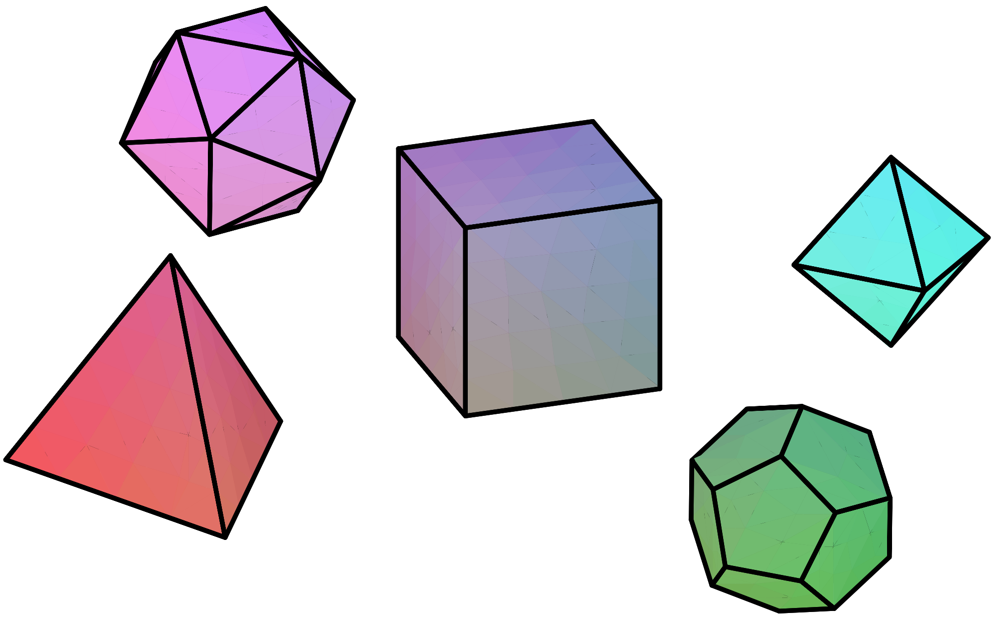
به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

تمرین‌هایی در ریاضی عمومی ۲



ویرایش پنجم : زمستان ۱۳۸۹

۱) مقدار $\lim_{t\to -1}(\frac{t^2-1}{t-1}\,\mathbf{i}+\frac{t^3+1}{t+1}\,\mathbf{j})$ را محاسبه کنید.

۲) برای تابع برداری $\gamma(t)=\cos t\ \mathbf{i}+e^t\ \mathbf{j}$ تابع اولیه‌ی $\mathbf{\Gamma}$ را چنان بیابید که $\mathbf{\Gamma}(0)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

۳) خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t)=\cos t\ \mathbf{i}+\sin t\ \mathbf{j}+t\ \mathbf{k}$ رادر جهت بردار $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ بر صفحه‌ی xoy تصویر می کنیم. معادلات پارامتری خم تصویر را بیابید.

۴) خم $\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{i}+9t^2\mathbf{j}+27t^3\mathbf{k}$ را به طور قائم بر صفحه‌ی $x+y+z=0$ تصویر کنید.

۵) متحرکی در صفحه‌ی xy طبق معادله‌ی

$$y=f(t,x)=e^{-x}\cos t+\sin(x+t^2)$$

حرکت می‌کند. پس از گذشت زمان $t=2\ sec$ متحرک در نقطه‌ای به طول $x=3m$ و دارای مؤلفه‌ی سرعت افقی $\frac{dx}{dt}=5\ m/sec$ می‌باشد. مؤلفه‌ی سرعت عمودی آن‌را به دست آورید.

۶) مسیر حرکت یک متحرک در صفحه توسط تابع برداری $\mathbf{r}(t)=4\cos^3 t\mathbf{i}+4\sin^3 t\mathbf{j}$ به ازای $t\geq 0$ تعیین می‌شود. کجا و چه موقع سرعت متحرک ماکزیمم و مینیمم می‌شود؟ آیا این متحرک هرگز از حرکت باز می‌ایستد؟

۷) آیا از رابطه‌ی $\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\|\mathbf{r}\|$ همواره مقدار ثابتی است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۸) در چه نقاطی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$ با صفحه‌ی $x+2y+z-1=0$ موازی هستند؟

۹) خم C با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}+2t^3\mathbf{k}$ مفروض است. خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $M\neq(0,0,0)$ واقع بر C صفحات xoy و xoz را به ترتیب در نقاط A و B قطع می کند.

الف) معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی A را تعیین کنید.

ب) نشان دهید $\frac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|}$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

۱۰) ثابت کنید خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x=2t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ صفحه‌ی $x+y+z=3$ را قطع می کنند. مکان هندسی نقاط تقاطع را بیابید.

۱۱) فرض کنید C یک خم هموار واقع بر کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد. ثابت کنید بردار مماس و بردار موضع در هر نقطه از منحنی C بر یکدیگر عمود هستند.

۱۲) خم‌های $C_۱$ با معادلات پارامتری $x = t \ , \ y = t^۲$ و $C_۲$ با معادلات پارامتری $x = \sinh t \ , \ y = ۲\cosh t$ مفروضند.

الف) نقاط برخورد دو خم را به دست آورید.

ب) زاویه‌ی بین بردارهای مماس بر دو منحنی در نقطه‌ی برخورد را تعیین نمایید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۱۳) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر است. f را چنان بیابید که خم C به معادله برداری $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + f(t)\mathbf{k}$ مسطح باشد.

۱۴) خم C با معادلات پارامتری $x = \cos t \ , \ y = \sin t \ , \ z = t$ مفروض است.

الف) ثابت کنید خطوط مماس بر خم C در نقاط مختلف، صفحه‌ی xoy را تحت زاویه‌ی ثابتی قطع می کنند.

ب) برای نقطه‌ی $P \in C$ فرض کنید Q نقطه‌ای بر خط مماس بر منحنی در P، طول $\overrightarrow{PQ}$ برابر با طول منحنی بین نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ و نقطه‌ی P و جهت $\overrightarrow{PQ}$ خلاف جهت بردار مماس باشد. مکان هندسی نقطه‌ی Q را به دست آورید.

۱۵) طول قوس خم‌های زیر را در فاصله‌ی داده شده محاسبه کنید.

الف) $۱ \leq y \leq ۳ \qquad x = \dfrac{y^۳}{۶} + \dfrac{۱}{۲y}$

ب) $۰ \leq y \leq ۲ \qquad x = \displaystyle\int_۰^y \sqrt{\cosh t}\, dt$

ج) $-\dfrac{\pi}{۲} \leq x \leq \dfrac{\pi}{۲} \qquad y = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{۲}}^x \sqrt{\cos t}\, dt$

د) $۰ \leq y \leq \dfrac{\pi}{۴} \qquad x = \ln \cos y$

۱۶) فرض کنید C نمودار تابع $y = a\cosh(\dfrac{x}{a})$ در صفحه‌ی xoy باشد. همچنین فرض کنید s طول کمان اندازه گرفته شده ازنقطه‌ی $(۰, a)$ بر منحنی تا نقطه‌ی دلخواه (x, y) باشد.

الف) نشان دهید معادلات پارامتری منحنی C بر حسب پارامتر طول کمان s، عبارت است از $x = a\sinh^{-۱}(\dfrac{s}{a}) \ , \ y = \sqrt{a^۲ + s^۲}$.

ب) بردارهای یکه‌ی مماس، قائم اصلی و انحنای منحنی را در یک نقطه‌ی دلخواه تعیین نمایید.

۱۷) خم C با معادلات پارامتری $x = \sin t \ , \ y = \cos t \ , \ z = \cos^۲ t$ مفروض است. نقاطی از این منحنی را به دست آورید که خط واصل از مبدأ به این نقاط، بر منحنی عمود باشد (یعنی بر خط مماس بر منحنی عمود باشد).

۱۸) الف) نشان دهید محیط بیضی به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ $(a \geq b > ۰)$ از رابطه‌ی $L = ۴aE(\frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a})$ به دست می‌آید که در آن

$$E(k) = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - k^۲ \sin^۲ t}\, dt.$$

ب) نشان دهید طول قوس منحنی $y = \sin x$، به ازای $-\pi \leq x \leq \pi$ با محیط بیضی $\frac{x^۲}{۲} + y^۲ = ۱$ برابر است.

۱۹) خم C به معادلات پارامتری $x = \cosh t\ ,\ y = \sinh t\ ,\ z = t + ۱$ مفروض است. انحنای این خم و صفحه‌ی بوسان آن را در نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ پیدا کنید.

۲۰) الف) نشان دهید کلیه‌ی صفحات قائم بر خم

$$\lambda(t) = a \sin^۲ t\mathbf{i} + a \sin t \cos t\mathbf{j} + a \cos t\mathbf{k}$$

از مبدأ مختصات می گذرند.

ب) ثابت کنید خم فوق بر یک کره واقع است.

۲۱) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم C به معادلات پارامتری زیر را در نقطه‌ی دلخواه بیابید.

$$x = \frac{۲t + ۱}{t - ۱} \quad , y = \frac{t^۲}{t - ۱} \quad , z = t + ۲$$

۲۲) فرض کنید C خم همواری به معادله‌ی برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. ثابت کنید صفحه‌ی قائم اصلی بر منحنی در تمام نقاط بر نقطه‌ای ثابت واقع است اگر وتنها اگر C بر یک کره قرار داشته باشد.

۲۳) خط مماس و صفحه‌ی عمود بر منحنی فصل مشترک دو رویه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱۰$ و $x^۲ + z^۲ = ۱۰$ را در نقطه‌ی $P = (۳, ۱, ۱)$ پیدا کنید.

۲۴) برای خم C با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^۲\mathbf{j} + t^۳\mathbf{k}$، معادله‌ی صفحه‌ی بوسان را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ محاسبه کنید.

۲۵) خم C به معادلات پارامتری $x = e^t \sin ۲t\ ,\ y = e^t \cos ۲t\ ,\ z = ۲e^t$ و نقطه‌ی $P_۰$ بر آن نظیر $t = ۰$ مفروضند. معادله‌ی صفحه‌ی بوسان و انحنای منحنی را در این نقطه تعیین کنید.

۲۶) خم C نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{۲} \sin t)\mathbf{i} + (\sqrt{۲} \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{۵}(t - \frac{\pi}{۲})\mathbf{k}$ است. نقطه‌ی $P = (\sqrt{۲}, ۰, ۰)$ را بر C در نظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین بردار سرعت، بردارهای یکه‌ی مماس، قائم اصلی، قائم دوم ، صفحه‌های قائم اصلی، قائم دوم، صفحه‌ی بوسان و انحنای C در نقطه‌ی P.

۲۷) برای خم نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = (\tan^{-۱} t)\mathbf{i} + (t - \tan^{-۱} t)\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln(۱ + t^{۲})\mathbf{k}$ انحنا را محاسبه کنید .

۲۸) خم C به معادلات پارامتری $x = e^t \sin ۲t \quad y = e^t \cos ۲t \quad z = ۲e^t$ مفروض است. نقطه‌ی P روی C نظیر $t = ۰$ می باشد. مطلوب است

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در نقطه‌ی P.

ب) انحنای C در نقطه‌ی P.

۲۹) اعداد حقیقی و غیر صفر a و b را چنان تعیین کنید که دو منحنی به معادلات $y = ax(b - x)$ و $y(x + ۲) = x$ تنها در یک نقطه همدیگر را قطع کنند، در آن نقطه مماس مشترک داشته باشند و انحنای این دو منحنی در آن نقطه مساوی باشد.

۳۰) انحنای خم C حاصل از تلاقی رویه‌های $x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} = ۱$, $y^{۲} - ۲x + z = ۰$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ بیابید.

۳۱) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم حاصل از تلاقی رویه‌های $y^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$ و $x^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$ را در یک نقطه‌ی دلخواه بیابید.

۳۲) اگر خم C توسط معادلات پارامتری

$$x = \int_{۰}^{\theta} \cos(\frac{۱}{۲}\pi t^{۲})\, dt \qquad y = \int_{۰}^{\theta} \sin(\frac{۱}{۲}\pi t^{۲})\, dt$$

تعریف شده باشد، انحنای C را بر حسب پارامتر طول قوس s به دست آورید، که در آن s از نقطه‌ی $(۰, ۰)$ محاسبه می شود.

۳۳) مؤلفه‌های مماس و نرمال a_T و a_N تابع شتاب نقطه‌ی P با بردار مکان

$$\mathbf{r}(t) = (\tan^{-۱} t)\mathbf{i} + (t - \tan^{-۱} t)\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln(t^{۲} + ۱))\mathbf{k}$$

و انحنای خم نظیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید.

۳۴) ماکزیمم مقدار انحنای خم $y = e^x$ را پیدا کنید.

۳۵) نشان دهید شعاع انحنای خم $y = \cosh x$ در نقطه‌ی $P = (x, y)$ برابر $y^{۲}$ است.

۳۶) در چه نقطه‌ای از سهمی $x^{۲} = ۸y$ شعاع انحنا برابر $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ می‌شود؟

۳۷) نقطه‌ای از خم $y = e^x$ را تعیین کنید که شعاع انحنا در آن نقطه مینیمم باشد.

۳۸) برای خم $y = e^x$ معادله‌ی دایره‌ی بوسان را در نقطه‌ی $(۰, ۱)$ پیدا کنید.

۳۹) نقطه‌ای از خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{a}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ را بیابید که دارای بیشترین مقدار انحنا است. مختصات مرکز انحنای نظیر این نقطه را به دست آورید.

۴۰) خم نظیر تابع

$$t \geq \pi \quad \mathbf{r}(t) = (\int_{\pi}^{t} \frac{\cos u}{u}\, du)\mathbf{i} + (\int_{\pi}^{t} \frac{\sin u}{u}\, du)\mathbf{j}$$

مفروض است.

الف) طول قوس این خم را که از مبدأ مختصات تا نقطه‌ی نظیر t اندازه‌گیری شده به دست آورید.

ب) معادله‌ی دایره‌ی بوسان این خم را در مبدأ مختصات به دست آورید.

۴۱) خم‌های $C_۱$ و $C_۲$ با معادلات پارامتری $x = t\ ,\ y = \cosh t$ و $x = t - \sinh t \cosh t\ ,\ y = ۲\cosh t$ مفروضند.

الف) دایره‌ی بوسان منحنی $C_۱$ را در نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ به دست آورید.

ب) نقاط P و Q را به ترتیب روی منحنی های $C_۱$ و $C_۲$ نظیر t در نظر بگیرید. نشان دهید خط مماس بر $C_۲$ در نقطه‌ی Q بر خط مماس بر $C_۱$ در نقطه‌ی P عمود است.

۴۲) سه نقطه‌ی $O = (۰, ۰, ۰)$ و $B = (۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳})$ و $C = (-۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳})$ را بر منحنی D به معادله‌ی

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}t^۲\mathbf{j} + \frac{۱}{۳}t^۳\mathbf{k}$$

در نظر می گیریم.

الف) معادلات صفحه‌ی بوسان خم D را در نقاط O، B و C به دست آورید.

ب) ثابت کنید صفحه‌های بند الف) از نقطه‌ای واقع بر صفحه‌ی گذرنده از نقاط O، B و C می گذرند. (به بیان دیگر نشان هر چهار صفحه از یک نقطه می‌گذرند و مختصات این نقطه را پیدا کنید).

۴۳) شاخه‌ی راست هذلولوی C به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ ، $a, b > ۰$ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین یک معادله‌ی پارامتری مناسب برای C و تعیین بردارهای یکه‌ی مماس و نرمال در هر نقطه‌ی واقع بر منحنی. ثابت کنید معادله دکارتی مکان هندسی مراکز انحنای هذلولوی C عبارت است از

$$(\frac{ax}{a^۲ + b^۲})^{۲/۳} - (\frac{by}{a^۲ + b^۲})^{۲/۳} = ۱$$

۴۴) خم C با معادلات پارامتری $x = \sinh t\ ,\ y = \cosh t$ در صفحه مفروض است.

الف) بردارهای یکه‌ی مماس و قائم اصلی را در نقطه‌ی دلخواه M به دست آورید.

ب) انحنا و مختصات مرکز انحنا را در یک نقطه‌ی دلخواه محاسبه کنید.

ج) مکان هندسی مراکز انحنای منحنی C را به دست آورید.

۴۵) خم به معادله‌ی $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ مفروض است ($a > 0$).

الف) ثابت کنید انحنا در هر نقطه‌ی $P = (x, y)$ واقع بر این خم برابر $\frac{a}{y^2}$ است.

ب) انحنا و دایره‌ی بوسان این خم را در نقطه‌ی $(0, a)$ به دست آورید.

ج) ثابت کنید انحنای این خم در هر نقطه‌ی $(0, a)$ ماکزیمم مطلق است.

۴۶) خم C با معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = \sqrt{1 - 4t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید صفحه‌ی بوسان این منحنی در هر نقطه صفحه‌ی ثابتی است.

ب) مطلوب است تعیین مرکز انحنا و معادله‌ی پارامتری دایره‌ی انحنای این منحنی.

۴۷) برای خم C، نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + a(sint - t\cos t)\mathbf{j}$

الف) $T(t)$، $N(t)$ و κ را در هر نقطه بیابید.

ب) مکان هندسی مراکز انحنای C را بیابید.

۴۸) نقطه‌ای از خم C، نظیر تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ را به دست آورید که انحنا در آن ماکزیمم باشد. مختصات مرکز انحنای نظیر این نقطه را مشخص کنید.

۴۹) مکان هندسی مراکز انحنای یک خم **گسترده‌ی** آن خم نامیده می‌شود. مطلوب است تعیین معادله‌ی گسترده‌ی خم $y = x^2$.

توابع چند متغیره و رویه‌ها

۱) تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=\ln xyz$ مفروض است. مقدار این تابع را در نقاط داده شده به دست آورید. الف) $P=(\sqrt{e},\sqrt{e},\sqrt{e})$

ب) $Q=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

۲) در صورتی که برای تابع دو متغیره‌ی f رابطه‌ی $f(x+y,x-y)=2xy+y^2$ برقرار باشد، ضابطه‌ی تابع f را پیدا کنید.

۳) حوزه‌ی تعریف توابع چند متغیره‌ی زیر را مشخص کنید.

الف) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

ب) $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

ج) $z=\ln xy$

د) $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

۴) نمودار تابع دو متغیره‌ی $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ را توصیف کنید.

۵) برای تابع f باضابطه‌ی $f(x,y)=x^2+4y^2$ منحنی تراز $f(x,y)=c$ را به ازای $c=0,1,2,3,4$ رسم کنید.

٦) رویه‌ی تراز $f(x,y,z)=c$ را که در آن $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ و $0\le c<\infty$ توصیف کنید.

۷) نمودار معادلات زیر را در فضای سه بعدی توصیف و رسم نمایید.

الف) $x^2-y^2=0$ ‏ ‏ ‏ ‏ ه) $x^2+z^2=2z$

ب) $xy=-1$ ‏ ‏ ‏ ‏ و) $y^2-8x=0$

ج) $x^2-y^2+z^2=0$ ‏ ‏ ‏ ‏ ز) $y^2+z^2-x=0$

د) $y^2+4x^2+z-3=0$

۸) مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $x=4z^2$ حول محور z.

۹) مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y=\sqrt{z}$ حول محور y.

۱۰) معادله‌ی رویه‌ی دوار حاصل از دوران بیضی به معادله‌ی $9x^2+4z^2=36$ حول محور x را به دست آورید.

۱۱) مطلوب است رسم نمودار $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

۱۲) رویه‌ی S از دوران هذلولی $x^2 - z^2 = 4$ حول محور z حاصل می‌شود.

الف) معادله‌ی رویه‌ی S را به دست آورید.

ب) نشان دهید از نقطه‌ی $M = (2, 0, 0)$ واقع بر رویه‌ی S دقیقاً دو خط راست می‌گذرند که کاملاً بر رویه‌ی فوق قرار دارند. معادله‌ی این خطوط را به دست آورید.

ج) معادله‌ی پارامتری منحنی C حاصل از تلاقی رویه‌ی S را با صفحه‌ی $z = 1$ به دست آورید.

۱۳) نشان دهید از نقطه‌ی $M = (0, 1, -1)$ واقع بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ می‌توان صفحه‌ای گذراند که رویه‌ی S را در دو خط قطع کند. معادله‌ی این صفحه را بنویسید.

۱۴) منحنی C با معادلات پارامتری $x = ae^t \cos t \ , \ y = ae^t \sin t \ , \ z = ae^t$ را به ازای $t \geq 0 \ , \ a > 0$ در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید این منحنی روی یک مخروط قرار دارد، معادله‌ی مخروط را بدست آورده، نمودار مخروط و منحنی را رسم کنید.

ب) ثابت کنید منحنی C تمام مولدهای مخروط را با زاویه‌ی ثابتی قطع می‌کند.

۱۵) نشان دهید خم نظیر $\mathbf{r}(t) = (t\cosh t)\mathbf{i} + (t\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ بر یک رویه‌ی درجه دوم قرار دارد. معادله‌ی رویه را بنویسید و نام آن‌را ذکر کنید.

۱۶) الف) رویه‌ی $(z-2)^2 = 2xy$ را توصیف کنید.

ب) معادلات پارامتری مقاطع این رویه را با صفحه‌ی $y - \frac{1}{2}x = 0$ به دست آورید.

۱۷) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ مفروض است. نوع رویه را مشخص کرده و آن را رسم کنید. ثابت کنید که از مبدأ مختصات تنها دو خط می‌گذرد که بر S قرار دارند.

۱۸) نشان دهید خم با معادله‌ی برداری

$$\mathbf{r}(t) = (2\sqrt{t}\cos t)\mathbf{i} + (3\sqrt{t}\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{1-t}\ \mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

روی یک رویه‌ی درجه‌ی دوم قرار دارد. معادله‌ی این رویه را مشخص کرده و آن را توصیف نمایید.

۱۹) نشان دهید کلیه‌ی صفحات قائم بر منحنی C با معادلات پارامتری $x = a\sin^2 t \ , \ y = a\sin t\cos t \ , \ z = a\cos t$ از مبدأ می‌گذرند. همچنین نشان دهید منحنی فوق بر یک رویه‌ی درجه‌ی دوم قرار دارد.

۲۰) نشان دهید مقطع صفحه‌ی $x = 1$ با هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس بر این هذلولی را در نقطه‌ی $P = (1, 1, \sqrt{3})$ بنویسید.

۲۱) (الف) نشان دهید که نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی انباشتگی خم $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ است (یعنی درون هر دایره‌ی دلخواه به مرکز $(0, 0)$ با این خم نقطه‌ی مشترک دیگری غیر از $(0, 0)$ دارد).

(ب) نشان دهید تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۲۲) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ در مبدأ دارای حد نیست، اگر چه در امتداد هر خطی که از مبدأ می‌گذرد به مقدار یکسانی میل می‌کند.

۲۳) تابع f روی $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 1\}$ به صورت

$$f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1}$$

تعریف شده است. آیا f روی D پیوسته است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲۴) تابع f را با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

در نظر بگیرید. آیا این تابع در تمام نقاط پیوسته است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲۵) نشان دهید تابع $z = f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ در $(0, 0)$ دارای حد نیست.

۲۶) نشان دهید تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & x + y \neq 0 \\ 0 & x + y = 0 \end{cases}$$

۲۷) با استفاده از تعریف، پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $(0, 0)$ بررسی نمایید.(r یک عدد ثابت گویا است)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^r x^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

۲۸) مشخص کنید آیا تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y}{x^۲+y^۲+۲x+۱} & (x,y)\neq(-۱,۰)\\ ۰ & (x,y)=(-۱,۰)\end{cases}$$

در نقطه‌ی $(-۱,۰)$ پیوسته است؟

۲۹) برای تابع $f(x,y)=\dfrac{x^۲y^۲}{x^۲y^۲+(x-y)^۲}$ نشان دهید

$$\lim_{x\to ۰}[\lim_{y\to ۰}f(x,y)]=\lim_{y\to ۰}[\lim_{x\to ۰}f(x,y)]=۰$$

با این وجود $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)$ وجود ندارد.

۳۰) برای تابع $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{۱}{x}\sin\dfrac{۱}{y}$ نشان دهید حدود مکرر

$$\lim_{x\to ۰}[\lim_{y\to ۰}f(x,y)],\lim_{y\to ۰}[\lim_{x\to ۰}f(x,y)]$$

وجود ندارد اما $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)$ وجود دارد.

۳۱) تمام مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x,y)=\ln x+\sqrt{x^۲+y^۲}$

ب) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$

ج) $f(x,y,z)=x^{yz}$

۳۲) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}(xy)\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

مفروض است. نشان دهید

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)\neq\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$$

۳۳) ثابت می‌شود اگر برای تابع f مشتق‌های جزئی f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند آنگاه $f_{xy}=f_{yx}$. این مطلب را با محاسبه‌ی مستقیم مشتق‌های جزئی f_{xy}وf_{yx} برای تابع $f(x,y,z)=e^{xyz}$ تحقیق کنید.

۳۴) برای $w=\dfrac{z}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\dfrac{\partial^۴ w}{\partial^۲ z\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۳۵) نشان دهید توابع $u(x,y)=e^x\cos y$ و $v(x,y)=e^x\sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

ب) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

ج) $u_{xx}+u_{yy}=0$

د) $v_{xx}+v_{yy}=0$

معادلات (الف) و (ب) را معادلات کوشی — ریمان می‌نامند که در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در ضمن هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۳۶) معادله‌ی $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند.

۳۷) تابع دو متغیره‌ی f روی D همگن از درجه‌ی n $(n\in\mathbb{N})$ نامیده می‌شود اگر به ازای هر $(x,y)\in D$ و هر عدد حقیقی و مثبت t که $(tx,ty)\in D$، داشته باشیم

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

برای چنین توابعی نشان دهید

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y)$$

۳۸) تابع $f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ مفروض است.

(الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید.

(ب) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۹) نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره‌ی f، همگن از درجه‌ی n باشد آنگاه مشتقات جزیی آن f_x و f_y، همگن از درجه‌ی $n-1$ هستند.

۴۰) (الف) فرض کنید توابع f و g توابعی یک متغیره هستند که روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی حداقل دو بار مشتق‌پذیرند. اگر $c \in \mathbb{R}$ و $c \neq ۰$، نشان دهید تابع u با تعریف $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ یک جواب برای معادله‌ی موج یعنی معادله‌ای به شکل زیر است.

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$$

(ب) تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر جوابی برای معادله‌ی موج هستند.

(۱) $u(x,t) = x^۲ + c^۲t^۲$

(۲) $u(x,t) = \sin x \sin ct$

(۳) $u(x,t) = e^x \cosh ct$

۴۱) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = ۲xy - ۳xz + yz$، نمو تابع یعنی $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z)$ را در حالتی که $(a,b,c) = (۲,۱,۴)$، $\Delta x = ۳$، $\Delta y = -۱$ و $\Delta z = ۲$ محاسبه کنید.

۴۲) دیفرانسیل کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x,y,z) = x^۲y - xy^۳ + x^۳y^۲$

(ب) $f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}$

(ج) $f(x_۱, x_۲, ..., x_n) = x_۱x_۲...x_n$

۴۳) با استفاده از دیفرانسیل کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(۱/۰۶)^۲ + (۱/۹۷)^۳}$ را به دست آورید.

۴۴) نشان دهید تابع $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۴۵) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$$

مفروض است. نشان دهید که این تابع در $(۰,۰)$ پیوسته است و مشتقات جزیی آن در این نقطه وجود دارند اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۴۶) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^۲ + y^۲)\sin \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

در مبدا مشتق‌پذیر است، هر چند که مشتقات جزیی آن در مبدأ پیوسته نیستند.

۴۷) تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^{۲}(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ پیوسته است.

ب) نشان دهید که f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۴۸) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^{۲}+y^{۲}} & x^{۲}+y^{۲}\neq ۰\\ ۰ & x^{۲}+y^{۲}=۰\end{cases}$$

در هر نقطه از صفحه دارای مشتقات جزیی است اما در مبدأ ناپیوسته است.

۴۹) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در مبدأ پیوسته و دارای مشتقات جزئی است ولی مشتق‌پذیر نیست. توضیح دهید چرا این موضوع تناقضی با قضایای مربوط به مشتق‌پذیری ندارد.

۵۰) ثابت کنید تابع $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^{۳}+y^{۳}}$ در مبدأ دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) نیست .

۵۱) تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(y-۱)}{\sqrt{x^{۲}+(y-۱)^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۱)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۱)\end{cases}$$

مفروض است.

الف) ثابت کنید f در نقطه‌ی $(۰,۱)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در نقطه‌ی $(۰,۱)$ به دست آورید.

ج) آیا f در نقطه‌ی $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است؟(توضیح دهید)

۵۲) فرض کنید $f(x,y)=۳xy^{۲}-۵x-۲xy$ و $\Delta x=۲$ و $\Delta y=-۱$. مطلوب است نمو تابع f در نقطه‌ی $(-۱,۳)$ و دیفرانسیل تام (کامل) تابع در همان نقطه.

۵۳) ثابت کنید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۴+y^۴}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

همه جا دیفرانسیل‌پذیر(مشتق‌پذیر) است.

۵۴) دیفرانسیل کل تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\tan^{-۱}\frac{x-y}{x+y}$$

را محاسبه کنید.

۵۵) اگر تابع دو متغیره‌ی f همگن از درجه‌ی n با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد، نشان دهید

$$x^۲f_{xx}(x,y)+۲xyf_{xy}(x,y)+y^۲f_{yy}(x,y)=n(n-۱)f(x,y)$$

۵۶) اگر توابع f و g حداقل دو مرتبه مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت

$$u(x,y)=\frac{۱}{x}[f(x+y)+g(x-y)]$$

تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^۲\frac{\partial u}{\partial x})=x^۲\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}$$

۵۷) اگر تابع z، به عنوان تابعی از x و y، به طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y)+\sin(y+z)=۱$ تعریف شده باشد، عبارت $\dfrac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۵۸) فرض کنید $u=xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy(\frac{\partial z}{\partial x})+yz$$

حال آن که اگر x، y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz$$

۵۹) فرض کنید تابع f تابعی مشتق‌پذیر است و $z=f(\dfrac{x+y}{y})$. ثابت کنید

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

۶۰) فرض کنیم g تابعی یک متغیره و مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{F}$ را به صورت

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}x\mathbf{i}+\frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}y\mathbf{j}$$

تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید در ناحیه‌ای که شامل $(0,0)$ نباشد، تابعی مانند f وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{F}(x,y)=\nabla f(x,y)$$

ب) تابع f را به دست آورید.

۶۱) اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $z=\dfrac{y}{f(x^2+y^2)}$، ثابت کنید

$$\frac{-1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

۶۲) اگر f تابعی سه متغیره باشد به طوری که

$$f(x-y+z,x+y+z,x-y-z)=3x-y+z$$

الف) مطلوب است تعیین $f(x,y,z)$.

ب) اگر $g(x,y,z)=f(x^2,y^2,z^2)$، مطلوب است تعیین رویه‌های تراز g.

ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید

$$(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2+(\frac{\partial g}{\partial z})^2=4g(x,y,z)$$

۶۳) اگر $z=f(x,y)$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ نشان دهید

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

۶۴) فرض کنید $u(x,y)=e^y\cos x$، $x=2t$، $y=t^2$ و $g(t)=u(x(t),y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۶۵) فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x=x(r,\theta)=r\cos\theta$ و $y=y(r,\theta)=r\sin\theta$. ثابت کنید $(\frac{\partial z}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۶۶) فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z = f(x,y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{۱}{۲}$ صدق نماید، نشان دهید $w = f(x+y, x-y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} = ۱$ صدق می‌کند.

۶۷) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z = xy + f(x^۲ + y^۲)$ در معادله‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^۲ - x^۲$ صدق می‌کند.

۶۸) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z = f(x,y)$. اگر $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ و $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α ثابت)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial v})^۲$.

۶۹) ثابت کنید تابع $f(x,t) = \int_۰^{\frac{x}{۲\sqrt{kt}}} e^{-\sigma^۲} d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - \frac{\partial f}{\partial t} = ۰$ صدق می‌کند (k ثابت).

۷۰) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ب) $w = f(\frac{xy}{x^۲ + y^۲})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

۷۱) فرض کنید توابع f و g دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

۷۲) فرض کنید معادله‌ی $xz^۲ = \ln(y^۲ + z^۲)$، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند (تابع ضمنی). مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$.

۷۳) تابع $z = z(x,y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = ۰$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

۷۴) اگر f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزیی پیوسته باشد و

$$f(x_۰, y_۰) = f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$

$$f_{xx}(x_۰, y_۰) f_{yy}(x_۰, y_۰) - f_{xy}^۲(x_۰, y_۰) > ۰$$

نشان دهید نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی تنها برای نمودار $f(x,y) = ۰$ می‌باشد (یعنی یک همسایگی از P وجود دارد که در آن f تنها در P برابر صفر می‌شود). نشان دهید که مبدا یک نقطه‌ی تنها برای خم به معادله‌ی $x^۳ - y^۳ + xy^۲ - yx^۲ + x^۲ + y^۲ = ۰$ است.

۷۵) مکان هندسی نقاطی از رویه‌ی $x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + xy + ۲xz + ۴yz = ۸$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۷۶) خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ و $xy + z = ۰$ را در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۲)$ بیابید.

۷۷) صفحات مماس در نقطه‌ی $M = (x, y, z)$ به ازای $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$ بر رویه‌ی

$$x^{۲/۳} + y^{۲/۳} + z^{۲/۳} = a^{۲/۳} \quad (\text{عددی ثابت و مثبت } a)$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع می‌کنند. نشان دهید

$$OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ = \text{مقدار ثابت}$$

۷۸) اگر f همه جا مشتق‌پذیر باشد نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = x\sin(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۷۹) بیضی‌گون به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ مفروض است.

(الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد.

(ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟(چرا؟)

۸۰) خم C فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و $x^۲ + y^۲ + z = ۰$ می‌باشد. معادلات خط مماس بر منحنی C را در نقطه‌ی $(۱, ۰, -۱)$ بیابید.

۸۱) معادلات صفحات مماس بر رویه‌ی $z = \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}$ را که عمود بر خط $x - ۱ = y = z - ۳$ هستند، پیدا کنید. ضمنا نقاطی از رویه‌ی فوق را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور zها باشند.

۸۲) نقاطی را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید که در آن نقاط بردار گرادیان تابع $f(x, y) = \ln(\frac{۱}{x} + y)$ برابر $\vec{a} = -\frac{۱۶}{۹}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد.

۸۳) رویه‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ مفروض است.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ به دست آورید.

(ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود با رویه را به دست آورید.

(ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس با رویه‌ی فوق دقیقا در دو خط راست اشتراک دارد.

۸۴) رویه‌ی $z=x^2+y^2$ و نقاط $A=(1,1,0)$ و $B=(2,2,2)$ خارج از رویه مفروضند.

(الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از نقطه‌ی A گذشته بر رویه‌ی فوق عمود باشد.

(ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه‌ی فوق مماس باشد.

۸۵) نشان دهید بر مخروط $z^2=2x^2+4y^2$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $12x+14y+11z=25$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را به دست آورید.

۸۶) مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و صفحه‌ی $z=2$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سطح سهمی‌گون رسم نماییم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۸۷) نقاطی را بر روی رویه‌ی $2x^2+y^2-z^2=1$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $y=x$ و $y=z$ باشد.

۸۸) معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $x^2+y^2+9z^2=1$ عمود باشند.

۸۹) ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz=a^3$ ($a>0$ ثابت) با صفحات مختصات، چهار وجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۹۰) نشان دهید کلیه‌ی صفحات مماس بر رویه‌ی $z=yf(\frac{y}{x})$ از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.

۹۱) معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $x^2+y^2+z^2=3$ را تعیین کنید که شامل خط $L:\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t \\ z=t+1 \end{cases}$ باشد.

۹۲) معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده پیدا کنید.

(الف) $xyz=a^3$، P هر نقطه‌ی دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ است.

(ب) $z=2\sin x\cos y$، $P=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},1)$.

۹۳) در کدام نقطه (یا نقاط) از مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ توضیح دهید.

۹۴) معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌ی درجه‌ی دوم $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ را در هر نقطه‌ی دلخواه از فضای $\mathbb{R}^3$ پیدا کنید.

۹۵) بیضی‌گون $x^2+y^2+3z^2=66$ دارای دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x+y+z=1$ می‌باشد. معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۹۶) نشان دهید رویه‌های $z=xy-y^2+8y-5$ و $z=e^{2x+y+4}$، در نقطه‌ی $P=(-3,2,1)$ بر هم مماسند و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

۹۷) فرض کنید C نمودار $F(x,y)=\circ$ باشد و F دارای مشتقات جزئی پیوسته است که همزمان صفر نمی‌شوند. نشان دهید خط مماس بر این نمودار در نقطه‌ی $P=(x_\circ,y_\circ)$ دارای معادله‌ای به صورت زیر می‌باشد

$$F_x(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)+F_y(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)=\circ$$

۹۸) با توجه به مساله‌ی قبل خطوط مماس و قائم بر منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $x^۳y-x^۲y^۲+xy^۳=۶\ ,\ P=(۱,۲)$.

(ب) $x^y=y^x\ ,\ P=(۱,۱)$.

۹۹) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases}\circ & y\le\circ \ \text{یا}\ y\ge x^۲\\ ۱ & \circ<y<x^۲\end{cases}$$

در مبدأ در هر سویی دارای مشتق‌سویی است، اما مشتق‌پذیر نیست.

۱۰۰) فرض کنید درجه‌ی حرارت در نقطه‌ی (x,y) از صفحه‌ی xy با رابطه‌ی $T(x,y)=\dfrac{۴x}{x^۲+y^۲}$ بیان می‌شود. ثابت کنید در هر نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ)$ روی دایره‌ی $(x-۲)^۲+y^۲=۴$، بین همه سوها، در سوی شعاع این دایره ماکزیمم مقدار تغییر درجه حرارت را داریم. این مقدار تغییر چقدر است؟

۱۰۱) کلیه‌ی سوهای $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ را پیدا کنید که برای تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y-۲ & y=۱\ \ \text{یا}\ \ x=۱\\ t & y\neq ۱\ ,\ x\neq ۱\end{cases}$$

$D_{\mathbf{u}}f(۱,۱)$ (مشتق سویی f در سوی $\mathbf{u}$ در $(۱,۱)$) وجود داشته باشد.

۱۰۲) سوهایی را بدست آورید که تابع $f(x,y)=(x+۱)^۲+(y+۱)^۲$ در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ دارای مشتق سویی برابر با ۲ باشد.

۱۰۳) برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی P و در جهت بردار $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

الف) $f(x,y)=x^۳-۲xy+y^۲+۸\ ,\ P=(-۱,۴)\ ,\ \mathbf{a}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$.

ب) $f(x,y)=\ln(x^۲+y^۲)\ ,\ P=(۱,۳)\ ,\ \mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

ج) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{xy}\ ,\ P=(-۱,۱,۲)\ ,\ \mathbf{a}=-۱\circ\mathbf{i}+۱\circ\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$.

۱۰۴) اگر $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$، مشتق سویی f را در نقطه‌ی $P=(۲,۳,-۴)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۱۰۵) اگر $f(x,y)=xy$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(۳,۴)=\circ$.

۱۰۶) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin(\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مفروض است. کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۱۰۷) تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^{2}+y^{2}}) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(0,0)$ و در سوی بردار $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ تعیین کنید.

ب) مطلوب است تعیین $D_{\mathbf{v}}f(0,0).\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰۸) مشتق سویی توابع زیر را در نقاط داده شده و درجهت‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x,y,z)=\cos(xy)+\sin(yz)\ ,\ P_{0}=(0,\pi,1)\ ,\ \vec{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

ب) $g(x,y,z)=ze^{xy}\ ,\ P_{0}=(1,0,1)\ ,\ \vec{v}=\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

۱۰۹) تابع $f(x,y)=x^{2}-2xy^{2}$ و نقطه‌ی $P_{0}=(1,-2)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی P_{0} در چه جهتی حرکت نماییم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۱۱۰) رویه‌ی S به معادله‌ی $z=4-x^{2}-y^{2}$ و نقطه‌ی $(1,1,2)$ بر آن مفروض است. از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد. از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر ننماید.

۱۱۱) اکسترمم‌های موضعی (نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^{2}$ تعیین کنید.

(الف) $f(x,y)=xy(1-x^{2}-y^{2})$

(ب) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+xy \quad (x>0,y>0)$

۱۱۲) به کمک یک تابع دو متغیره‌ی مناسب و محاسبه‌ی مینیمم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L_{1}:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t-1\end{cases}$ و $L_{2}:\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=t\end{cases}$ را تعیین نمایید.

۱۱۳) روی کره‌ی $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(0,0,2)$ و $(0,2,0)$ مینیمم باشد.

۱۱۴) ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ بیابید که یک رأس آن در مبدأ مختصات، رأس مقابل این رأس روی صفحه‌ی $x+2y+3z=1$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۱۱۵) ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را با شرط $x+y+z=c$ (c مقداری ثابت و $c>0$) بیابید و سپس نتیجه بگیرید که اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند آنگاه

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

۱۱۶) فرض کنید x، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول

$$S^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$$

ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $2k$، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۱۱۷) نقطه‌ای بر خط $L: \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۱۸) مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x، y و z می‌باشد.

الف) تحقیق کنید $ax+by+cz=8$.

ب) x و y و z را طوری تعین کنید که $x^2+y^2+z^2$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۱۹) صفحه $\frac{x}{6a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ مفروض است. a و b و c ($a,b,c>0$) را چنان بیابید که در شرط $a^2+b^2+c^2=1$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد. (حجم هرم $\frac{1}{6}$ حجم متسوی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود.)

۱۲۰) معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که استوانه‌ی $xy=1$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۱۲۱) ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=x+y+z$ را با شرط

$$x^2+y^2+z^2=3a^2 \quad (a>0)$$

به دست آورید و با استفاده از آن نتیجه بگیرید

$$x+y+z \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

۱۲۲) ماکزیمم میزان افزایش تابع $f(x,y,z)=xy^2z^3$ در نقطه‌ی $P=(2,1,-1)$ چقدر است و در چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۱۲۳) فرض کنید تابع دو متغیره‌ی f در داخل یک دایره یا مستطیل D مشتق‌پذیر بوده و در هر نقطه‌ی داخل آن بردار گرادیان برابر با صفر باشد. نشان دهید f روی D یک تابع ثابت است.

۱۲۴) برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y) = 2x^2 + (y-1)^2$

ب) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6$

ج) $f(x,y) = (x-1)\ln xy \quad (xy > 0)$

۱۲۵) فرض کنید تابع f روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^2 - y^2$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۱۲۶) در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که یک تابع سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P = (a,b,c)$ است هرگاه سه مقدار A، D و E که توسط

$$A = f_{xx} \ , \ D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} , E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < 0 \ , \ D > 0 \ , \ E < 0$.

با استفاده از آنچه بیان شد مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۲۷) آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۱۲۸) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y) = x^2 + 8y^2 \ , \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

ب) $f(x,y,z) = 2x - 3y + z - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = 14$

ج) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ x - 2y + 2z = 6$

د) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

ه) $f(x,y,z) = xy + xz \ , \ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

۱۲۹) با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-1,4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$ را پیدا کنید.

۱۳۰) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ نقاطی از بیضی با معادله‌ی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

۱۳۱) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P=(۱,۱,۱)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۲x+۶y-۹z+۱۲=۰$ را پیدا کنید.

۱۳۲) می‌توان نشان داد که اگر تابع سه متغیره‌ی f دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی در نقطه‌ی $P=(a,b,c)$ با قیدهای $g(a,b,c)=۰$ و $h(a,b,c)=۰$ باشد، اگر بردارهای گرادیان توابع f، g و h غیر صفر و غیر موازی باشند، آنگاه دو عدد μ و λ وجود دارند که

$$\nabla f(a,b,c)=\lambda\nabla g(a,b,c)+\mu\nabla h(a,b,c)$$

(مقادیر μ و λ تکثیر کننده‌های لاگرانژ نامیده می‌شوند . فرض بر آن است که توابع f، g و h دارای مشتقات جزیی پیوسته هستند.). با استفاده از توضیحات فوق فاصله‌ی بین مبدأ و فصل مشترک دو صفحه‌ی $x+۲y-z-۵=۰$ و $x-y+z-۳=۰$ را پیدا کرده و پاسخ خود را با حل این مساله به کمک روش‌های دیگر مقایسه نمایید.

۱۳۳) اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x,y)=x^۲+xy\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\ :\ x^۲+y^۲\leq ۱\}$

ب) $f(x,y)=۲x-y^۲\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\ :\ ۰\leq x, ۰\leq y, x+y\leq ۱\}$

ج) $f(x,y)=\sin(\frac{\pi xy}{۲})\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\ :\ ۱\leq x\leq ۲, ۱\leq y\leq ۲\}$

د) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\ :\ ۱\leq x^۲+y^۲\leq ۴\}$

۱۳۴) درجه‌ی حرارت در نقاط مختلف قرص $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\ :\ x^۲+y^۲\leq ۴\}$ توسط $T(x,y)=x^۲+۲y^۲-x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط قرص D را تعیین کنید.

۱۳۵) اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین نمایید.

الف) $f(x,y,z)=x+y+z\ ,\ g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۳=۰$

ب) $f(x,y,z)=xyz\ ,\ g(x,y,z)=۲xy+۳xz+yz=۷۲$

ج) $f(x,y,z)=xy\ ,\ g(x,y,z)=y^۲+z^۲-۱$

۱۳۶) نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x+۴y+۳z=۲$ تعیین کنید که تابع $f(x,y,z)=۲x^۲+۳y^۲+z^۲$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۱۳۷) نزدیکترین نقطه‌ی واقع بر رویه‌ی $xyz=۸$ به مبدا مختصات را تعیین نمایید. ثابت کنید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۱۳۸) در بین مجموعه‌ی مثلث‌ها، مثلثی را تعیین کنید که مجموع سینوس زوایای آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

انتگرال‌گیری چندگانه

۱) مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

(الف) $\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4}\sin(\frac{\pi x}{2})dxdy$

(ب) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy$

(ج) $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\ dA \quad , \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x^2+y^2\le 2\}$

(د) $\int_0^1 \int_0^x \frac{dydx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{dydx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

(ه) $\int\int_A (x-y)\sin(x^2-y^2)\ dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=2$, $y-x=1$, $y-x=-1$, $x+y=0$ است.

(و) $\int\int_A e^{\frac{y}{x+y}}\ dA$

A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=1$, $y=0$, $x=0$ است.

(ز) $\int\int_G x\ dA$

G ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $xy=1$, $xy=3$, $x(1-y)=2$, $x(1-y)=1$ است.

(ح) $\int\int_D \frac{dA}{(xy)^{\frac{2}{3}}}$

D ناحیه‌ی محصور شده باخم $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ است.

۲) مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین نمایید.

الف) مساحت داخل دایره‌ی $x^2+y^2=4$ و سمت راست خط $x=1$.

ب) مساحت محصور بین منحنی‌های $xy=1$، $xy=2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$.

ج) مساحت محصور توسط منحنی‌های $x=4-3y^2$ و $x=y^2$.

۳) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 dx \int_0^{\ln x} e^y dy$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 y^3 dy$$

۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۴-x^{۲}}\frac{xe^{۲y}}{۴-y}dydx$$
$$\int_{۰}^{۸}\int_{x^{\frac{۱}{۳}}}^{۲}\frac{dydx}{y^{۴}+۱}$$

۵) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_{۰}^{۳}dx\int_{۰}^{x}f(x,y)dy+\int_{۳}^{۶}dx\int_{۰}^{۶-x}f(x,y)dy$$

۶) مقدار کدامیک از انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر بیشتر است؟

$$\int\int_{D}(x^{۴}+۶x^{۲}y^{۲}+y^{۴})dA \qquad (i)$$
$$\int\int_{R}(۴x^{۳}y+۴xy^{۳})dA \qquad (ii)$$

۷) انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_{R}xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ محاسبه کنید.

۸) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم اگر برای هر $P,Q\in D$، یک خم با معادلات پارامتری $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ به ازای $۰\leq t\leq ۱$ وجود داشته باشد به قسمی که x و y توابعی پیوسته باشند، برای هر $t\in[۰,۱]$ نقطه‌ی $(x(t),y(t))$ در D قرار گیرد، $P=(x(۰),y(۰))$ و $Q=(x(۱),y(۱))$.
نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a,b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\int\int_{R}f(x,y)\ dA=Af(a,b)$$

(گزاره‌ی فوق قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه است.)

۹) انتگرال $\int\int_{D}\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y=x^{۲}$ و خط $y=x$ به دست آورید.

۱۰) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx|\leq\sqrt{\int_{a}^{b}f^{۲}(x)dx}\sqrt{\int_{a}^{b}g^{۲}(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\int\int_{A}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^{۲}\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)
ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a,b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^۲$$

۱۱) $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ را به دست آورید (راهنمایی: $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx\int_۰^\infty e^{-y^۲}dy = \int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy$ را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید.)

۱۲) انتگرال $\int_۰^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy$ استفاده کنید.)

۱۳) انتگرال‌های دو یا سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \frac{x^۲\sin xy}{y}\,dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^۲ = \pi y$، $x^۲ = \frac{\pi y}{۲}$، $y^۲ = x$ و $y^۲ = \frac{x}{۲}$ می‌باشد.

ب) $\int\int_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y = ۰$، $y = x$ و $x + y = \frac{\pi}{۲}$.

ج) $\int\int\int_T yz\,dV$ که در آن T ناحیه‌ی محدود به صفحات $x+y+z = ۲$، $x+y+z = -۲$، $x-y+z = ۳$، $x-y+z = -۳$، $x+y-z = ۱$ و $x+y-z = -۱$ می‌باشد.

۱۴) به کمک تغییر متغیرهای $x = u\cos^۴ v$ و $y = u\sin^۴ v$ انتگرال دوگانه‌ی

$$\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dA$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x = ۰$، $y = ۰$ و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y} = ۱$ است.

۱۵) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) سطح داخل کاردیوئید $r = a(۱-\cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) سطح محصور بین دوایر $x^۲+y^۲ = x$ و $x^۲+y^۲ = ۲x$ و خطوط $y = ۰$ و $y = x$.

ج) سطح بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = ۲\theta$ به ازای $۰ \leq \theta \leq ۴\pi$.

۱۶) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = a^۲$، از زیر به مخروط $z^۲ = (x^۲+y^۲)\cot^۲\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = ۰$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $۰ < \alpha, \beta < \frac{\pi}{۲}$ هستند.)

۱۷) ناحیه‌ی $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : \pi^۲ \leq x^۲+y^۲ \leq ۴\pi^۲\}$ و تابع $f(x,y) = \sin\sqrt{x^۲+y^۲}$ مفروض هستند. $\int\int_D f(x,y)\,dA$ را به‌دست آورید.

۱۸) فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم

$$D_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$$
$$g(t) = \int\int\int_{D_t} f(x^2 + y^2 + z^2)\ dV$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$ بر حسب تابع f.

۱۹) مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $y = x^2$, $x^2 = 2y$, $x^3 = y^2$, $x^3 = 2y^2$ را به دست آورید.

۲۰) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int\int\int_T z\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی z و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = 1$ است.

(ب) $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x} dx dy$.

۲۱) مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 4x$ و خطوط $y = x$ و $y = 0$ را به دست آورید.

۲۲) حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $y^2 = 4 - 3x$ و $x = y^2$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را به دست آورید.

۲۳) حجم ناحیه‌ای را به دست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^2 = 2xy$, $x + y = 2$, $x + y = 1$ مشخص شده است.

۲۴) با استفاده از تغییر متغیرهای $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_D x^2y^2(x^2 + y^2)\ dA$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 1$, $xy = 2$ است.

۲۵) مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^2 (\int_{y/2}^1 \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx)dy$.

۲۶) انتگرال دوگانه $\int\int_D |x - y| e^{x-y}\ dA$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x - y = 0$، $x - y = -4$ ، $x + y = 0$ و $x + y = 4$ است.

۲۷) تابع $f(x,y) = \frac{y}{x^4} \sin \frac{\pi x}{2}$ مفروض است. انتگرال $\int_0^1 \int_1^2 f(x,y) dx dy$ روی ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xy و انتگرال $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y) dx dy$ روی ناحیه‌ی E از صفحه‌ی xy تعریف شده‌اند.

(الف) نواحی D و E را در صفحه‌ی xy مشخص کنید.

(ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_{D \cup E} f(x,y) dy dx$.

۲۸) G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = ۱$ و $xy = ۳$ و $x(۱-y) = ۲$ و $x(۱-y) = ۱$ است. مطلوب است انتگرال

$$\int\int_G x \, dA$$

۲۹) انتگرال $\int\int_D \cos(\frac{x-y}{x+y}) \, dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ و $x + y = ۲$ بیابید.

۳۰) با استفاده از انتگرال دوگانه در مختصات قطبی حجم ناحیه‌ی T را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = a$ است $(a > ۰)$.

ب) T بین کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و سهمیگون $x^۲ + y^۲ = ۴(۱ - z)$ محصور است.

(ج) T در خارج از مخروط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و داخل کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ قرار دارد.

۳۱) با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی

$$\int\int_D \sqrt{\frac{۱ - x^۲ - y^۲}{۱ + x^۲ + y^۲}} \, dA$$

را محاسبه کنید. که در آن D قرص واحد $\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ می‌باشد.

۳۲) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

(الف) $\int_۰^۱ \int_۰^۱ \int_۰^۱ (xy + yz + zx) dx dy dz$

(ب) $\int_۰^۱ dx \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} \frac{dz}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲ - z^۲}}$

۳۳) مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^۳$، که حجم آن برابر V است به صورت

$$\frac{۱}{V} \int\int\int_T f(x, y, z) dV$$

تعریف می‌شود. با توجه به این تعریف، مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان روی T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۳۴) مطلوب است انتگرال $\int\int\int_T \frac{xy}{\sqrt{z}} \, dV$ که در آن T ناحیه‌ای است در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^۲ = \frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{۹}y^۲$ و صفحات $x = ۰$ ، $y = ۰$ و $z = ۱$.

۳۵) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را با تبدیل مختصات دکارتی به قطبی محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \sqrt{x^۲+y^۲}\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲\leq ۹\}$

ب) $\int\int_D \frac{\sin\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : \frac{\pi^۲}{۱۶}\leq x^۲+y^۲\leq \frac{\pi^۲}{۹}\}$

ج) $\int\int_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x})\ dA$ ، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : ۱\leq x^۲+y^۲\leq ۴, \frac{x}{\sqrt{۳}}\leq y\leq \sqrt{۳}x\}$

۳۶) معادله‌ی $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ را به معادله‌ای در مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳۷) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\int\int\int_T x^۲y^۲\ dV$ که در آن T محدود است به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه‌ی $z=a$ $(a>۰)$.

ب) $\int\int\int_T (x^۳+y^۳)\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲+y^۲=y$، سهمی‌گون $z=x^۲+y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$.

۳۸) با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولی‌گون $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ و کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را پیدا کنید.

۳۹) معادله‌ی $x^۲+y^۲=z^۲$ را در مختصات کروی بنویسید.

۴۰) مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک مختصات کروی پیدا کنید.

الف) $\int\int\int_T \frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و مخروط $x^۲+y^۲=z^۲$.

ب) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+(z-۲)^۲}}\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

ج) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{((x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}\ dV$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=e$ قرار دارد.

۴۱) با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی مشترک بین کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴z-۳$ و مخروط $z^۲=۴(x^۲+y^۲)$ را پیدا کنید.

آنالیز برداری

۱) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_1} \frac{ds}{x-y}$

ب) $\int_{C_2} \frac{y}{\sqrt{x}} ds$

که C_1 پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P=(0,-3)$ و $Q=(6,0)$ و و معادلات پارامتری C_2 عبارت هستند از $x=3t^2$ و $y=2t^3$ به ازای $1\leq t\leq 2$.

۲) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_1} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$

ب) $\int_{C_2} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$

ج) $\int_{C_3} \frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$

که C_1 دارای معادلات پارامتری $x=2\cos t$، $y=2\sin t$ به ازای $0\leq t\leq \pi$، C_2 مربعی با رئوس $(1,0)$، $(0,1)$، $(-1,0)$، $(0,-1)$ (در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و C_3 دایره‌ای به معادلات پارامتری $x=a\cos t$ ، $y=a\sin t$ ، $(a>0)$ به ازای $0\leq t\leq 2\pi$ است.

۳) C خم بسته‌ی هموازی است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\int_C (yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)dy=0$$

۴) صحت قضیه‌ی گرین را برای انتگرال

$$\int_C (-x^2y)dx+(xy^2)dy$$

بررسی کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور به دوایر $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=16$ است.

۵) فرض کنید $f(x,y)=\frac{1}{|x|+|y|}$ و C مربعی با رئوس $A=(1,0)$، $B=(0,1)$، $C=(-1,0)$ و $D=(0,-1)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت یک بار پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C f(x,y)dx+f(x,y)dy$.

۶) الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $(x,y)\in D$ داشته باشیم $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ آن‌گاه $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ که C یک خم هموار بسته حول مبدأ مختصات است.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۷) اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y=xe^{x-۱}$ باشد، به طوری که $A=(۱,۱)$ و $O=(۰,۰)$، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_\gamma (۳x^۲y+y^۳)dx+(x^۳+۳xy^۲)dy$$

۸) مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y|dx+|x|dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB، قسمتی از دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ واقع بر نقطه‌ی $A=(۰,۲)$ و $B=(-۱,۱)$ و BC قسمتی از خط $x+۶y=۵$ واقع بر نقطه‌ی $B=(-۱,۱)$ و $C=(۲,\frac{۱}{۲})$ است.

۹) در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همراه با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\mathbf{F}$ باشد.

الف) $\mathbf{F}=(y-\frac{\sin^۲ y}{x^۲})\mathbf{i}+(x+\frac{\sin ۲y}{x})\mathbf{j}$

ب) $\mathbf{F}=(۲x\cos^۲ y)\mathbf{i}+(۲y-x^۲\sin ۲y)\mathbf{j}$

۱۰) اگر تابع دو متغیره‌ی u چنان وجود داشته باشد که $du=Pdx+Qdy$ (P و Q توابعی دو متغیره هستند) آن‌گاه فرم دیفرانسیلی $Pdx+Qdy$ را یک فرم دیفرانسیلی کامل می‌نامیم. نشان دهید که $Pdx+Qdy$ یک فرم دیفرانسیلی کامل است اگر و تنها اگر $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۱۱) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را روی خم‌های داده شده در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کنید.

الف)

$$\int_C \sqrt{x^۲+y^۲}dx+[xy^۲+y\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})]dy$$

که در آن C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

ب)

$$\int_C \frac{xy^۲}{۱+x^۲}dx + y\ln(۱+x^۲)dy$$

که در آن C دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲y=۰$ است.

۱۲) به کمک انتگرال خطی مساحت A از نواحی داده شده‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) D محدود است به خم بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x=a\cos^۳ t$، $y=a\sin^۳ t$، که در آن $a>۰$ و $۰\leq t\leq ۲\pi$.

ب) D محدود است به منحنی بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x=۲a\cos t-a\cos ۲t$، $y=۲a\sin t-a\sin ۲t$، که در آن $a>۰$ و $۰\leq t\leq ۲\pi$.

۱۳) تحقیق کنید که تساوی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=۱$$

در مورد نگاشت‌های $x=e^u\cos v$، $y=e^u\sin v$ و وارون آن‌ها برقرار است.

۱۴) مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) S قسمتی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ بریده می‌شود ($a>۰$).

ب) S قسمتی از استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ است که در کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ قرار دارد ($a>۰$).

ج) S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که بین صفحه‌ی $z=۰$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ قرار دارد.

۱۵) انتگرال‌های سطح (رویه‌ای) زیر را حساب کنید.

الف) $\int\int_S xyz d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

ب) $\int\int_S y d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y=۲-x^۲-z^۲$ به ازای $y\geq ۰$ است.

ج) $\int\int_S (x^۲y^۲+x^۲z^۲+y^۲z^۲)d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ بریده می‌شود.

۱۶) انتگرال‌های سطح (رویه‌ای) زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S نیم کره‌ی $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ است.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=\mathbf{i}-y^۲\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z=xy$ است که در بالای مربع $D=\{(x,y): ۰\leq y\leq ۲\ ,\ ۰\leq x\leq ۳\}$ قرار دارد.

ج) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و صفحات $z=۰$ و $z=۳$ است.

۱۷) به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) $\mathbf{F} = ۴x\mathbf{i} - ۲y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و S کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است.

ب) $\mathbf{F} = ۳x\mathbf{i} - y^۲\mathbf{j} + z^۲\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲$ و صفحات $z = ۰$ و $z = ۱$ است.

ج) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ی دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۱۸) به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z = x$ از برخورد صفحات $x = ۰$، $x = ۱$، $y = ۰$ و $y = ۲$ به وجود می‌آید.

ب) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^۲\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ با صفحه‌ی $x + y + z = ۲$ پدید می‌آید.

ج) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و C مثلثی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از $(۳, ۰, ۰)$، $(۳, ۰, ۱)$ و $(۳, ۱, ۲)$.

د) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z = x$ با کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور z بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۱۹) فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla\cdot(f\nabla f) = \|\nabla f\|^۲ + f\nabla^۲ f$$

که در آن $\nabla^۲ f := \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$ لاپلاسین تابع f نامیده میشود.

۲۰) فرض کنید $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان برداری تعریف شده بر ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد به قسمی که توابع P، Q و R بر این ناحیه مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = -\nabla^۲\mathbf{F} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^۲\mathbf{F} := (\nabla^۲ P)\mathbf{i} + (\nabla^۲ Q)\mathbf{j} + (\nabla^۲ R)\mathbf{k}$.

۲۱) فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتقپذیر باشند. نشان دهید

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$$

۲۲) فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S باشند به قسمی که خم مرزی آن C و $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بر سطح S هستند. نشان دهید

(الف) $\int_C (f\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot \mathbf{n}\ d\sigma$

(ب) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$

۲۳) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{n}$، نماد $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = D_{\mathbf{n}} f$ و اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^3$ و S سطح محصور کننده‌ی آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

(الف) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\ d\sigma = \iiint_T \nabla^2 f\ dV$

(ب) $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\ d\sigma = \iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\ dV$

(ج) $\iint_S (f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}})\ d\sigma = \iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\ dV$