بسط تیلور توابع چندمتغیره

ابتدا مفهوم بسط تیلور را برای توابع حقیقی یک متغیره یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم ϕ تابعی حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای از اعداد حقیقی حاوی دو عدد $t_\circ$ و t باشد. اگر مشتق مرتبه $(n+۱)$- ام ϕ بر این بازه پیوسته باشد آنگاه عدد c بین $t_\circ$ و t وجود دارد که

$$\phi(t) = \phi(t_\circ) + \phi'(t_\circ)(t-t_\circ) + \frac{\phi''(t_\circ)}{۲!}(t-t_\circ)^۲ + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t_\circ)}{n!}(t-t_\circ)^n + \frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(t-t_\circ)^{n+۱}$$

به این ترتیب برای مقادیر t به اندازه کافی نزدیک $t_\circ$،

$$\phi(t) \approx \phi(t_\circ) + \phi'(t_\circ)(t-t_\circ) + \frac{\phi''(t_\circ)}{۲!}(t-t_\circ)^۲ + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t_\circ)}{n!}(t-t_\circ)^n$$

در قضیهٔ زیر این خاصیت را برای توابع دومتغیره گسترش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^۲$ و $f : D \to \mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبهٔ $n+۱$ داشته باشد. برای دو نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ و (x,y) در D با این خاصیت که پاره‌خط واصل بین دو نقطه در D قرار بگیرد، نقطهٔ (x^*, y^*) بر این پاره‌خط وجود دارد که

$$\begin{aligned}
f(x,y) \quad = \quad & f(x_\circ,y_\circ) + \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)\big) \\
& + \frac{۱}{۲!}\big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)(y-y_\circ) + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)^۲\big) \\
& \qquad \vdots \\
& + \frac{۱}{n!}\big(\sum_{k=۱}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)^{n-k}(y-y_\circ)^k\big) \\
& + \frac{۱}{(n+۱)!}\big(\sum_{k=۱}^{n+۱} \frac{(n+۱)!}{k!(n+۱-k)!}\frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}(x^*,y^*)(x-x_\circ)^{n+۱-k}(y-y_\circ)^k\big)
\end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم L خط گذرکننده از دو نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ و (x,y) باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ + t(x-x_\circ) \\ y(t) = y_\circ + t(y-y_\circ) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

با توجه به فرض، $\{(x(t),y(t)) \mid t \in [\circ,۱]\} \subset D$. قرار می‌دهیم $\phi(t) := f\big(x(t),y(t)\big)$. در این صورت ϕ تابعی تعریف شده بر $[\circ,۱]$ بوده، بنابر قاعده رنجیری، برای هر t در این بازه

$$\phi'(t) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)y'(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_\circ)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)(y-y_\circ)\\
\phi''(t) &= \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_\circ)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_\circ)(y-y_\circ)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\big(x(t),y(t)\big)(y-y_\circ)^۲\\
&\vdots\\
\phi^{(n)}(t) &= \sum_{k=\circ}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_\circ)^{n-k}(y-y_\circ)^k\\
\phi^{(n+۱)}(t) &= \sum_{k=\circ}^{n+۱}\frac{(n+۱)!}{(n+۱-k)!k!}\frac{\partial^{(n+۱)} f}{\partial x^{n+۱-k}\partial y^k}\big(x(t),y(t)\big)(x-x_\circ)^{n+۱-k}(y-y_\circ)^k
\end{aligned}$$

بنابر این ϕ بر بازهٔ $[\circ,۱]$ مشتق مرتبهٔ $(n+۱)$-ام پیوسته دارد. بنابر بسط تیلور برای توابع یک متغیره، $c\in(\circ,۱)$ وجود دارد که

$$\phi(۱)=\phi(\circ)+\phi'(\circ)(۱-\circ)+\frac{\phi''(\circ)}{۲!}(۱-\circ)^۲+\cdots+\frac{\phi^{(n)}(\circ)}{n!}(۱-\circ)^n+\frac{\phi^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(۱-\circ)^{(n+۱)}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطهٔ فوق و معرفی $(x^*,y^*):=(x(c),y(c))$ نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ فوق، برای (x,y) نزدیک $(x_\circ,y_\circ)$،

$$\begin{aligned}
f(x,y)\approx f(x_\circ,y_\circ) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)\Big)\\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)(y-y_\circ)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)^۲\Big)\\
&+ \cdots \quad +\frac{۱}{n!}\Big(\sum_{k=۱}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)^{n-k}(y-y_\circ)^k\Big)
\end{aligned}$$

مثال. تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=\frac{۱}{\sqrt{x-y}}$ مفروض است. دامنهٔ تعریف این تابع برابر مجموعهٔ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\mid x>y\}$ است. به سادگی مشاهده می‌شود، f بر دامنهٔ تعریف خود دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه است. به این ترتیب، به طور مثال اگر بخواهیم مقدار f را در یک همسایگی از نقطهٔ $(۲,۱)$ با یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ تقریب بزنیم آنکاه

$$\begin{aligned}
f(x,y)\approx f(۲,۱) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱)(x-۲)+\frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱)(y-۱)\Big)\\
&+ \frac{۱}{۲!}\Big(\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲,۱)(x-۲)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۲,۱)(x-۲)(y-۱)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲,۱)(y-۱)^۲\Big)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{۱}{۲}(x-y)^{-\frac{۳}{۲}}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{۱}{۲}(x-y)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x,y)=\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}} \quad , \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(x,y)=-\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}} \quad , \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x,y)=\frac{۳}{۴}(x-y)^{-\frac{۵}{۲}}$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱)=-\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱)=\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۲,۱)=\frac{۳}{۴}\ ,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(۲,۱)=-\frac{۳}{۴}\ ,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۲,۱)=\frac{۳}{۴}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\sqrt{x-y}} \approx ۱+\big(-\frac{۱}{۲}(x-۲)+\frac{۱}{۲}(y-۱)\big)+\frac{۱}{۲}\big(\frac{۳}{۴}(x-۲)^۲-\frac{۳}{۲}(x-۲)(y-۱)+\frac{۳}{۴}(y-۱)^۲\big)$$