Subject:

پیاده‌سازی عددی مدل آسیب لمتر در حالت تنش‌های سه‌بعدی (؟):

مقادیر معلوم در زمان t_n:

$t_n : \sigma_{ij}^{n}, \ \varepsilon_{ij}^{pl,n}, \ D_n, \ \Delta\varepsilon_{ij} = \checkmark$

خواسته:

$t_{n+1} : \sigma_{ij}^{n+1}, \ \varepsilon_{ij}^{pl,n+1}, \ D_{n+1} \ ?$

روابط اصلی:

- معادله تسلیم:

$f = \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_y = 0 \quad \text{یا} \quad f = \frac{\sqrt{3J_2}}{1-D} - [\sigma_0 + R(\alpha)]$

$f = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - [\sigma_0 + R(\alpha)] = 0$

- پتانسیل اتلاف Ψ

- $\Psi = \Psi_p + \Psi_d = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - [\sigma_0 + R(\alpha)] + \frac{r}{(1-D)(s+1)}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s+1}$

- $-Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]$

$\boxed{\Psi_p = f}$

- $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} d\lambda \frac{S_{ij}}{(1-D)\sigma_{eq}} \quad (*)$ قانون جریان:

$S = \sigma^{D}$

جایگذاری (*)

$\dot{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}}$

- $\boxed{\dot{\alpha} = -d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial R} = d\lambda}$

$\boxed{\dot{\varepsilon}_p = \frac{d\lambda}{1-D}}$

- $\dot{D} = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = d\lambda \frac{1}{1-D}\left(\frac{-Y}{r}\right)^s \ \xrightarrow{\text{یا}} \ D_{n+1} = D_n + \dot{D}$

r و S پارامتر ماده

$D_{n+1} - D_n - \frac{d\lambda}{1-D_{n+1}}\left(\frac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s = 0$

بنابراین: $f = \frac{\sigma_{eq}^{tr}}{1-D} - \frac{3G\,d\lambda}{1-D} - [\sigma_0 + R(\alpha)] = 0$

الگوریتم عددی:

(الف) ابتدا با فرض پیش‌بینی الاستیک تنش‌های آزمایشی را محاسبه می‌کنیم:

$\sigma_{ij}^{tr} = \sigma_{ij}^{n} + d\sigma_{ij}^{tr}$

$d\sigma_{ij}^{tr} = (1-D_n) E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$

دقت کنید چون tr فرض کرده داریم

$\alpha_{n+1}^{tr} = \alpha_n$

$D_{n+1}^{tr} = D_n$

Subject:

چک کردن شرایط سازگاری پلاستیک

IF $f^{tr} = \dfrac{\sigma_{eq}^{tr}}{1-D_n} - \left[\sigma_0 + R(\alpha_n)\right] \leqslant 0$

Then (Elastic state)

Set $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{tr}$ and Return

Else (Plastic state) (ii)

حل دستگاه دو معادله دو مجهول $d\lambda$ و D_{n+1}:

$$(*) \quad \frac{\sigma_{eq}^{tr}}{1-D_{n+1}} - 3G\,\frac{d\lambda}{1-D_{n+1}} - \left[\sigma_0 + R(\alpha_n + d\lambda)\right] = 0$$

$$(**) \quad D_{n+1} - D_n - \frac{d\lambda}{1-D_{n+1}}\left(\frac{-Y_{n+1}}{r}\right)^{s} = 0$$

$(d\lambda, D_{n+1})$ به دست می‌آید.

(iii) به هنگام کردن متغیرها!

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d\lambda$$

$$\underset{\wedge}{N}_{n+1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-D_{n+1}}\,\frac{\underset{\wedge}{S}^{tr}}{\sigma_e^{tr}}$$

$$\Delta \underset{\wedge}{\varepsilon}^{pl} = \frac{3}{2}\,\frac{d\lambda}{1-D_{n+1}}\,\frac{\underset{\wedge}{S}^{tr}}{\sigma_e^{tr}}$$

$$\Delta \underset{\wedge}{\varepsilon}^{el} = \Delta \underset{\wedge}{\varepsilon} - \Delta \underset{\wedge}{\varepsilon}^{pl}$$

$$d\underset{\wedge}{\sigma} = (1-D_{n+1})\,\underset{\wedge}{C} : \Delta \underset{\wedge}{\varepsilon}^{el}$$

برای حل معادلات (*) و (**) از روش اویلر برگشتی استفاده می‌شود بنابراین معادلات (*) و (**) به صورت زیر نوشته می‌شود:

در این معادلات (*) و (**) مجهولات D_{n+1} و $d\lambda$ که مربوط به زمان t_{n+1} (یعنی $d\lambda_{n+1}$) که با روش تکرار بدست می‌آیند

$$\begin{cases} x(d\lambda^{i+1}, D^{i+1}) = \dfrac{\sigma_{eq}^{tr, i+1}}{1-D^{i+1}} - 3G\dfrac{d\lambda^{i+1}}{1-D^{i+1}} - [\sigma_0 + R(\alpha_n + d\lambda^{i+1})] \\ z(d\lambda^{i+1}, D^{i+1}) = D^{i+1} - D_n - \dfrac{d\lambda^{i+1}}{1-D^{i+1}}\left(\dfrac{-Y^{i+1}}{r}\right)^s \end{cases}$$

برای حل دستگاه فوق، از روش نیوتن - رفسون استفاده می‌شود که در این روش لازم است مشتقات x و z

که $x(d\lambda^{i+1}, D^{i+1})$ و $z(d\lambda^{i+1}, D^{i+1})$ بر حسب $d\lambda^{i+1}$ و dD^{i+1} محاسبه گردد. الگوریتم حل به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{DO WHILE } \left[|x(d\lambda_{n+1}^{i+1}, D_{n+1}^{i+1})|, |z(d\lambda_{n+1}^{i+1}, D_{n+1}^{i+1})| \right] < \left[\varepsilon_{tol}^{d\lambda}, \varepsilon_{tol}^{D} \right] \text{ and } [i < N_{max}]$$

- solve the system iteratively for $d\lambda_{n+1}, D_{n+1}$

$$\begin{Bmatrix} \Delta d\lambda^{i+1} \\ \Delta D^{i+1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial d\lambda} & \dfrac{\partial x^i}{\partial D} \\ \dfrac{\partial z^i}{\partial d\lambda} & \dfrac{\partial z^i}{\partial D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x(d\lambda^i, D^i) \\ z(d\lambda^i, D^i) \end{Bmatrix}$$

$$d\lambda^{i+1} = d\lambda^i + \Delta d\lambda^{i+1}$$

$$D^{i+1} = D^i + \Delta D^{i+1}$$

i: اندیس

که i اندیس تکرار است

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + \Delta d\lambda^{i+1}$$

و:

$$x(d\lambda^{i+1}, dD^{i+1}) = \frac{\sigma_{eq}^{tr, i+1}}{1-D^{i+1}} - 3G\frac{d\lambda^{i+1}}{1-D^{i+1}} - [\sigma_0 + R(\alpha^{i+1})]$$

$$z(d\lambda^{i+1}, dD^{i+1}) = D^{i+1} - D_n - \frac{d\lambda^{i+1}}{1-D^{i+1}}\left(\frac{-Y^{i+1}}{r}\right)^s$$

Subject:

$d\alpha = d\lambda = d\varepsilon_p (1-D)$

$$\frac{\partial \pi}{\partial (d\lambda)}(d\lambda^i, D^i) = -\frac{3G}{1-D^i} - \frac{dR}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\lambda}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial D} = \frac{\sigma_{eq}^{tr,i}}{(1-D^i)^2} - 3G\frac{d\lambda}{(1-D^i)^2} - \frac{dR^i}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dD} \qquad = -d\varepsilon_p = -\frac{d\lambda}{1-D}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial D} = \frac{\sigma_{eq}^{tr,i}}{(1-D^i)^2} - 3G\frac{d\lambda}{(1-D^i)^2} + \frac{dR^i}{d\alpha}\frac{d\lambda^i}{1-D^i}$$

$$\frac{\partial z}{\partial (d\lambda)}(d\lambda^i, D^i) = -\frac{1}{1-D^i}\left(-\frac{Y^i}{r}\right)^s$$

$$\frac{\partial z}{\partial D}(d\lambda^i, D^i) = 1 - \frac{1}{(1-D^i)^2} d\lambda^i \left(-\frac{Y^i}{r}\right)^s$$

with

$$\underset{\wedge}{\sigma}^{tr,i} = \frac{1-D^i}{1-D_n}\underset{\wedge}{\sigma}_n + (1-D^i)\underset{\wedge}{E} : \Delta \underset{\wedge}{\varepsilon}_{n+1}$$

$$\underset{\wedge}{\sigma}^i = \frac{1-D^i}{1-D_n}\underset{\wedge}{\sigma}_n + (1-D_{n+1})\underset{\wedge}{E} : \Delta\underset{\wedge}{\varepsilon} - 3G\, d\lambda \frac{\underset{\wedge}{S}^{tr,i}}{\sigma_{eq}^{tr,i}} \qquad (*)$$

اشتباه

$$-Y^i = \frac{(\sigma_{eq}^i)^2}{2E(1-D_i)^2}\left[\tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H^{tr}}{\sigma_{eq}^{tr,i}}\right)^2\right]$$

END DO

Subject:

ص درانیز، اثبات رابطه (✱)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e}_{n+1}$$

$$= (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{e}_{n} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p})$$

$$= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}(1-D_n)\,\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e}_{n} + (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$$

$(\ast\ast)$

$$= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\boldsymbol{\sigma}_{n} + (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \left(\frac{3}{2}\frac{d\lambda}{1-D_{n+1}} \cdot \frac{\boldsymbol{S}^{tr}}{\sigma^{tr}_{eq}}\right)$$

$$= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\boldsymbol{\sigma}_{n} + (1-D_{n+1})\,\boldsymbol{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - 3G\,d\lambda\,\frac{\boldsymbol{S}^{tr}}{\sigma^{tr}_{eq}}$$

$$(\ast\ast) = (1-D_{n+1})\left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right]\frac{3}{2}\frac{d\lambda}{1-D_{n+1}}\frac{S^{tr}_{kl}}{\sigma^{tr}_{eq}}$$

$$= (1-D_{n+1})\left[\lambda\delta_{ij}\cancel{S^{tr}_{kk}} + G(S^{tr}_{ij} + S^{tr}_{ij})\right]\frac{3}{2}\frac{d\lambda}{1-D_{n+1}}\frac{1}{\sigma^{tr}_{eq}}$$

$$= \cancel{(1-D_{n+1})} \times 2G \times \frac{3}{\cancel{2}}\frac{d\lambda}{\cancel{1-D_{n+1}}}\frac{\boldsymbol{S}^{tr}}{\sigma^{tr}_{eq}}$$