دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مکانیک

روش اجزای محدود

مقدمه: روش اجزای محدود

- پیچیدگی هندسی، رفتار پیچیده ماده و شرایط مرزی موجود در مسایل واقعی، رسیدن به حل دقیق را با دشواری روبرو ساخته است.

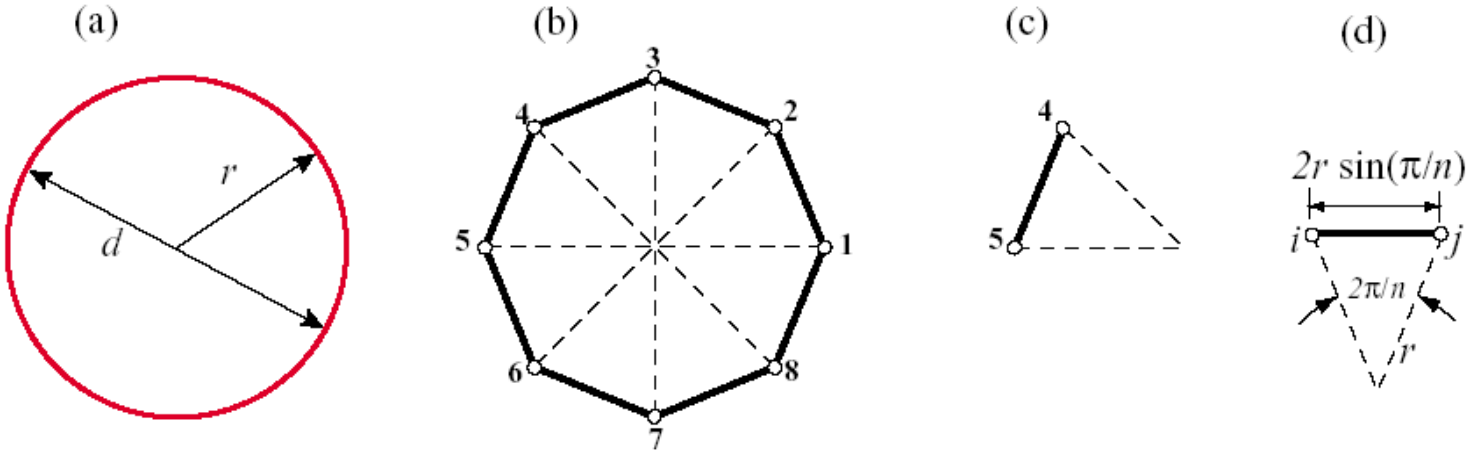
- استفاده از حل‌های تقریبی قابل قبول که در زمان محدود به دست می آید اجتناب ناپذیر است روش اجزای محدود یکی از این انتخاب‌ها است.

- روش اجزای محدود یک روش عددی برای رسیدن به حل تقریبی در بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی است که رفتار حاکم بر آنها توسط یک (و یا یک دستگاه) معادله دیفرانسیل بیان می شود. در این روش از توابع پیوسته چند تکه‌ای و هموار برای تقریب کمیت مجهول مورد نظر سود برده می شود.

مقدمه: روش اجزای محدود

- هدف اصلی در روش اجزای محدود، یافتن حل یک مسئله پیچیده از طریق جایگزینی آن با یک مدل ساده‌تر است. در روش اجزای محدود ناحیه حل به صورت مجموعه‌ای از زیر ناحیه‌های کوچک متصل به هم، به نام المان و یا اجزای محدود در نظر گرفته می‌شود. در ادامه برای هر قطعه یا المان یک حل تقریبی مناسب فرض می‌شود. با سوار نمودن این اجزاء و ... شرایط تعادل کلی سیستم (مانند سازه) استخراج می‌شود. با ارضای این شرایط جواب تقریبی برای کمیت مورد نظر (تغییر مکانها) به دست می‌آید.

مقدمه: روش اجزای محدود



$$S_i = (R\cos\theta_i / 2)(R\sin\theta_i / 2) \qquad S_i = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta_i$$

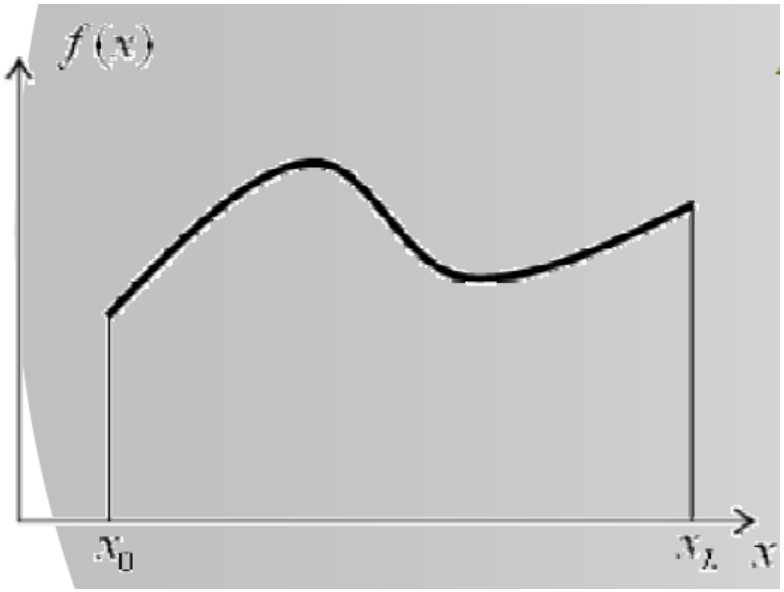
$$S_N = \sum S_i = \frac{1}{2}R^2 N \sin(\frac{2\pi}{N}) \rightarrow \pi R^2 \rightarrow as \quad N \rightarrow \infty$$

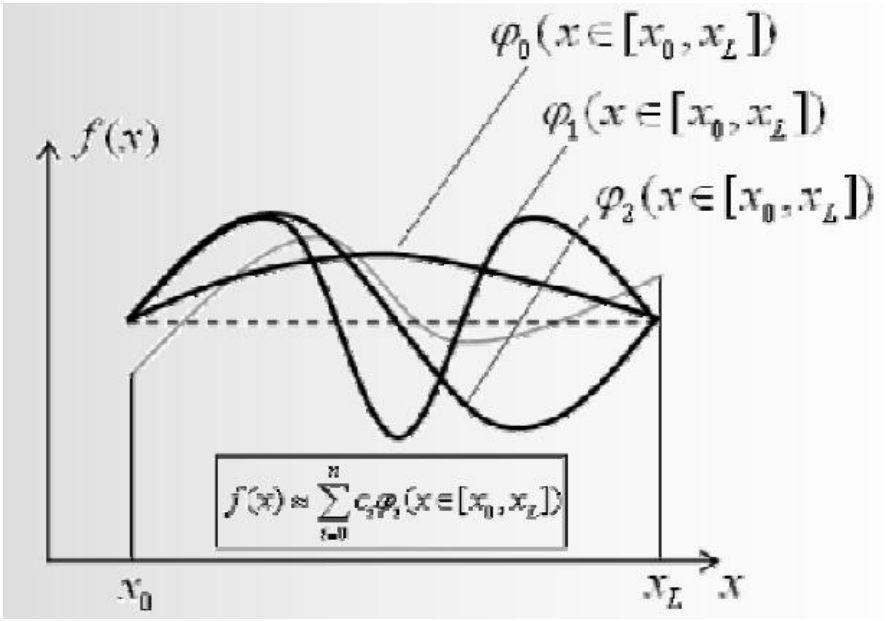
مقدمه: روش اجزای محدود

n	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn-ϵ	Exact π to 16 places
1	0.000000000000000		
2	2.000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

Discretized approximation

➢ تقریب گسسته سازی



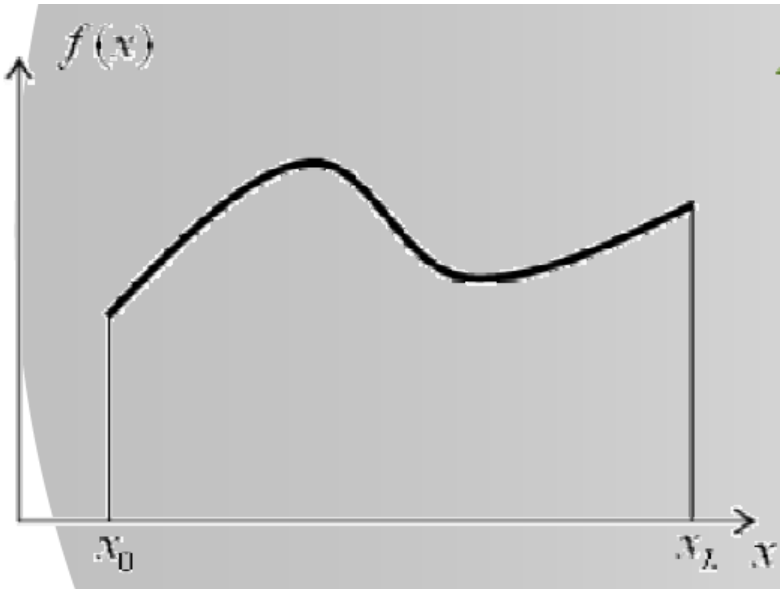


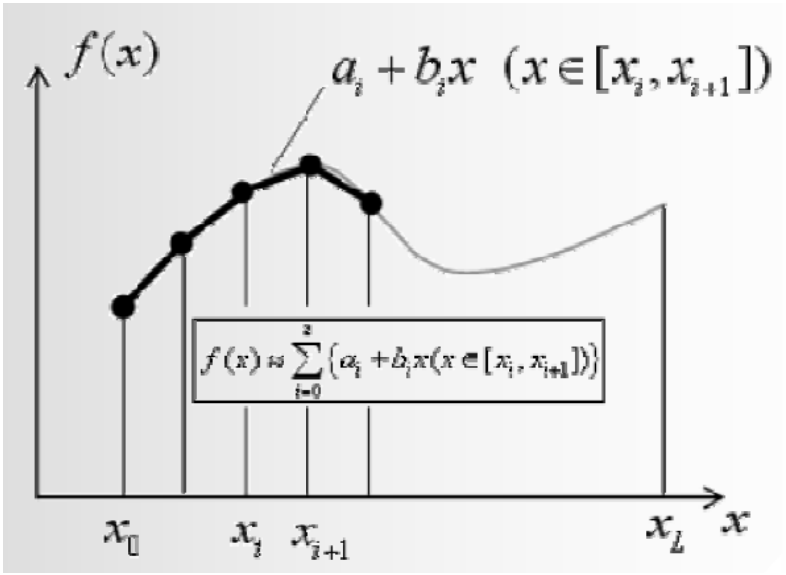
Rayleigh-Ritz principle

- Approximation in the whole domain
- Higher-order continuous function
- Fewer base functions

Discretized approximation

➢ تقریب گسسته سازی



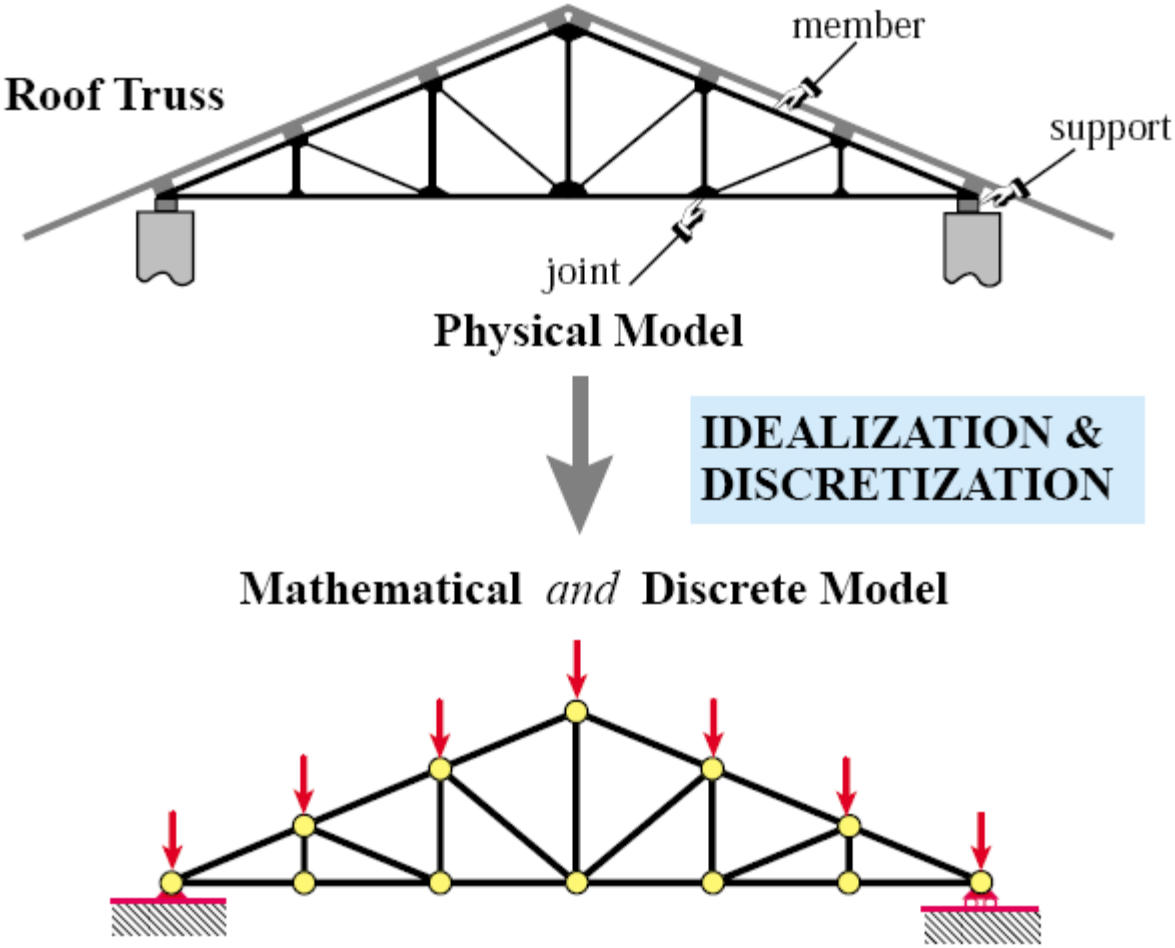


Another method

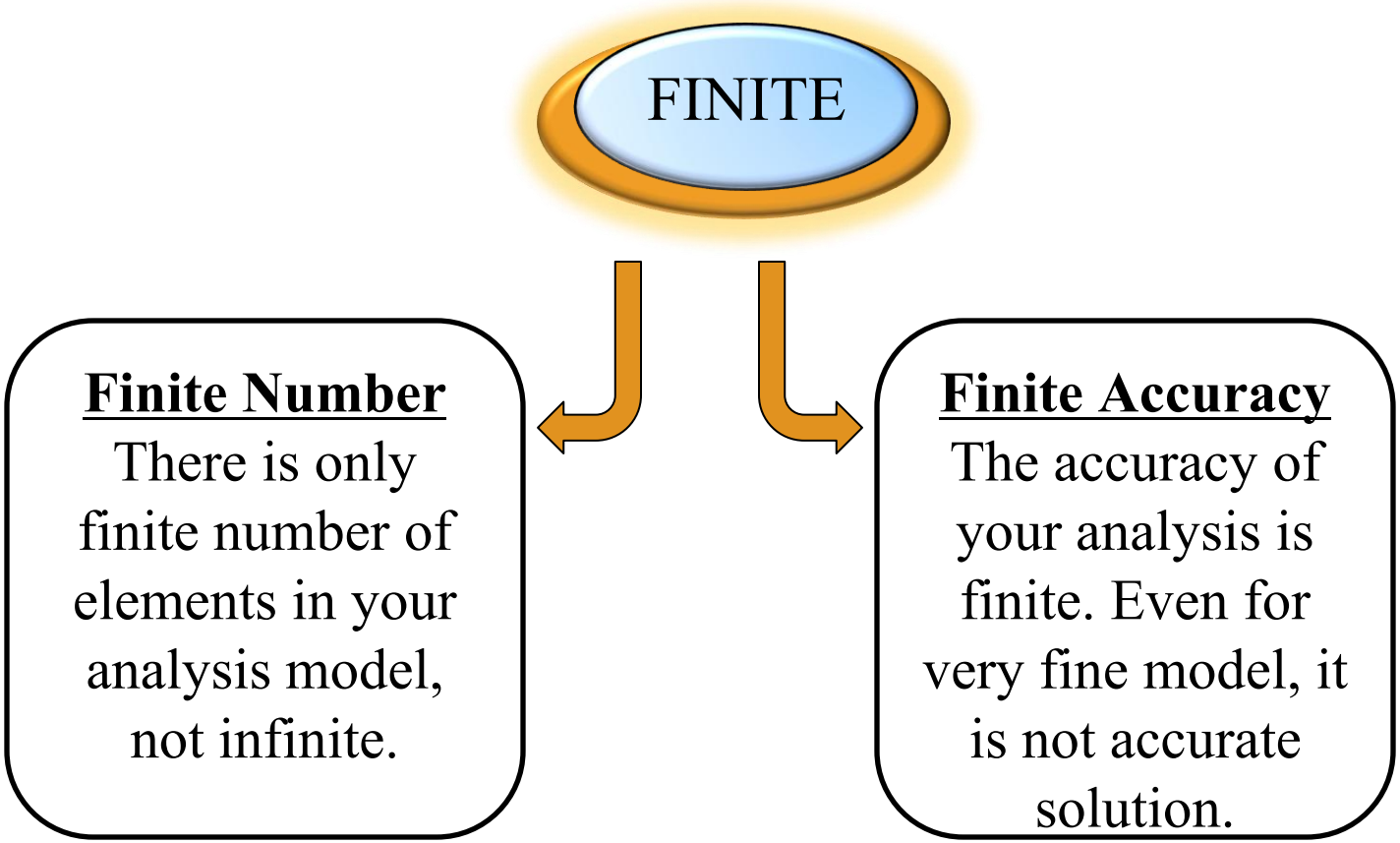
- Pieces function approximation in sub-domain
- Linear or polynomial function
- More base functions

ایده اساسی روش اجزای محدود

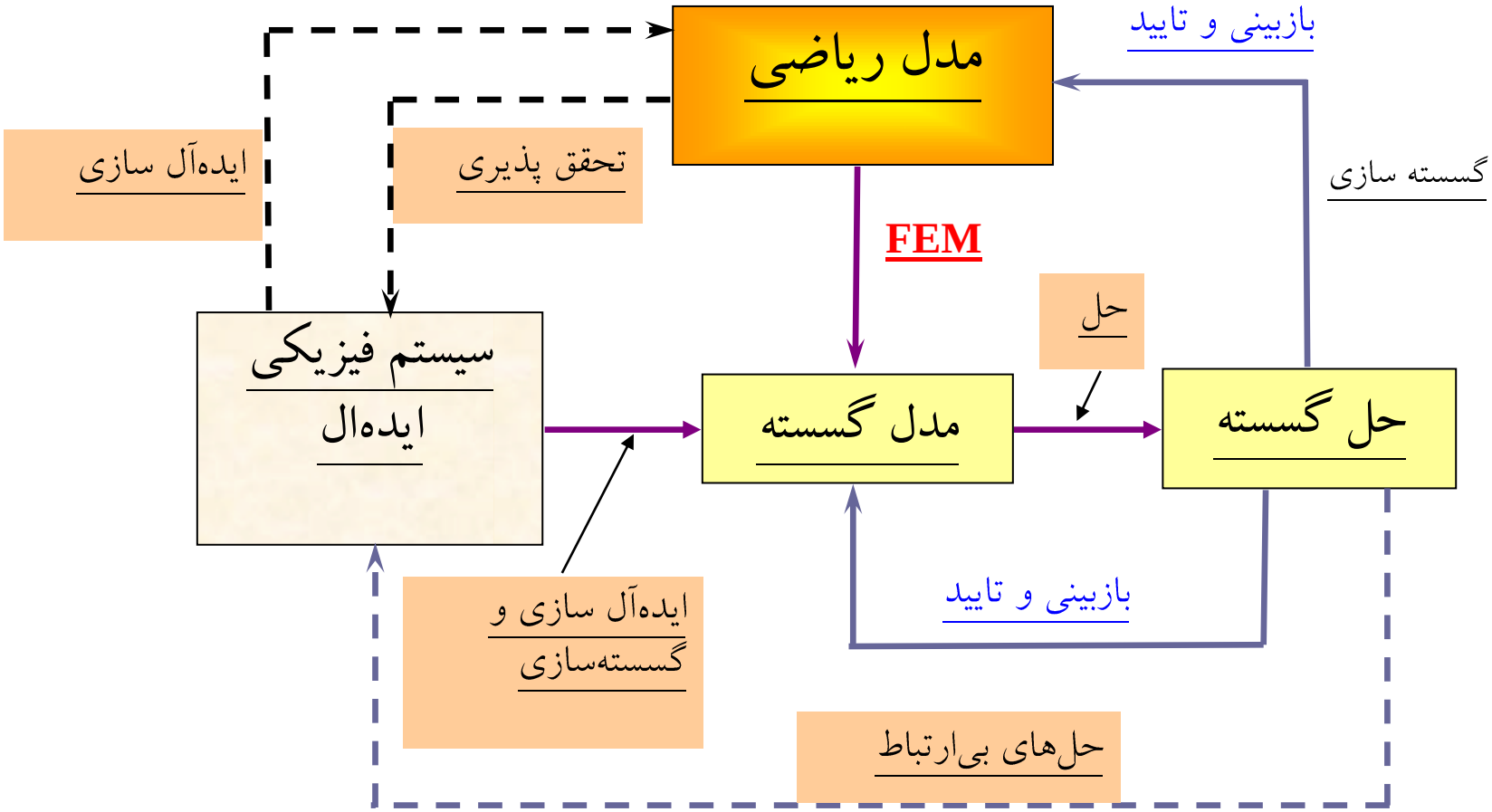
مقدمه: روش اجزای محدود



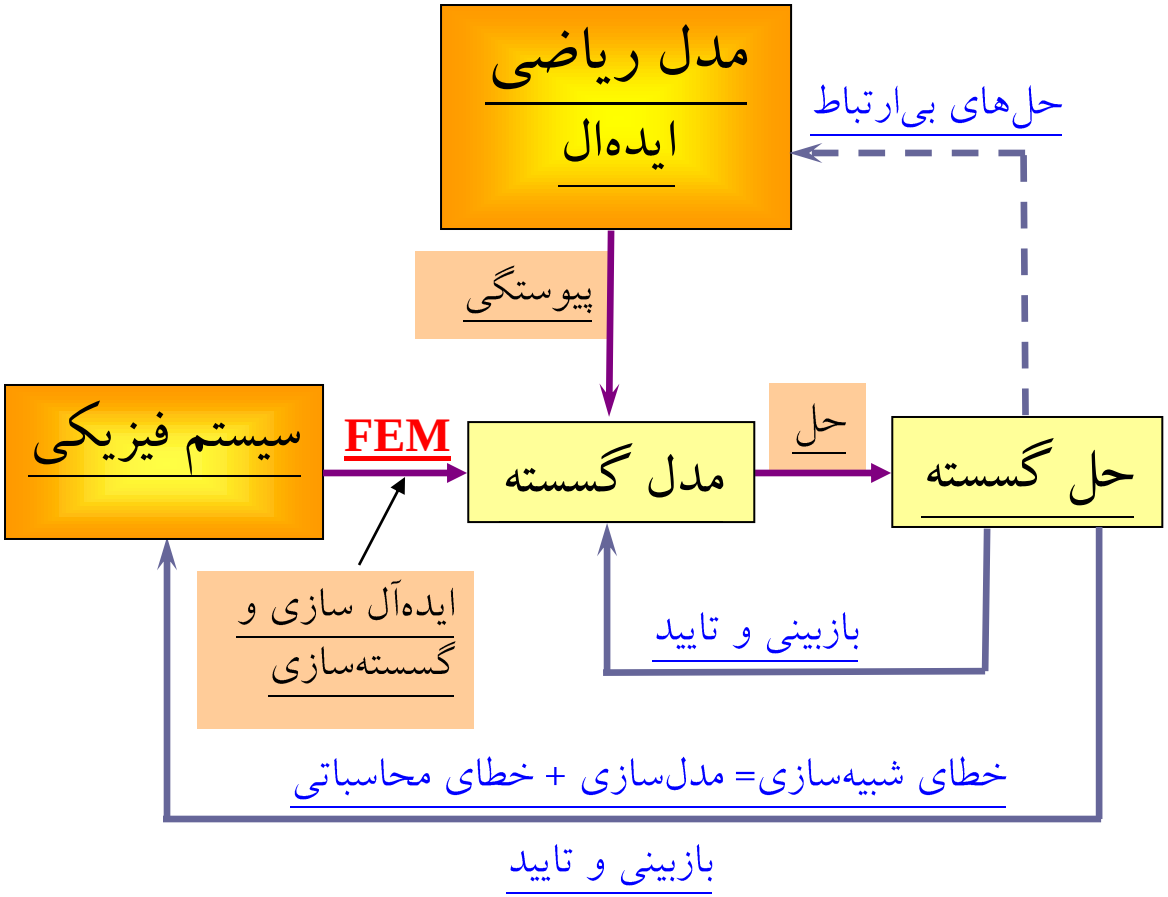
مقدمه: روش اجزای محدود



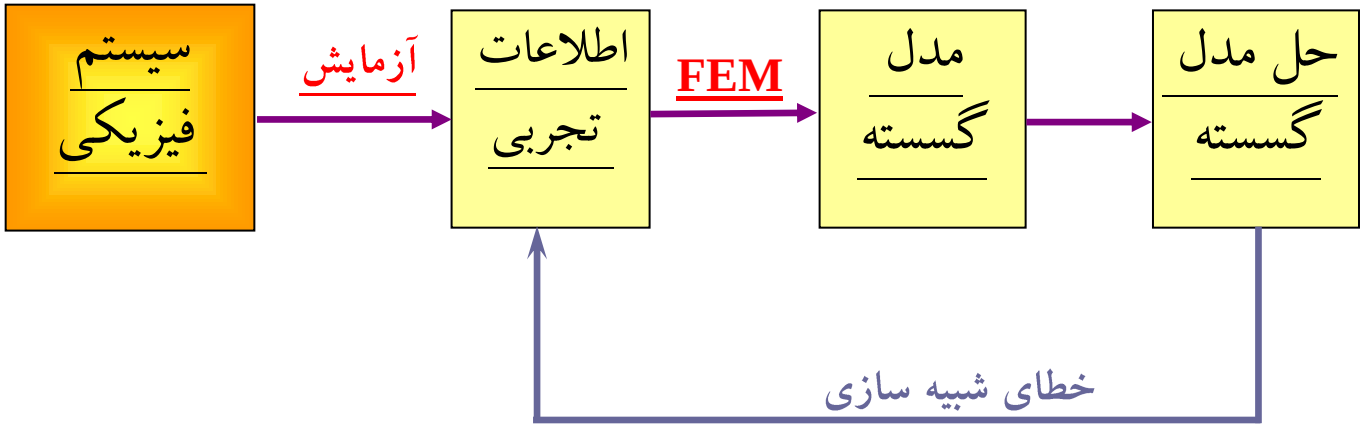
مدل‌سازی و شبیه‌سازی روش اجزای محدود بر مبنای مدل ریاضی



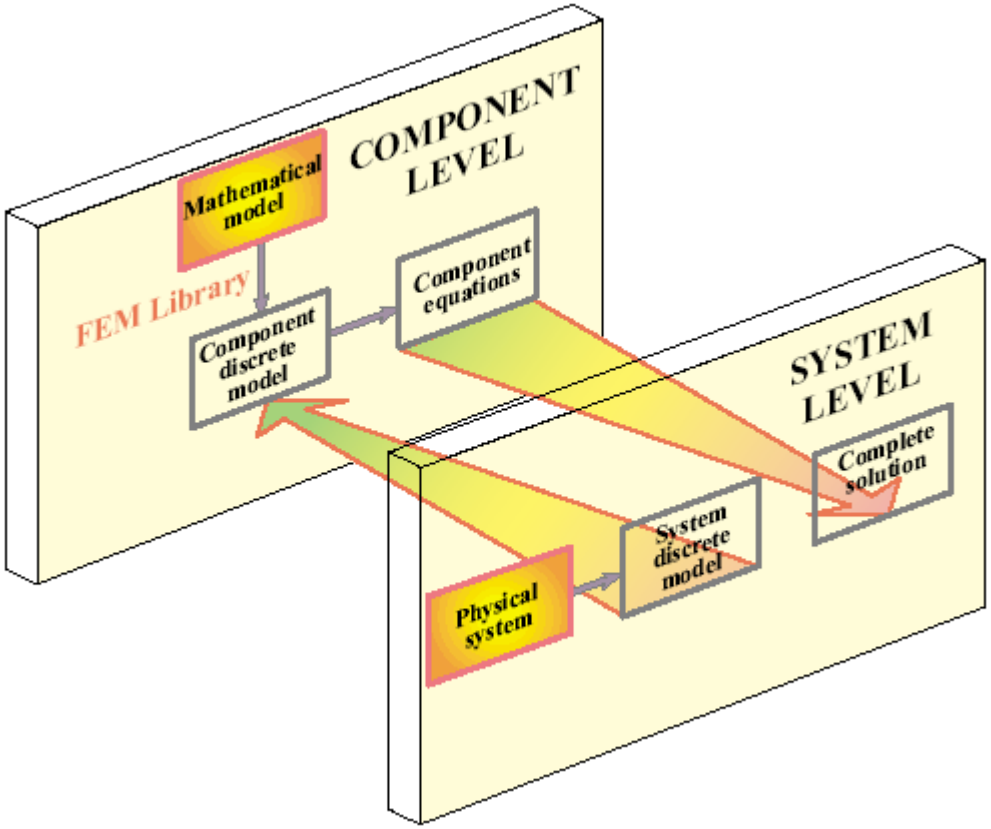
مدل‌سازی و شبیه‌سازی روش اجزای محدود بر مبنای مدل فیزیکی



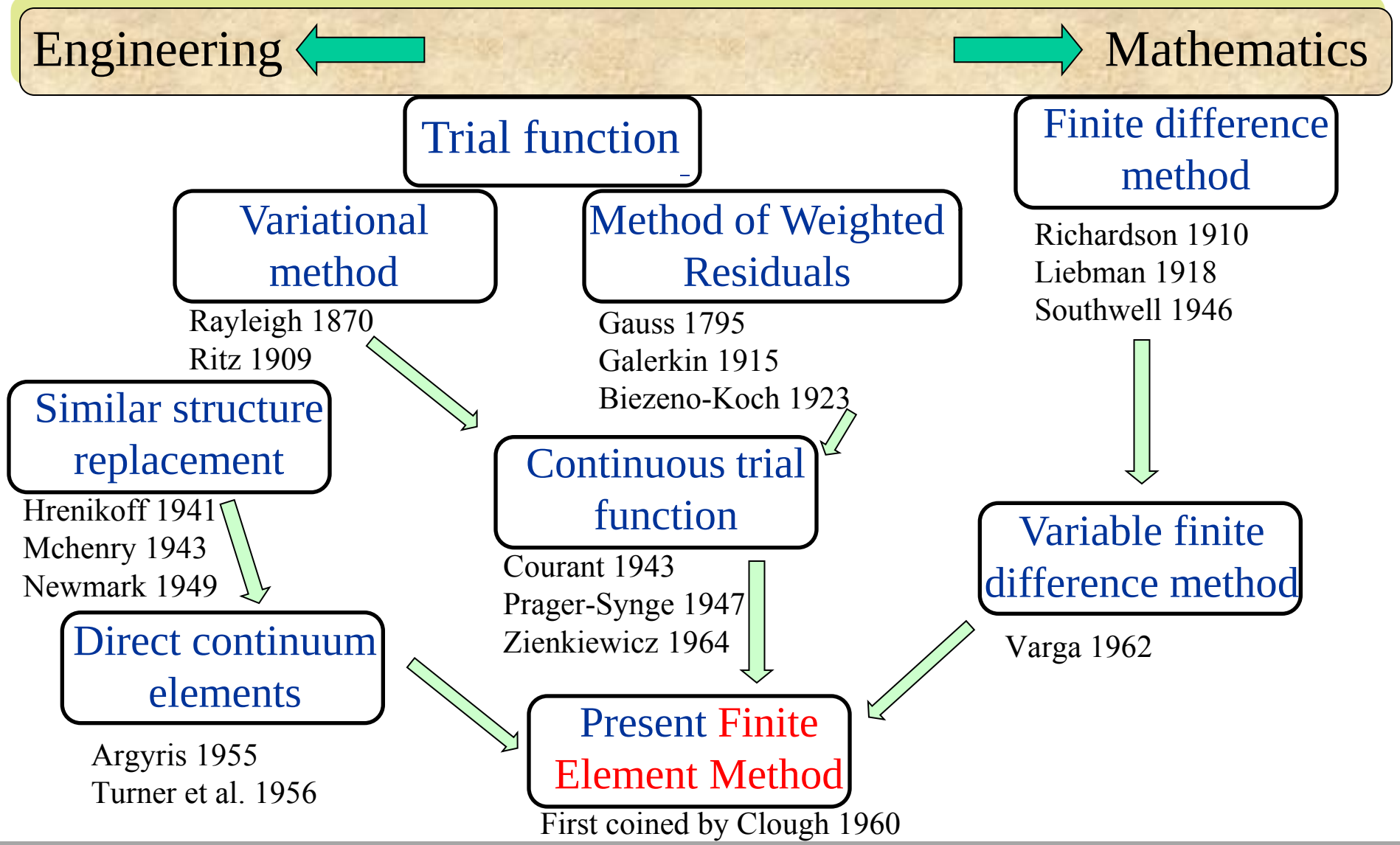
بهنگام نمودن روش اجزای محدود با مدل فیزیکی



ترکیب دو مدل فیزیکی و ریاضی در روش اجزای محدود



تاریخچه روش اجزای محدود



تاریخچه روش اجزای محدود

- ۱۹۴۳ ..... Courant : وی برای اولین بار روش مشابه روش اجزای محدود ارائه کرد که در آن از توابع دارای پیوستگی تکه‌ای که در نواحی مثلثی تعریف می‌شوند استفاده کرد.

- ۱۹۵۶ ..... Turner, Clough, Martin and Topp : آنان در یک مقاله کاربرد اجزای محدود ساده (شامل میله‌های مفصل شده) برای تحلیل سازه هواپیما استفاده نمودند. این تحلیل به‌عنوان یک پیشرفت کلیدی در توسعه روش اجزای محدود به‌حساب می‌آمد.

تاریخچه روش اجزای محدود

- ۱۹۶۰ ..... Clough : وی توانست با استفاده از المانهای مثلثی تحلیل یک بال سازه‌ی هواپیما را در شرایط تنش صفحه‌ای انجام دهد.
- دهه ۱۹۷۰ : در این دهه با ورود کامپیوترهای دیجیتال (با پردازنده مرکزی)، ابزار نیرومندی برای محاسبات مورد نیاز در اجزای محدود فراهم گردید و بطور عملی این روش را توسعه داد.
- دهه ۱۹۸۰ : در این دهه زمینه انجام مراحل پیش پردازش و پس پردازش روش اجزای محدود در کامپیوترهای شخصی فراهم شد.
- دهه ۱۹۹۰ : در این دهه تحلیل سازه‌های بزرگ به کمک روش اجزای محدود انجام گرفت.

تاریخچه روش اجزای محدود

درجات آزادی در روش اجزای محدود:

دهه ۱۹۵۰: تحلیل تا ۱۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۶۰: تحلیل تا ۱۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۸۰: تحلیل تا ۱۰۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۱۹۹۰: تحلیل تا ۱۰۰۰۰۰ درجه آزادی

دهه ۲۰۰۰: تحلیل از ۵۰۰۰۰۰ تا چندین میلیون درجه آزادی

تاریخچه روش اجزای محدود

مقالات منتشر شده در زمینه روش اجزای محدود:

تا ۱۹۶۱: ۱۰ مقاله

تا ۱۹۶۶: ۱۳۴ مقاله

تا ۱۹۷۱: ۸۴۴ مقاله

تا ۱۹۷۶: ۷۰۰۰ مقاله

تا ۱۹۸۶: ۲۰۰۰۰ مقاله

.....

روش‌های گسسته سازی جهت شبیه‌سازی عددی

- روش اجزای محدود — Finite Element method
- روش تفاضل محدود — Finite Difference method
- روش اجزای مرزی — Boundary Element method
- روش حجم محدود — Finite Volume method
- روش بدون المان — Mesh Free method
- روش طیفی — Spectral method

روش‌های استخراج معادلات روش اجزای محدود

۱- روش مستقیم ***Direct Method***

۲-روش حساب تغییرات ***Variational Method***

۳-روش باقیمانده‌های وزنی ***Weighted Residuals Method***

۳-۱- روش گالرکین

۳-۲- روش حداقل مجذورات

۴- روش سختی ***Stiffness Method***

و ...

روش‌های استخراج معادلات روش اجزای محدود

۱- روش مستقیم: الف- این روش برای المان‌های ساده قابل اجراست.

ب- با توجه به بالا بردن مفاهیم فیزیکی، جهت مطالعه بسیار با ارزش است.

۲-روش حساب تغییرات: این روش برای مسایلی قابل پیاده سازی است که رفتار حاکم بر آن به فرم انتگرالی بیان شود.

۳-روش باقیمانده های وزنی:

این روش برای مسایلی که رفتار حاکم بر آن به فرم معادلات دیفرانسیل باشد و بیان انتگرالی آن در دسترس نباشد استفاده می‌شود.

توصیف عمومی روش اجزای محدود

مرحله (I) : گسسته (مجزا) سازی سازه

در این مرحله سازه مکانیکی یا ناحیه حل مورد نظر به بخش‌های کوچکتر (المان) تقسیم می‌شود. نقاط مشترک در مرز المان به نام گره شناخته می‌شود. در مورد نوع، تعداد و ترتیب المان باید تصمیم گیری نمود.

مرحله (II) : ارائه رفتار فیزیکی حاکم بر المان به‌صورت کمّی

در این مرحله لازم است رفتار فیزیکی حاکم بر المانهای سازه مکانیکی به صورت یک (و یا چند) معادله بیان شود.

مرحله (III) : انتخاب یک مدل درون‌یاب یا مدل جابجایی مناسب

از آنجا که تغییرات واقعی متغیر میدان (مانند جابجایی، تنش، دما، فشار یا سرعت) در داخل این محیط پیوسته مجهول است، تغییرات متغیر میدان در داخل یک المان محدود به وسیله یک تابع ساده تقریب زده می‌شوند و بر حسب مقادیر متغیرهای میدان در گره‌ها بیان می‌شوند. معمولاً مدل درون‌یاب (تابع تقریب، توابع شکل) را به شکل چند جمله‌ای در نظر می‌گیرند.

مرحله (IV) : به دست آوردن ماتریس سختی و بردارهای نیروی المان

هنگامی که معادلات میدان (مانند معادلات تعادل) برای یک المان نوشته شد، مجهولات مسئله، متغیر میدان در گره‌ها خواهند بود. در این مرحله ماتریس سختی و بردار نیروی المان محاسبه می‌شود.

مرحله (V) : سوار (جمع) کردن معادلات المانها برای به دست آوردن معادلات کلی تعادل

از آنجا که سازه از چندین المان تشکیل شده است، ماتریس سختی و بردارهای نیروی المانهای منفرد را با یک روش مناسب با یکدیگر جمع می‌شوند.

توصیف عمومی روش اجزای محدود

مرحله (VI) : به دست آوردن متغیرهای میدان (جابجایی‌ها) در گره‌ها

معادلات کلی میدان (مانند معادلات تعادل) باید برای شرایط مرزی اصلاح شوند و پس از آن با استفاده از یک روش عددی مناسب مقادیر متغیرهای میدان استخراج شوند.

مرحله (VII) : محاسبه متغیرهای وابسته (نظیر تنشها و کرنشهای المان)

در صورت نیاز با استفاده از متغیرهای میدان (نظیر جابجایی‌ها) میتوان متغیرهای وابسته (نظیر تنشها و کرنشهای المان) را با استفاده از معادلات مورد لزوم حاکم بر مسئله (نظیر معادلات مکانیک جامدات) محاسبه نمود.

پیاده‌سازی روش اجزای محدود

مرحله (I) : پیش پردازش

در این مرحله مدل هندسی و مدل شبکه‌بندی شده مسئله ساخته می‌شود. سپس بارگذاری و شرایط مرزی به مدل اعمال می گردد.

مرحله (II) : حل مدل اجزای محدود

سوار کردن معادلات سیستم و حل معادلات کلی در این مرحله انجام می‌پذیرد.

مرحله (III) : پس پردازش

آماده نمودن و نمایش نتایج

نرم افزارهای اجزای محدود

Year	Software	Company	Website
1965	ASKA (PERMAS)	IKOSS GmbH, (INTES),Germany	www.intes.de
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	www.macsch.com
1967	ASAS	Atkins Res.&Devel., UK	www.wsasoft.com
1970	ANSYS	Swanson Anal. Syst., USA	www.ansys.com
	SAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.eerc.berkeley.edu
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	www.adina.com

نرم افزارهای اجزای محدود

Year	Software	Company	Website
1976	NISA	Eng. Mech. Res. Corp., USA	www.emrc.com
1978	DYNA2D, DYNA3D	Livermore Softw. Tech. Corp., USA	www.lstc.com
1979	ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA	www.abaqus.com
1980	LUSAS	FEA Ltd., UK	www.lusas.com
1982	COSMOS/M	Structural Res. & Anal. Corp., USA	www.cosmosm.com
1984	ALGOR	Algor Inc., USA	www.algor.com

نرم افزارهای اجزای محدود

- *ANSYS* (General purpose, PC and workstations)
- NISA (PC and workstation)
- SDRC/I-DEAS (Complete CAD/CAM/CAE package)
- NASTRAN (General purpose FEA on mainframes)
- ABAQUS (Nonlinear and dynamic analyses)
- COSMOS (General purpose FEA)
- ALGOR (PC and workstations)
- PATRAN (Pre/Post Processor)
- HyperMesh (Pre/Post Processor)
- Dyna-3D (Crash/impact analysis)
- .....

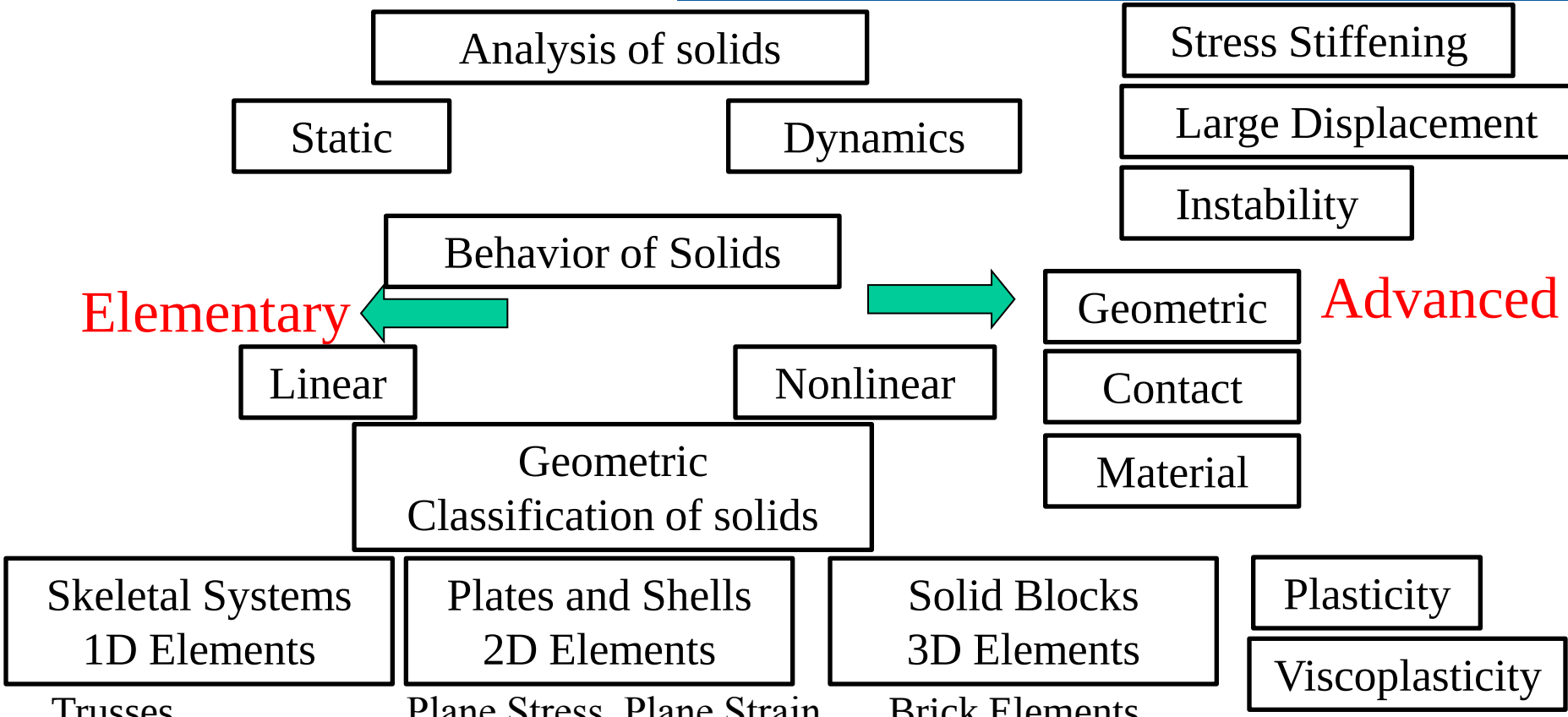
کاربرد روش اجزای محدود

- Static analysis
  - Deflection
  - Stresses
  - Strains
  - Forces
  - Energies
- Dynamic analysis
  - Frequencies
  - Deflection (mode shape)
  - Stresses
  - Strains
  - Forces
  - Energies
- Heat transfer analysis
  - Temperature
  - Heat fluxes
  - Thermal gradients
  - Heat flow from
  - convection faces
- Fluid analysis
  - Pressures
  - Gas temperatures
  - Convection coefficients
  - Velocities

کاربرد روش اجزای محدود

- Automotive industry
  - Static analyses
  - Modal analyses
  - Transient dynamics
  - Heat transfer
  - Mechanisms
  - Fracture mechanics
  - Metal forming
  - Crashworthiness
- Architectural
  - Soil mechanics
  - Rock mechanics
  - Hydraulics
  - Fracture mechanics
- Aerospace industry
  - Static analyses
  - Modal analyses
  - Aerodynamics
  - Transient dynamics
  - Heat transfer
  - Fracture mechanics
  - Creep and plasticity analyses
  - Composite materials
  - Aeroelasticity
  - Metal forming
  - Crashworthiness

تقسیم‌بندی مسایل مکانیک جامدات



سرفصل درس

- آشنایی با مفاهیم اولیه روش اجزای محدود
- روش های استخراج معادلات اجزای محدود
- روش مستقیم استخراج معادلات اجزای محدود به روش مستقیم
- آنالیز استاتیکی: المان میله دو بعدی، سه بعدی همراه با پیاده سازی عددی
- المان تیر دو بعدی، سه بعدی همراه با پیاده سازی عددی
- حل مسایل دو بعدی جامدات؛ المان مثلثی، المان مربعی، المان صفحه
- تکنیک های مدل سازی و حل مسئله به روش اجزای محدود

سرفصل درس

- روش حل معادلات اجزای محدود؛ همگرایی، اعمال قیود، انتگرال گیری عددی
- فرمول بندی روش اجزای محدود به صورت فرم ضعیف
  - روش حساب تغییرات
  - روش باقیمانده‌های وزنی، گالرکین
  - روش ریلی-ریتز
- حل مسایل میدان به روش اجزای محدود
- حل مسایل دینامیک به روش اجزای محدود

اهداف درس

- شناخت و تسلط بر مبنای روش اجزای محدود
- استخراج و به کارگیری انواع المان (معرفی شده در این درس)
- پیاده سازی روش اجزای محدود
  - نرم افزار MATLAB
  - نرم افزار ABAQUS یا ANSYS
- تهیه مدل مناسب اجزای محدود
- توانایی تفسیر و ارزیابی نتایج اجزای محدود
- شناخت محدودیت ها و مزیت های روش اجزای محدود

Try to study FEA by:

Mathematical principle + Analysis modeling + Software application

Try to use FEA by

Software + Practical problem + Self development

مراجع

1- Introduction To Finite Elements in Engineering

T. *Chandrupatla and A. D. Belegundu, Prentice Hall, 2001.*

2- A First Course in the Finite Element Method

D.L. Logan, 2011.

3- The Finite Element Method in Engineering

S.S. Rao, 2010.

4- A First Course in Finite Elements

J. Fish, and T. Belytschko, 2007.

5-An Introduction to the Finite Element Method

J. N. Reddy, McGraw-Hill, 1993.

6- Fundamental Finite Element Analysis and Applications

M. A. Bhatti, 2005.

7- *The Finite Element Method* *Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*

Thomas J. R. Hughes, Prentice-Hall, 2000.

8-*Finite Element Modeling for Stress Analysis*

R. D. Cook, John Wiley & Sons, 1995.

9- *The Finite Element Method: Volume 1, Basic Formulation and Linear Problems*

O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, 2000.

بارم نمره

تکالیف : ۱۰٪

امتحان میانترم: ۴۰ ٪ چهارشنبه ۹۴/۸/۲۷ ساعت: ۱۱ – ۹

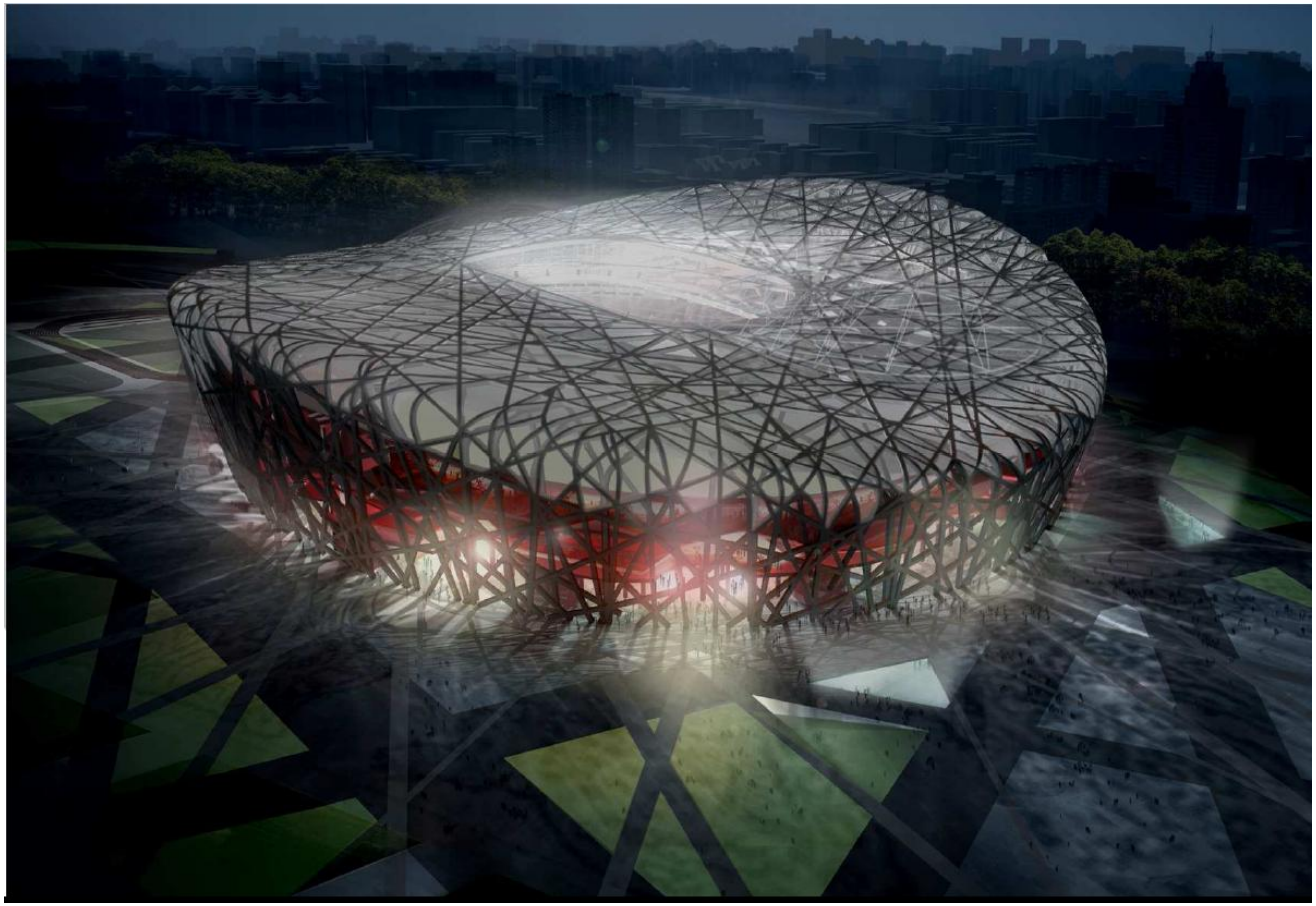
امتحان پایانترم: ۵۰٪

فایل های درس، تکالیف و مراجع:

\\172.16.60.6\teachers\mashayekhi\Finite Element Method

FEA & Structure

Beijing National Stadium (40,000 tons)

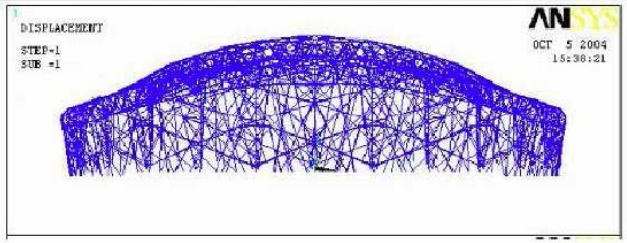


From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*

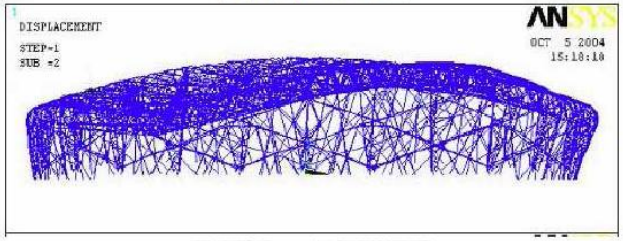
FEA & Structure

Beijing National Stadium

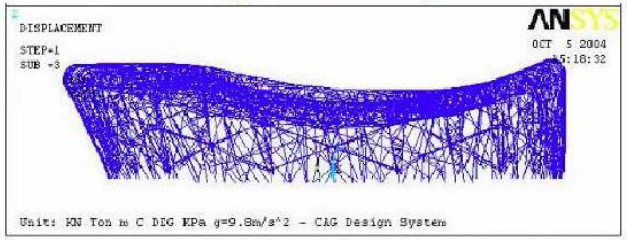
Mode shape



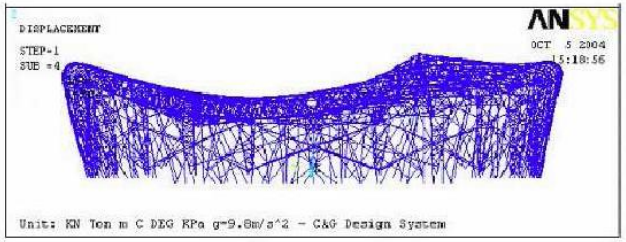
第一振型 First Mode
(竖向振动 Z-direction)



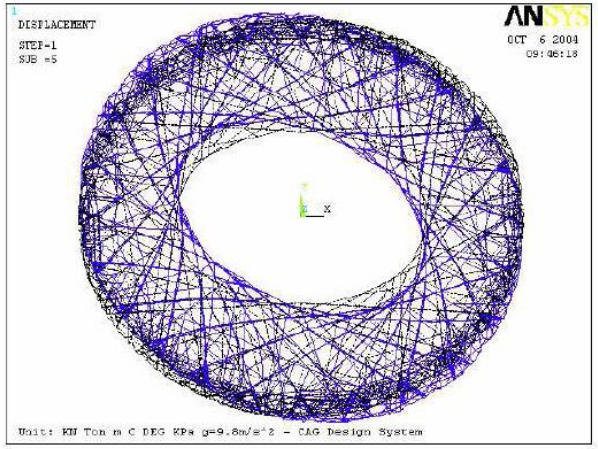
第二振型 Second Mode
(X-方向平动 X-direction Sway)



第三振型 Third Mode
(Y-方向平动 Y-direction Sway)



第四振型 Fourth Mode
(竖向弯曲振动 Z-direction Bending)



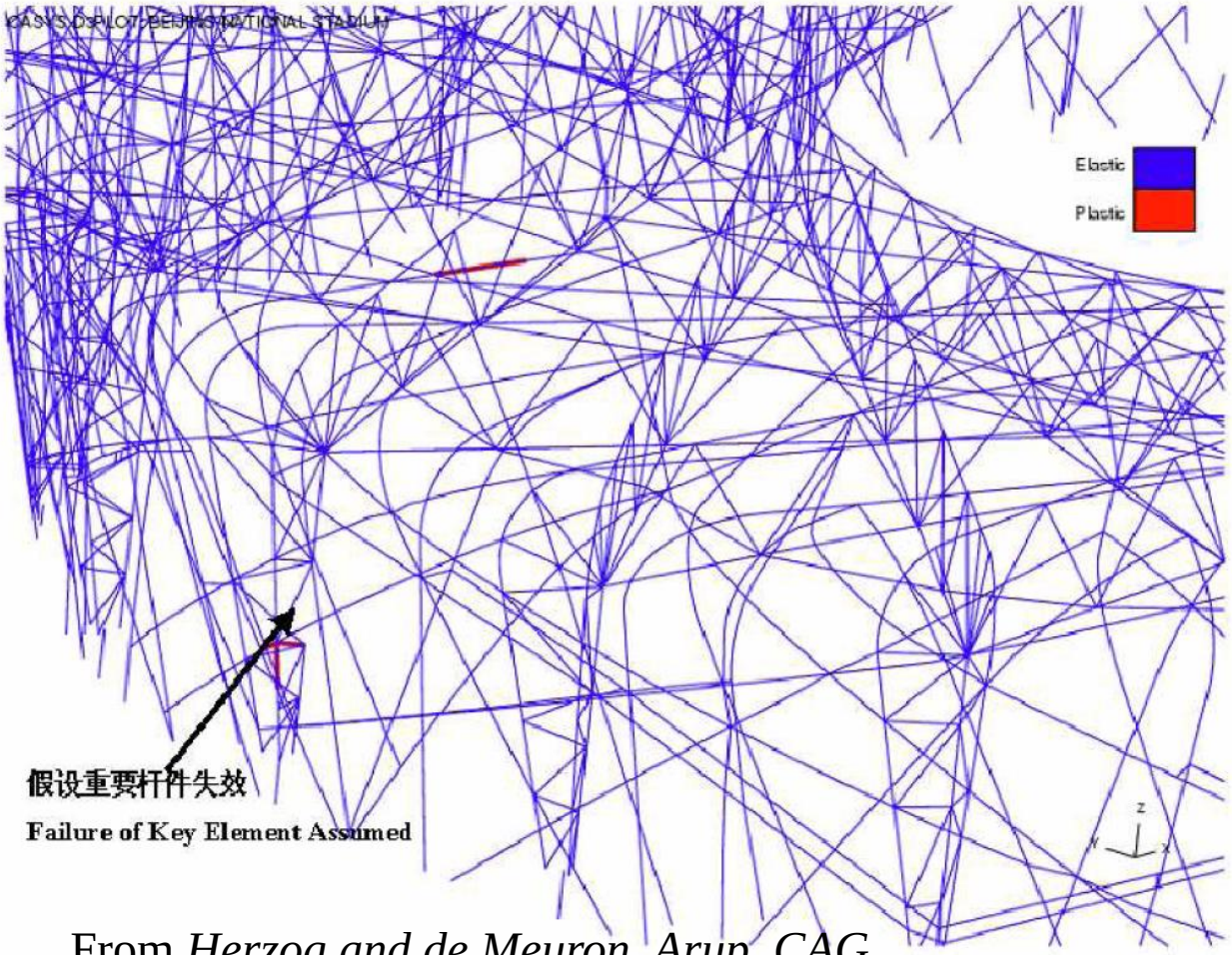
第五振型 Fifth Mode
(扭转振型 Torsional mode)

From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*

FEA & Structure

Beijing National Stadium

Failure verification

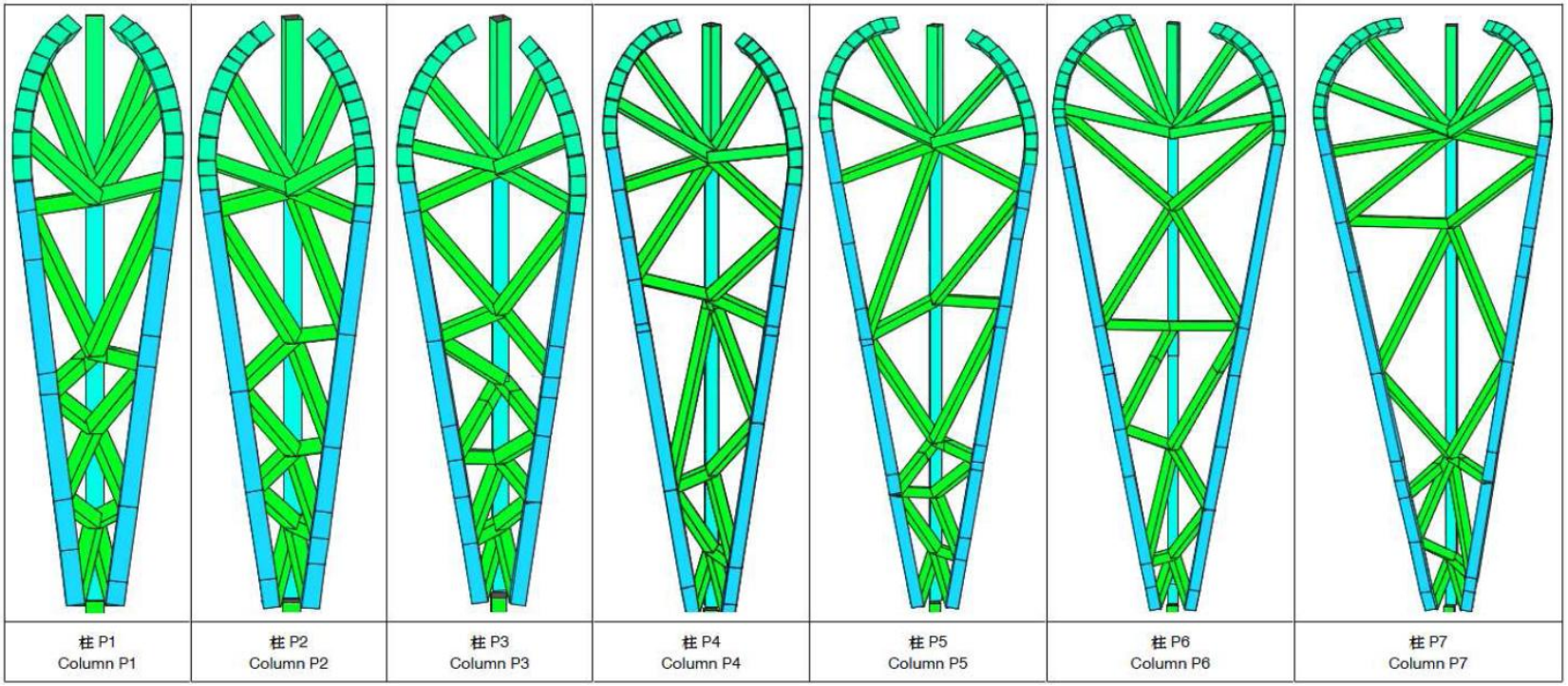


From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*

FEA & Structure

Beijing National Stadium

Truss column design

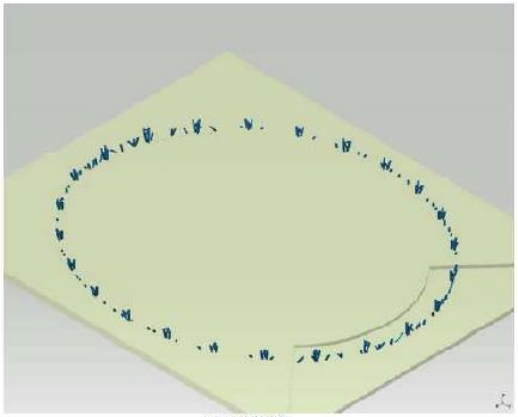


From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*

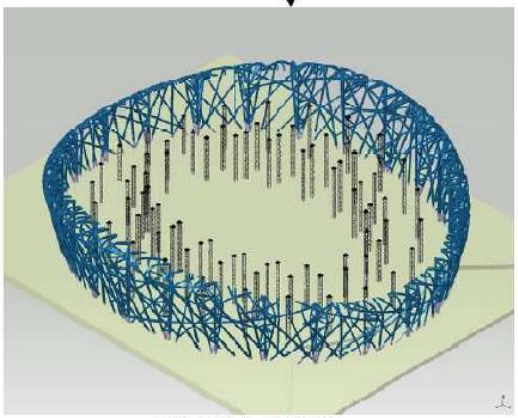
FEA & Structure

Beijing National Stadium

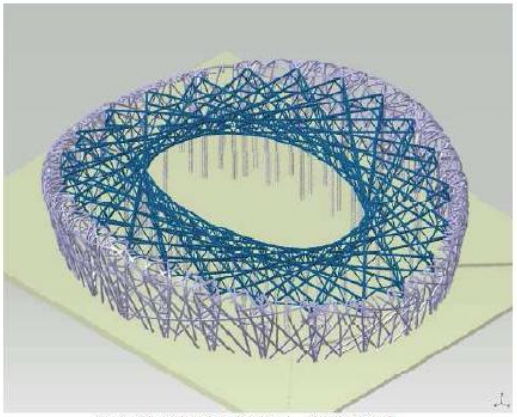
Construction process



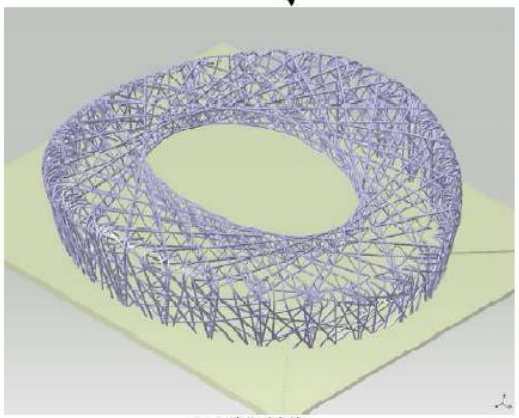
(a) 安装柱脚
(a) Installation of column base



(b) 安装组合柱、立面次结构
(b) Install the columns and facade secondary structure



(c) 主桁架与内环桁架分片提升，高空拼接合拢
(c) Primary truss and inner ring truss are lifted panel by panel and jointed at high leve

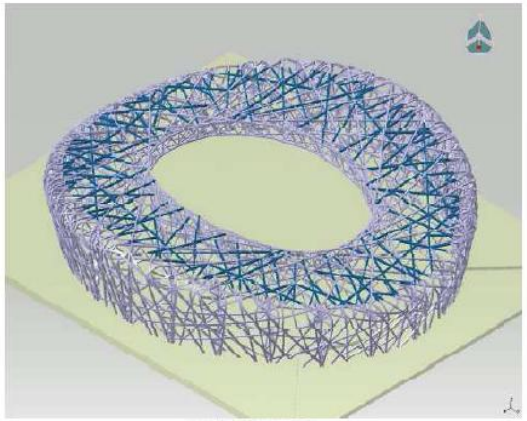


(d) 拆除临时支撑
(d) Removal of temporary support

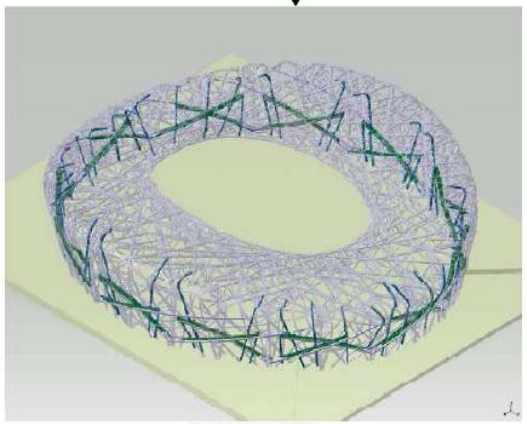
From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*

FEA & Structure

Beijing National Stadium

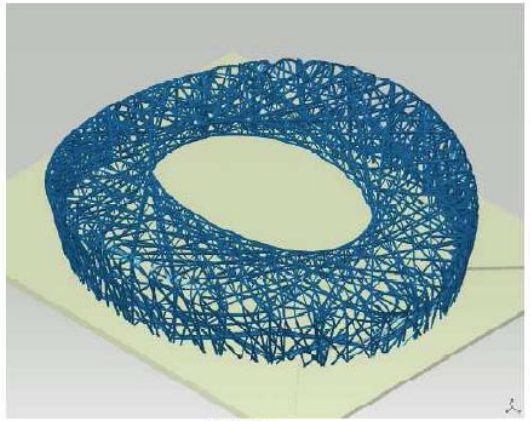


(e) 安装顶面次结构
(e) Install seoondary structure of the top surfaoe



(f) 安装立面大楼梯
(f) Construct facade stairs

Construction process



(g) 完成图
(g) Image on the completion of installation

图 5.2 钢结构的主要安装顺序
Figure 5.2 Key installation sequence of the steel structure

From *Herzog and de Meuron, Arup, CAG.*