی

مختصات طبیعی برای المان خطی مثلثی



$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{در نقطه } i: \\ 0, & \text{در نقاط دیگر:} \end{cases}$$

تغییرمکان (u,v) در داخل المان قابل بیان برحسب (ξ,η)ویا برحسب (x,y)است.

$$u(x,y) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3$$
$$v(x,y) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

در اینجا دو دستگاه مختصات داریم: یکی مختصات طبیعی (ξ,η) که محلی است و دیگری دستگاه سراسری (x,y). اگر برای ارتباط بین این دو دستگاه مختصات از توابع شکل تغییرمکان استفاده شود (المان *isoparametric*) می‌توان نوشت:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3$$

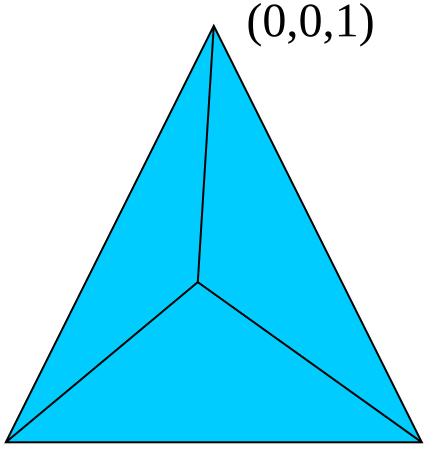
$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3$$

$$N_1 = \xi,\ N_2 = \eta,\ N_3 = 1-\xi-\eta$$

$$(1) \rightarrow N_1 = 1,\ \ N_2 = 0,\ \ N_3 = 0 \quad \nearrow x = x_1, y = y_1$$

$$(2) \rightarrow N_1 = 0,\ \ N_2 = 1,\ \ N_3 = 0 \quad \nearrow x = x_2, y = y_2$$

$$(3) \rightarrow N_1 = 0,\ \ N_2 = 0,\ \ N_3 = 1 \quad \nearrow x = x_3, y = y_3$$



المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad \Rightarrow \quad x = \xi x_1 + \eta x_2 + (1-\xi-\eta) x_3$$

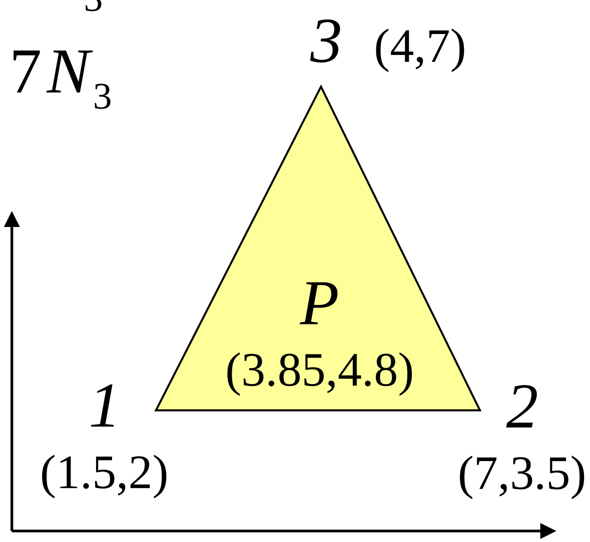
$$x = \xi (x_1 - x_3) + \eta (x_2 - x_3) + x_3$$

$$x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad \Rightarrow \quad y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

مثال:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1.5 N_1 + 7 N_2 + 4 N_3 \\ y &= 2 N_1 + 3.5 N_2 + 7 N_3 \end{aligned}$$



$$3.85 = 1.5\xi + 7\eta + 4(1-\xi-\eta)$$

$$4.8 = 2\xi + 3.5\eta + 7(1-\xi-\eta)$$

$$\Rightarrow \quad \xi = 0.3, \quad \eta = 0.2 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 0.3, \quad N_2 = 0.2, \quad N_3 = 0.5$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

❖ محاسبه ماتریس سختی

با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

J *ژاکوبین ماتریس انتقال* نامیده می‌شود و برابر است با:

$$x = \xi x_1 + \eta x_2 + (1 - \xi - \eta) x_3$$

$$x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = x_{13}, \; \frac{\partial x}{\partial \eta} = x_{23}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = y_{13}, \; \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_{23}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & x_{23} \\ y_{13} & y_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow [J]^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{J} = x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13} = 2A$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}(u_1 - u_3) - y_{13}(u_2 - u_3) \\ -x_{23}(u_1 - u_3) + x_{13}(u_2 - u_3) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} - y_{13}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} + x_{13}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{Bmatrix} y_{23}(v_1 - v_3) - y_{13}(v_2 - v_3) \\ -x_{23}(v_1 - v_3) + x_{13}(v_2 - v_3) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{Bmatrix} y_{23}(u_1 - u_3) - y_{13}(u_2 - u_3) \\ -x_{23}(v_1 - v_3) + x_{13}(v_2 - v_3) \\ -x_{23}(u_1 - u_3) + x_{13}(u_2 - u_3) + y_{23}(v_1 - v_3) - y_{13}(v_2 - v_3) \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی خطی

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

با مقایسه با $\mathbf{Bd} = \mathbf{DNd} = \mathbf{Du} = \varepsilon$؛ می‌توان ماتریس کرنش-تغییرمکان برابر با:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

المان مثلثی خطی (مختصات طبیعی)

❖ ماتریس سختی برای المان برابر است با:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}\, dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}) \qquad \mathbf{k} = \int_A t\, \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{E} \mathbf{B} \mathrm{d}A$$

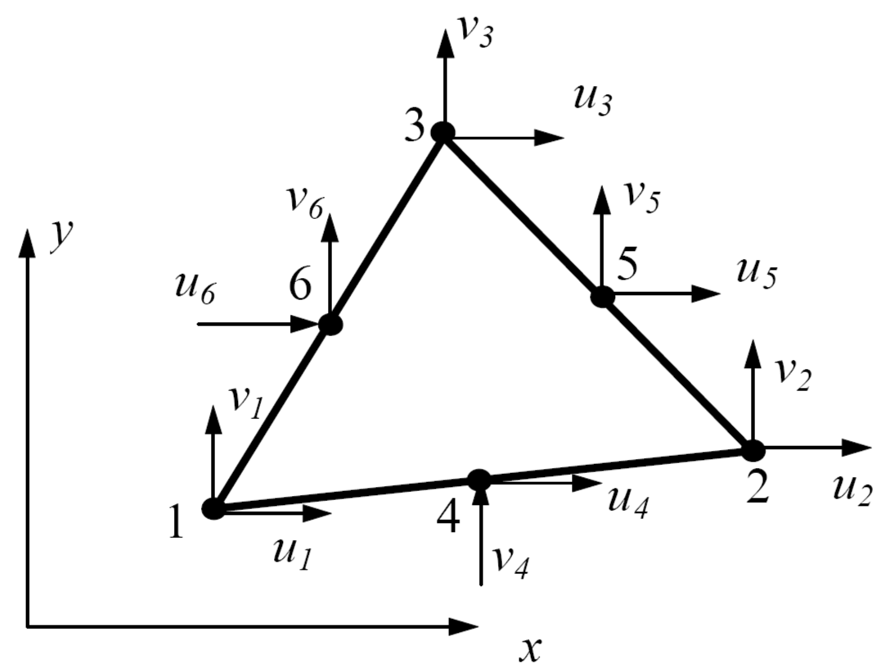
Murnaghan (1951): $\mathrm{d}A = \det\, [\mathbf{J}]\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$

$$\mathbf{k} = \int_0^{+1} \int_0^{+1} t\, \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{E} \mathbf{B} \det [\mathbf{J}] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

المان مثلثی درجه ۲

المانهای مورد استفاده در مسایل دو بعدی المانهای مثلثی خطی و درجه دو، و المانهای مربعی خطی و درجه دو هستند.

Linear Strain Triangle (LST or T6)



Quadratic Triangular Element

المان مثلثی درجه ۲

در این المان شش گره؛ سه گره در رئوس المان و سه گره در وسط هر ضلع وجود دارد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند. هر گره دارای دو درجه آزادی (جابجایی در جهت x و y) است. تغییرمکان در داخل المان به صورت توابع درجه دو بر حسب (x و y) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2$$

$$v = b_7 + b_8 x + b_9 y + b_{10} x^2 + b_{11} xy + b_{12} y^2$$

b_i $(i=1,2,\dots 12)$ اعداد ثابتی هستند.

$$\varepsilon_x = b_2 + 2b_4 x + b_5 y$$

$$\varepsilon_y = b_9 + b_{11} x + 2b_{12} y$$

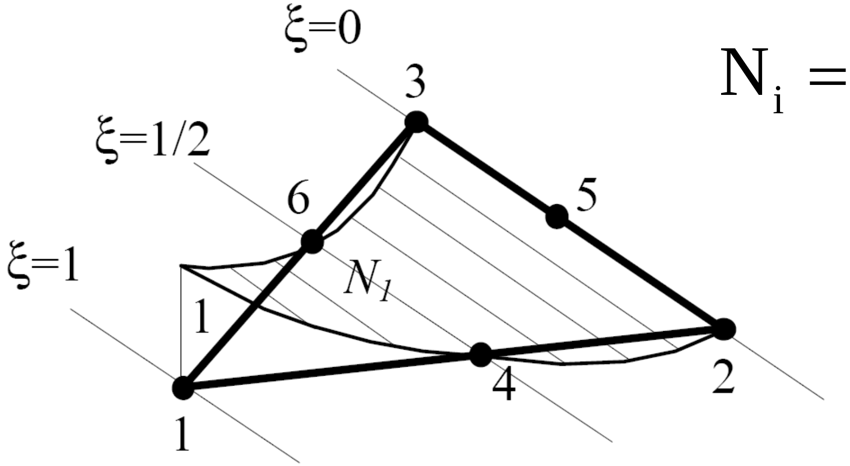
$$\gamma_{xy} = (b_3 + b_8) + (b_5 + 2b_{10})x + (2b_6 + b_{11})y$$

مقادیر کرنش خطی حاصل می‌شود و نتایج بهتری در مقایسه با المان خطی مورد انتظار است.

المان مثلثی درجه ۲

در مختصات طبیعی می‌توان شش تابع شکل برای المان در نظر گرفت:

$$N_1 = \xi(2\xi - 1)$$
$$N_2 = \eta(2\eta - 1)$$
$$N_3 = \zeta(2\zeta - 1)$$
$$N_4 = 4\xi\eta$$
$$N_5 = 4\eta\zeta$$
$$N_6 = 4\zeta\xi$$



Shape Function N_1 for LST

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{در نقطه } i\text{:} \\ 0, & \text{در نقاط دیگر:} \end{cases}$$

$$\zeta = 1 - \xi - \eta$$

المان مثلثی درجه ۲

تغییرمکان در گره‌ها عبارت است از:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i ,$$

$$v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i$$

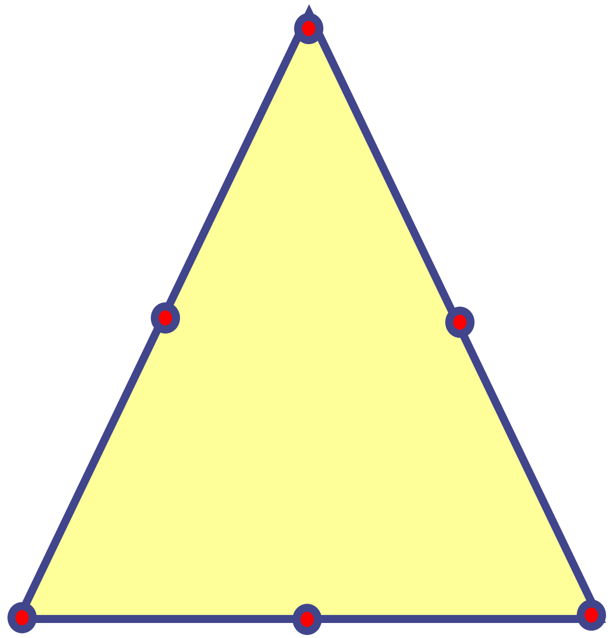
ماتریس سختی المان:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \, dV$$

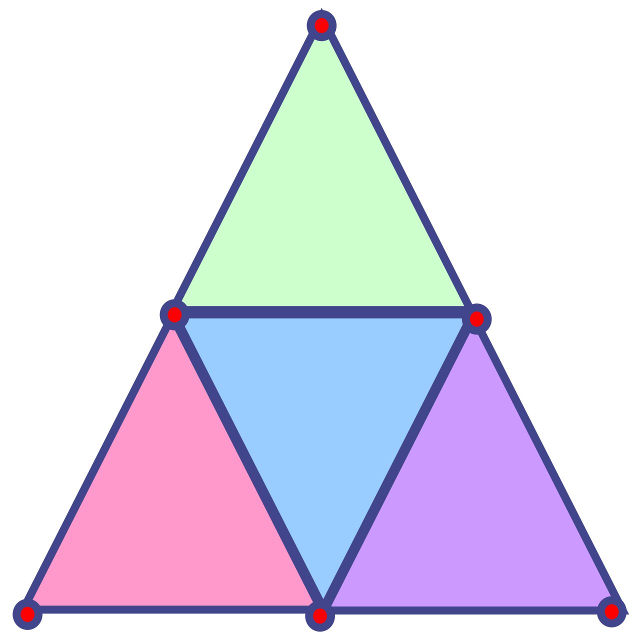
but here $\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}$ *is quadratic in x and y. In general, the integral has to be computed numerically.*

مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:



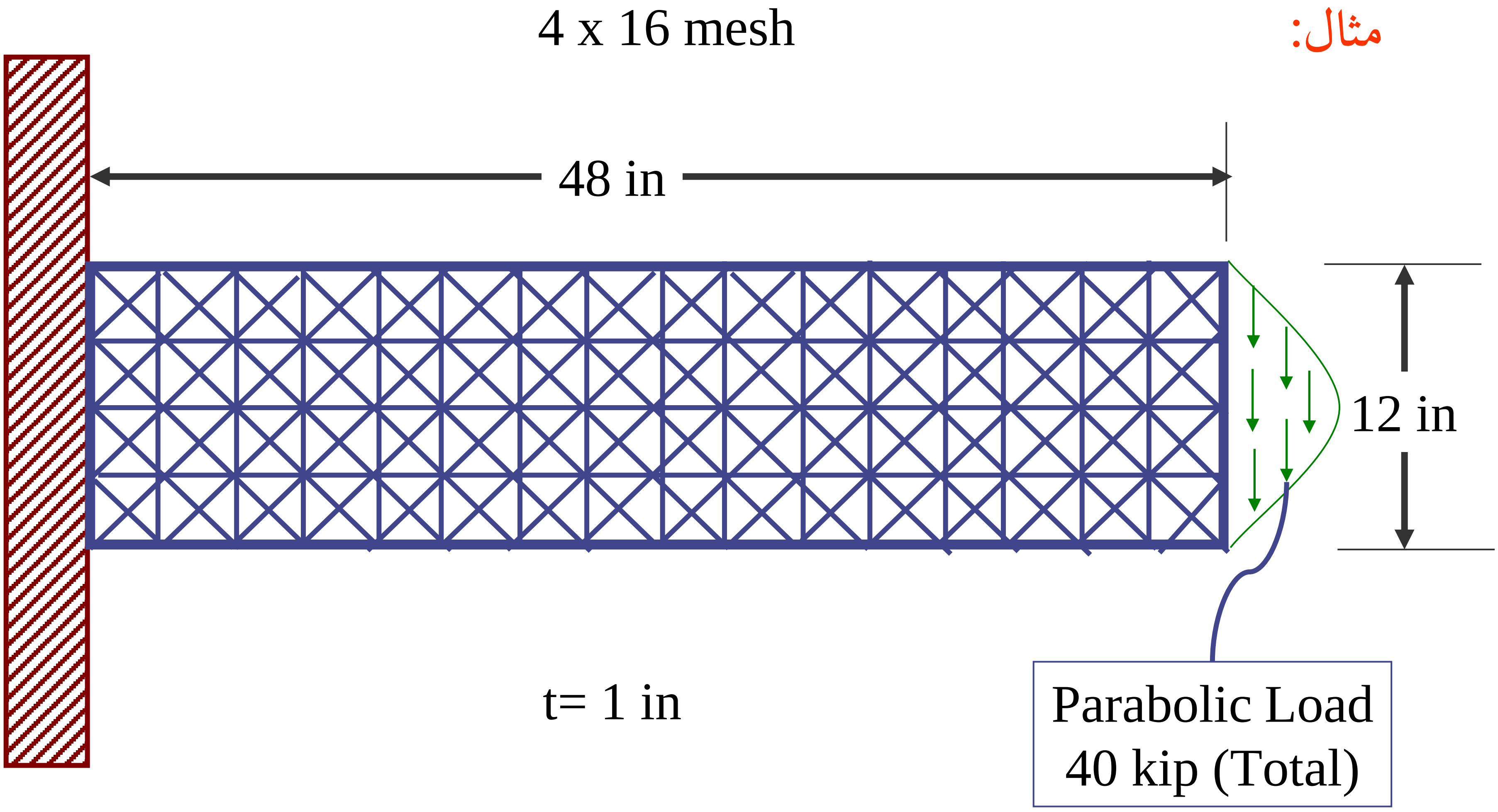
1 Linear Strain Triangle
6 Nodes
12 D-O-F



4 Constant Strain Triangles
6 Nodes
12 D-O-F

مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:



مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:

Test Run	# of Nodes	# of D-O-F	# of Elements
4 x 16 Mesh	85	160	128 CST
8 x 32 Mesh	297	576	512 CST
2 x 8	85	160	32 LST
4 x 16	297	576	128 LST

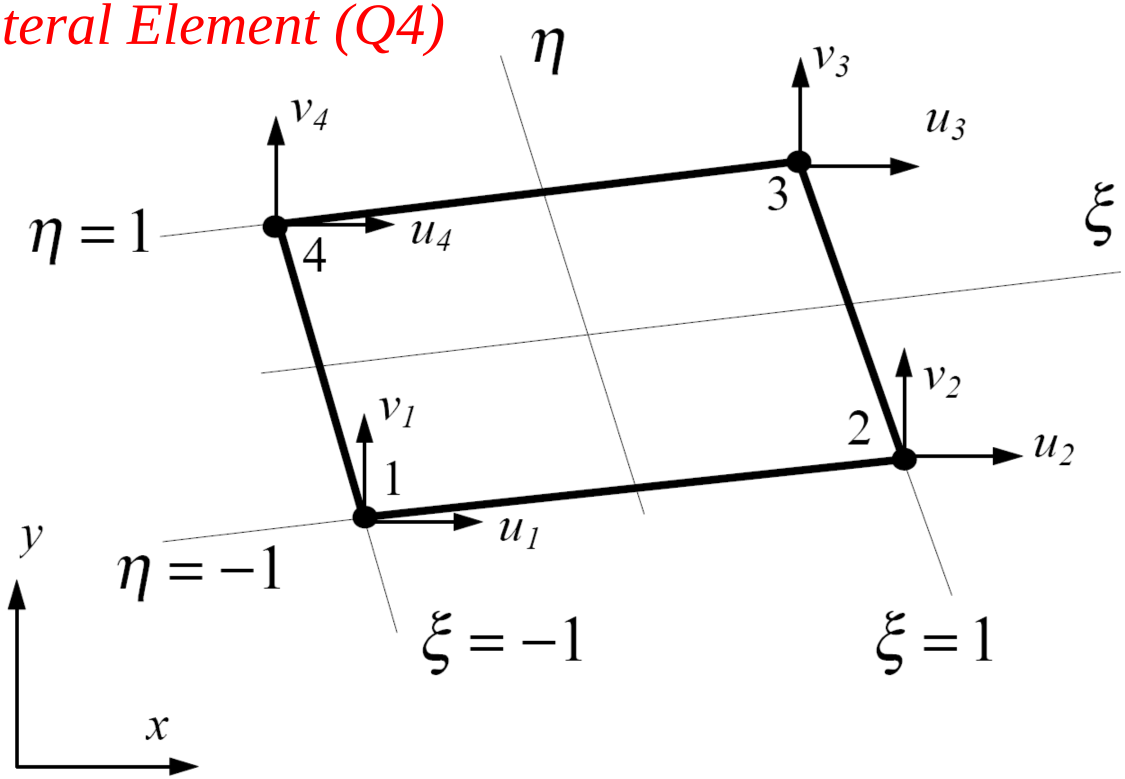
مقایسه المان مثلثی خطی و درجه دو

مثال:

Run	D-O-F	Tip Deflection (in)	Max Stress (ksi)	x-location	y-location
1	160	-0.29555	67.236	2.250	11.250
2	576	-0.33850	81.302	1.125	11.630
3	160	-0.33470	58.885	4.500	10.500
4	576	-0.35159	69.956	2.250	11.250
Exact Solution		-0.36133	80.00	0	12

- Non-constant strain matrix
- More accurate representation of stress and strain
- Regular shape makes formulation easy

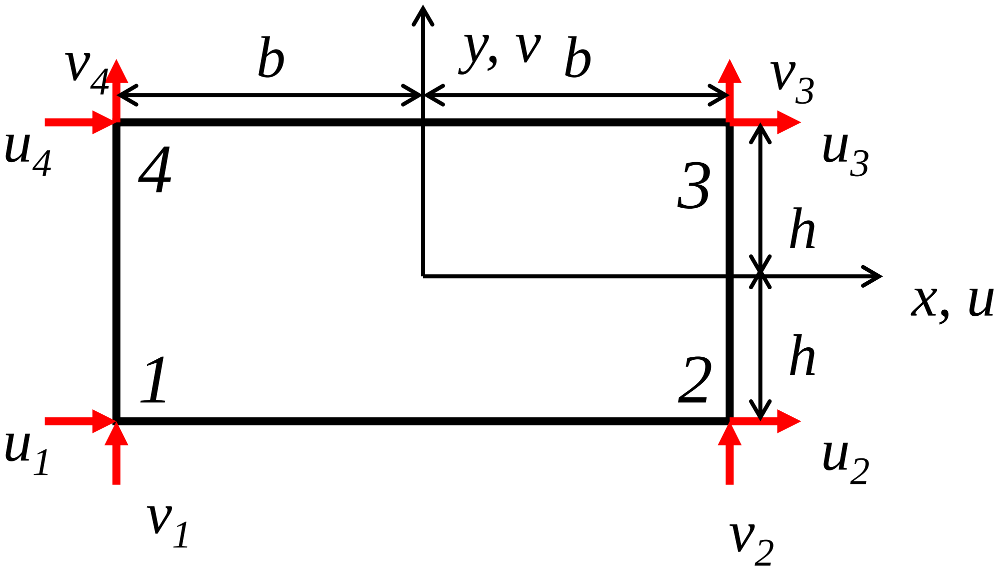
Linear Quadrilateral Element (Q4)



المان مربعی خطی

المان مربعی در دستگاه مختصات (x,y)

$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4 \end{Bmatrix}\quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{displacements at node 1}\\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{displacements at node 2}\\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{displacements at node 3}\\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{displacements at node 4} \end{matrix}$$



$$N_1=\frac{(b-x)(h-y)}{4bh},\qquad N_2=\frac{(b+x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_3=\frac{(b+x)(h+y)}{4bh},\qquad N_4=\frac{(b-x)(h+y)}{4bh}$$

المان مربعی خطی

توابع شکل در دستگاه مختصات (x,y)

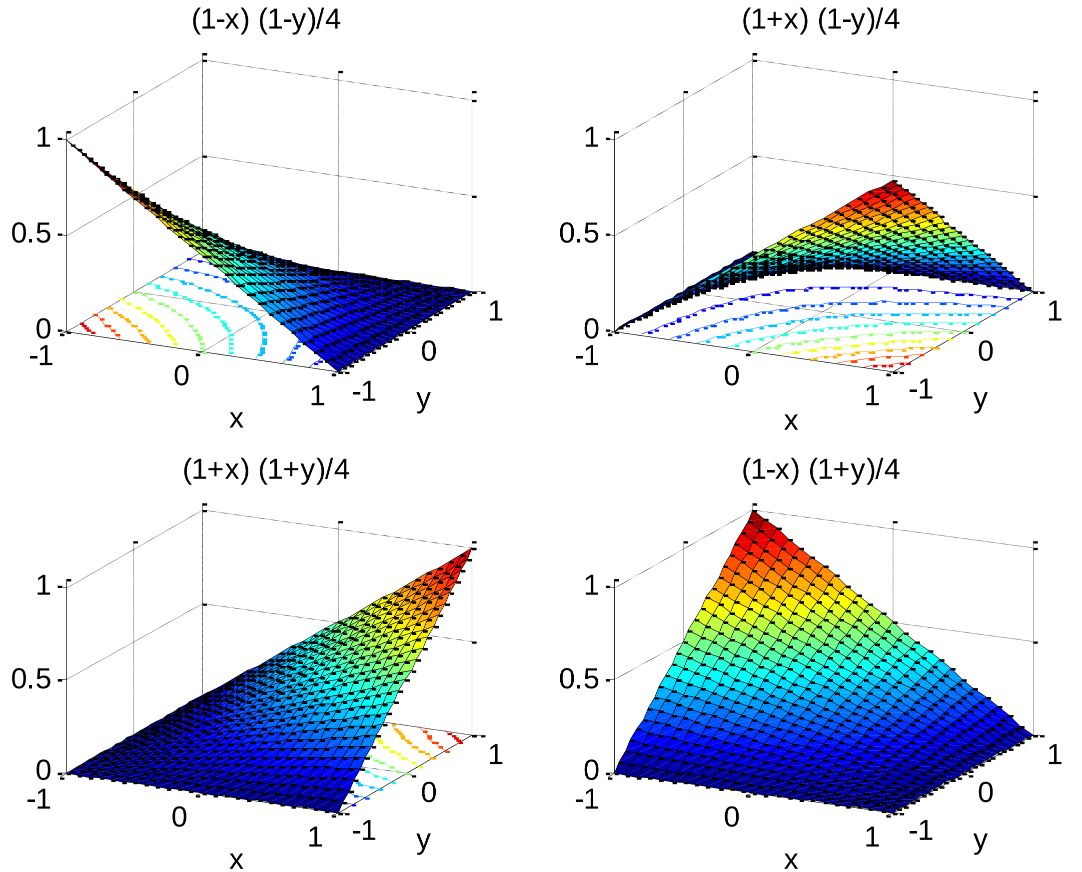
$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

$$N_1 = \frac{(b-x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(h-y)}{4bh}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(h+y)}{4bh}$$

$$N_4 = \frac{(b-x)(h+y)}{4bh}$$



Interpolation functions (*b*=*h*=*1*)

المان مربعی خطی

تغییر مکان در المان مربعی

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$$
$$v(x,y)=a_5+a_6x+a_7y+a_8xy$$

$$u(x,y)=\frac{1}{4bh}\begin{pmatrix}(b-x)(h-y)u_1+(b+x)(h-y)u_2\\ \qquad +(b+x)(h+y)u_3+(b-x)(h+y)u_4\end{pmatrix}$$
$$v(x,y)=\frac{1}{4bh}\begin{pmatrix}(b-x)(h-y)v_1+(b+x)(h-y)v_2\\ \qquad +(b+x)(h+y)v_3+(b-x)(h+y)v_4\end{pmatrix}$$

المان مربعی خطی

تغییر مکان در المان مربعی

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Define Strain/Displacement:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd}$$

المان مربعی خطی

ماتریس سختی المان مربعی در دستگاه مختصات (x,y)

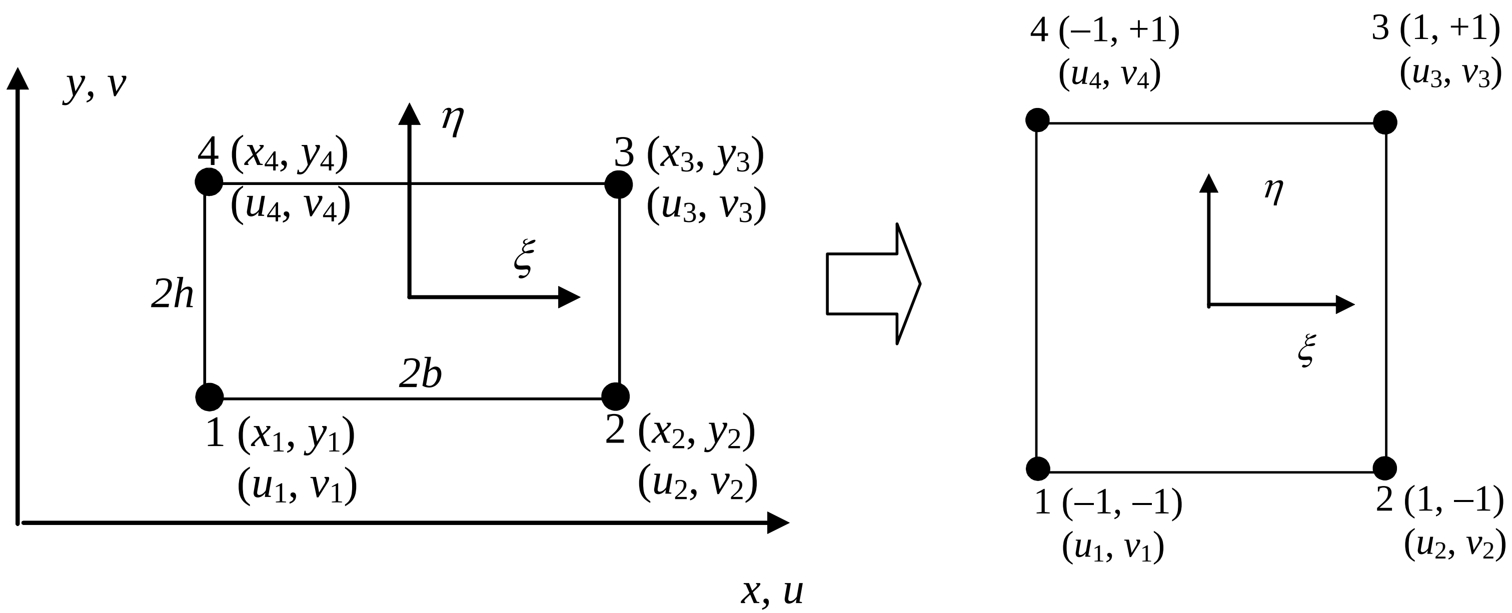
$$\mathbf{B}=\frac{1}{4bh}\begin{bmatrix} -(h-y) & 0 & (h-y) & 0 & (h+y) & 0 & -(h+y) & 0 \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & 0 & (b+x) & 0 & (b-x) \\ -(b-x) & -(h-y) & -(b+x) & (h-y) & (b+x) & (h+y) & (b-x) & -(h+y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}=\int_{-h}^{h}\int_{-b}^{b}\mathbf{B}^{T}\mathbf{E}\mathbf{B}t\,dx\,dy$$

$$\mathbf{f}=\iiint_{V}\mathbf{N}^{T}\mathbf{X}\;dv+\iint_{S}\mathbf{N}^{T}\mathbf{T}\,dS$$

المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

توابع شکل المان مربعی در دستگاه مختصات طبیعی



$$\mathbf{u}(x,y)=\mathbf{N}(x,y)\mathbf{d}$$

where

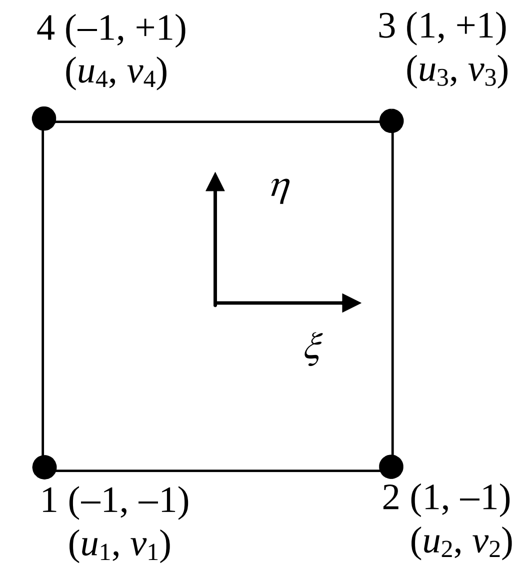
$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}N_1 & 0\\ 0 & N_1\end{matrix}}_{\text{Node 1}} & \underbrace{\begin{matrix}N_2 & 0\\ 0 & N_2\end{matrix}}_{\text{Node 2}} & \underbrace{\begin{matrix}N_3 & 0\\ 0 & N_3\end{matrix}}_{\text{Node 3}} & \underbrace{\begin{matrix}N_4 & 0\\ 0 & N_4\end{matrix}}_{\text{Node 4}}\end{bmatrix}$$

المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

توابع شکل المان مربعی در دستگاه مختصات طبیعی

$$N_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_j = \tfrac{1}{4}(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)$$



$$N_3\big|_{\text{at node 1}} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=-1\\ \eta=-1}} = 0$$
$$N_3\big|_{\text{at node 2}} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=1\\ \eta=-1}} = 0$$
$$N_3\big|_{\text{at node 3}} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=1\\ \eta=1}} = 1$$
$$N_3\big|_{\text{at node 4}} = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=-1\\ \eta=1}} = 0$$

Delta function property

$$\sum_{i=1}^{4} N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$
$$= \tfrac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[2(1-\xi) + 2(1+\xi)] = 1$$

Partition of unity

المان مربعی خطی (مختصات طبیعی)

انتقال از دستگاه مختصات (x,y) به دستگاه مختصات طبیعی

- Rectangular elements have limited application
- Quadrilateral elements with unparallel edges are more useful
- Irregular shape requires coordinate mapping before using Gauss integration