

تمرین سری اول جبر خطی ۲

۱. فرض کنید U یک زیرفضای V باشد. فضای $U + U$ را تفسیر کنید.

۲. آیا اجتماع دو فضای برداری باز هم فضای برداری خواهد بود؟

۳. مثالی برای عبارتهای زیر بیان کنید:

(آ) زیرمجموعه‌ی ناتهی \mathbb{R}^2 مانند U به طوری که U تحت جمع بسته باشد و قرینه جمعی داشته باشد (یعنی $-u \in U$ که $u \in U$)، ولی U زیرفضای \mathbb{R}^2 نباشد.

(ب) زیرمجموعه‌ی ناتهی \mathbb{R}^2 مانند U به طوری که تحت ضرب اسکالر بسته باشد، ولی U زیرفضای \mathbb{R}^2 نباشد.

۴. اثبات یا رد کنید که: اگر U_1 و U_2 و W زیرفضاهای V باشند به نحوی که:

$$V = U_1 \oplus W \text{ و } V = U_2 \oplus W,$$

$$U_1 = U_2$$

۵. ثابت کنید اشتراک هر تعداد از زیرفضاهای V باز هم زیرفضای آن خواهند بود.

۶. فرض کنید L یک زیرفضای فضای برداری V است. ثابت کنید فضای خارج قسمتی تعریف شده به صورت V/L ، یک فضای برداری است.

۷. فرض کنید V و W فضای برداری باشد. ثابت کنید برد و هسته‌ی یک تبدیل خطی به صورت زیر فضاهایی برداری هستند:

$$T : V \rightarrow W$$

۸. اگر W زیرفضای محض فضای برداری V با بعدی متناهی باشد، آن وقت W نیز متناهی بعد خواهد بود؛ همچنین

$$\dim W < \dim V.$$

۹. برای فضای برداری زیر یک پایه تعیین کنید:

$$V = \{(a, 2a) | a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2\}.$$

۱۰. فرض کنید $V = \mathbb{R}$ یک فضای برداری تحت اسکالرهایی $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ باشد. ثابت کنید $1, \sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ مستقل خطی اند.

۱۱. فرض کنید V فضای نگاشت‌های پیوسته حقیقی-مقدار بر روی بازه $[-1, +1]$ باشد؛ همچنین

$$V_1 = \{f \in V | \int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0\}$$

و V_2 زیرمجموعه‌ی V شامل همه‌ی توابع پیوسته باشد.

(آ) ثابت کنید V_1 و V_2 زیرفضاهای V هستند.

(ب) ثابت کنید $V = V_1 \oplus V_2$.

۱۲. اگر V یک فضا با بعد متناهی روی هیات عددهای مختلط باشد؛ ثابت کنید

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

۱۳. نشان دهید $S = \{\sin x, \cos x\}$ در فضای $C[0, 2\pi]$ یعنی تمام تابع‌های پیوسته در فاصله $[0, 2\pi]$ مستقل خطی است.

۱۴. فرض کنید p_1, \dots, p_n عددهای اول متمایز باشند ثابت کنید مجموعه‌ی زیر روی هیات عددهای گویا مستقل خطی است

$$\{\log(p_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

موفق باشید. دکتر منجگانی