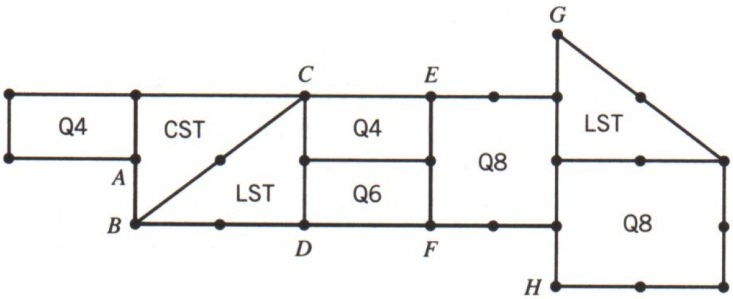
باسمه تعالی

نام و نام خانوادگی:
شماره دانشجویی:

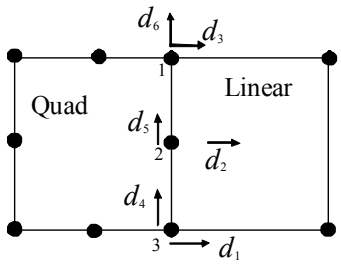
امتحان پایان‌ترم:روش اجزای محدود
دانشگاه صنعتی اصفهان – دانشکده مهندسی مکانیک
وقت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

نیم‌سال اول تحصیلی ۹۲-۹۱

۱- الف- به نظر شبکه اجزای محدود زیر دارای چه اشکالاتی است؟



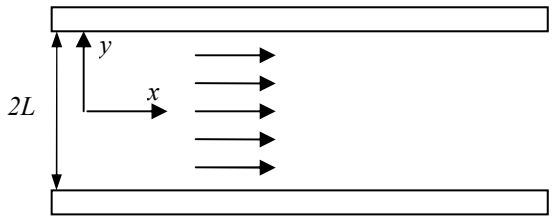
ب- در صورت استفاده از دو المان زیر باید چه قیودی برای تغییرمکان گره‌های 1و 2، 3 برقرار باشد.



بارم: ۳ نمره

۲- جریان موازی سیال بین دو صفحه تخت طولانی که به فاصله 2L از یکدیگر قرار دارند را در نظر بگیرید:

میدان سرعت بین دو صفحه برابر است: $\begin{cases} u = u(y) \\ v = 0 \end{cases}$



و معادله دیفرانسیل مومنتم به صورت زیر قابل بیان است: $\mu \dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{dP}{dx}$

که در آن μ، ویسکوزیته سیال و P، فشار هیدرواستاتیکی سیال است.

به دنبال توزیع سرعت سیال برای هنگامی که $-\dfrac{dP}{dx} = q_0 = constant$ است به روش اجزای محدود هستیم.

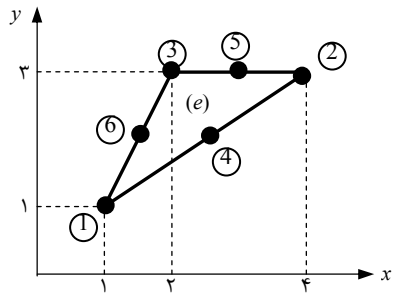
الف-فرم ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله را به دست آورید.

ب- به کمک فرم ضعیف معادلات اجزای محدود برای یک المان خطی را به فرم زیر استخراج نمایید: $\left[K^e\right]\left\{u^e\right\} = \left\{f^e\right\} + \left\{Q^e\right\}$

پ- با استفاده از دو المان خطی، سرعت سیال در وسط دو صفحه (یعنی در y=0) را برای وقتی که صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی با سرعت U_0 حرکت می‌کند (یعنی: $u(-L) = 0, \quad u(L) = U_0$) را به دست آورید.

بارم: ۶ نمره

۳- بردار تغییرمکان برای شش گره از یک المان مثلثی مرتبه دو به شکل روبرو به صورت زیر داده شده است.



$$\mathbf{u}^{(e)}_1=(\mathbf{i}-\mathbf{j})\times10^{-3}$$
$$\mathbf{u}^{(e)}_2=(2\mathbf{i})\times10^{-3}$$
$$\mathbf{u}^{(e)}_3=(2\mathbf{j})\times10^{-3}$$
$$\mathbf{u}^{(e)}_4=(\mathbf{i})\times10^{-3}$$
$$\mathbf{u}^{(e)}_5=(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times10^{-3}$$
$$\mathbf{u}^{(e)}_6=(\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times10^{-3}$$

الف- توابع شکل برای این المان را بنویسید.

ب- بردار تغییرمکان برای نقطه‌ی P(۲،۲) را به‌دست آورید.

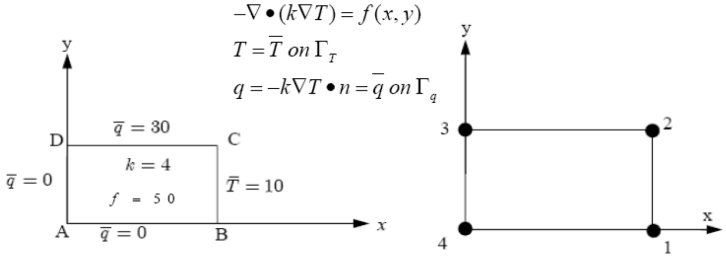
بارم: ۴ نمره

۴- برای یک مساله انتقال حرارت در یک صفحه مستطیلی با ضریب هدایت $k=4\ \mathrm{W^oC^{-1}}$، و ابعاد 1*2 متر، شرایط مرزی به صورت زیر اعمال می‌شود

- مرز BC : $\overline{T}=10\,^oC$ ، - مرز AB و AD : $\overline{q}=0\ \ Wm^{-1}$ (ایزوله هستند)، - مرز DC با شار: $\overline{q}=30\ \ Wm^{-1}$،

- منبع حرارتی ثابت در صفحه: $f=50\ \ Wm^{-2}$

برای محاسبه توزیع دما از یک المان چهارگره‌ای مطابق شکل استفاده می‌شود.



الف- با نوشتن فرم ضعیف معادله عبارتهای برای ماتریس K، و بردارهای بار حرارتی به دست آورید.

ب- ماتریس سختی المان را محاسبه نمایید.

راهنمایی: با استفاده از توابع شکل، ماتریس ژاکوبی و معکوس آن را محاسبه نمایید، سپس ماتریس مشتقات توابع شکل را به دست آورید و ...

پ- با استفاده از چهار نقطه انتگرال‌گیری گوس نشان دهید که ماتریس K برابر است با:

(نقاط انتگرال‌گیری $(\xi,\eta)=(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ با ضریب وزنی 1)

$$K=\begin{bmatrix} 3.3333 & -2.3333 & -1.6667 & 0.6667 \\ -2.3333 & 3.3333 & 0.6667 & -1.6667 \\ -1.6667 & 0.6667 & 3.3333 & -2.3333 \\ 0.6667 & -1.6667 & -2.3333 & 3.3333 \end{bmatrix}$$

- محاسبه K(1,1)، و K(1,4) کافی است.

ت- با محاسبه بارهای حرارتی دما در نقاط 3 و 4 را به دست آورید.

ث- شار حرارتی را در نقطه گوس $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ به دست آورید.

روابط مفید:

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\ N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\ N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}=\left[J^e\right]^{-1}$$

بارم: ۷ نمره