پاسخ پرسش‌های آزمون پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۵-۹۴

۱. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=۳+x^۲-y^۲$ مفروض است.

الف) نقاط بحرانی f را بیابید و با به کار بردن آزمون مشتق دوم تعیین کنید f در این نقاط چه وضعیتی دارد.

ب) اکسترمم‌های مطلق f را بر ناحیه‌ی بسته و کراندار $R=\{(x,y);x^۲+۴y^۴\leq ۴\}$ تعیین کنید. (۲۰ نمره)

حل. الف) برای نقاط بحرانی f معادله‌ی $\nabla f=(۰,۰)$ را حل می‌کنیم. با توجه به اینکه $\nabla f=(۲x,-۲y)$ تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع نقطه‌ی $(۰,۰)$ است. اکنون از آزمون مشتق دوم استفاده دوم استفاده می‌کنیم.

$$f_{xx}(۰,۰)=۲ \quad f_{yy}(۰,۰)=-۲ \quad f_{xy}(۰,۰)=۰ \;\Rightarrow\; f_{xx}(۰,۰)f_{yy}(۰,۰)-f_{xy}(۰,۰)=-۴<۰$$

پس نقطه‌ی $(۰,۰,f(۰,۰))$ یک نقطه‌ی زینی تابع f است.

ب) $(۰,۰)$ تنها نقطه‌ی بحرانی f درون ناحیه‌ی R است. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، نقاط بحرانی روی مرز را به دست می‌آوریم. با در نظر گرفتن تابع g با ضابطه‌ی $g(x,y)=x^۲+۴y^۴$ به حل دستگاه

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g(x,y)=۴\end{cases}$$

می‌پردازیم. با حل دستگاه

$$\begin{cases}۲x=۲\lambda x\\ -۲y=۱۶\lambda y^۳\\ x^۲+۴y^۴=۴\end{cases}$$

نقاط $(۰,۱)$، $(۰,-۱)$، $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ به عنوان تنها نقاط بحرانی f روی مرز R به دست می‌آیند. اکنون مقادیر f را در نقطه‌ی بحرانی درون و نقاط فوق مقایسه می‌کنیم.

$$f(۰,۰)=۳ \quad f(۰,۱)=f(۰,-۱)=۲ \quad f(۲,۰)=f(-۲,۰)=۷$$

بنابر این ماکزیمم مطلق f روی R برابر ۷ و می‌نیمم مطلق آن بر این ناحیه برابر ۲ است.

تذکر. در صورتی که ناحیه R را به صورت $\{(x,y); x^۲+۴y^۲\leq ۴\}$ در نظر گرفته باشید، به دستگاه زیر خواهیم رسید.

$$\begin{cases} ۲x = ۲\lambda x \\ -۲y = ۸\lambda y \\ x^۲+۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه نیز همان نقاط فوق بوده، در نتیجه جواب آخر فرقی نخواهد کرد.

---

۲. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\iint_D \frac{x^۲y}{۱+x^۲y^۲}\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم‌های $xy=۱$، $xy=۴$ و خطوط $x=۱$ و $x=۴$ است. (۱۵ نمره)

حل. با استفاده از تغییر متغیر $u=xy$ و $v=x$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = -x \;\Rightarrow\; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,u)} = -\frac{۱}{x} = -\frac{۱}{v}$$

همچنین تصویر ناحیه‌ی D در صفحه‌ی uv ناحیه‌ی $D^*=\{(u,v); ۱\leq u\leq ۴,\ ۱\leq v\leq ۴\}$ خواهد بود. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^۲y}{۱+x^۲y^۲}dxdy &= \iint_{D^*}\frac{uv}{۱+u^۲}\,|-\frac{۱}{v}|\,dudv \\ &= \int_۱^۴\int_۱^۴ \frac{u}{۱+u^۲}du\,dv = ۳\Big(\frac{۱}{۲}\ln(۱+u^۲)\Big|_۱^۴\Big) = \frac{۳}{۲}(\ln ۱۷-\ln ۲)\end{aligned}$$

---

۳. فرض کنید D قسمتی از ناحیه محصور توسط دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ در ناحیه‌ی $x\geq y$ باشد.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی D.

ب) اگر C قسمتی از دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ از نقطه‌ی $A(۱,۱)$ به نقطه‌ی $O(۰,۰)$ در نیم صفحه‌ی $y\geq ۰$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$، که در آن $\mathbf{F}(x,y)=(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}$.

ج) اگر C همان مسیر قسمت (ب) باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C ۳x^۲e^y\,dx+(x^۳e^y+۱)\,dy$. (۳۵ نمره)

حل. الف) با استفاده از تغییر متغیر قطبی

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{0}^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ب) (روش اول) فرض کنیم γ خم با معادلات پارامتری $x = t$، $y = t$، $t \in [0,1]$ باشد. در این صورت $\gamma \cup C$ خم بسته‌ای در برگیرنده‌ی ناحیه‌ی D خواهد بود. در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی گرین، با فرض اینکه $P(x,y) = x - y$ و $Q(x,y) = x + y$ خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 2\iint_D dxdy = \frac{\pi}{2} - 1$$

از طرفی

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^1 \big(0\,dt + 2t\,dt\big) = t^2\Big|_0^1 = 1$$

در نتیجه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \frac{\pi}{2} - 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 2$$

(روش دوم) خم C دارای معادلات پارامتری $x = 1 + \cos t$، $y = \sin t$، $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ است. در نتیجه $dx = -\sin t\,dt$ و $dy = \cos t\,dt$ و از آنجا

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big((1+\cos t - \sin t)(-\sin t) + (1+\cos t+\sin t)(\cos t)\big)dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin t + \cos t)dt = t + \cos t + \sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

ج) (روش اول) با فرض $P(x,y) = 3x^2e^y$ و $Q(x,y) = x^3e^y + 1$ داریم $P_y = Q_x = 3x^2e^y$. چون $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ همه جا به طور پیوسته مشتق‌پذیر است پس $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است. تابع $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که $\nabla u = \mathbf{F}$. پس

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2e^y \;\Rightarrow\; u(x,y) = x^3e^y + \phi(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial y} = x^3e^y + \phi'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad = \quad Q(x,y) = x^۳ e^y + ۱ \;\Rightarrow\; \phi'(y) = ۱ \;\Rightarrow\; \phi(y) = y + C$$

در نتیجه $u(x,y) = x^۳ e^y + y + C$ و از آنجا

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{(۱,۱)}^{(۰,۰)} \nabla u \cdot \mathbf{dr} = u(x,u)\Big|_{(۱,۱)}^{(۰,۰)} = u(۰,۰) - u(۱,۱) = -e - ۱$$

(روش دوم) چون میدان $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است مقدار انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ مستقل از مسیر است و به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. در نتیجه اگر γ خم معرفی شده در قسمت (ب) باشد خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_{-\gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = -\int_۰^۱ (۳t^۲ e^t + t^۳ e^t + ۱)dt = -(t^۳ e^t + t)\Big|_۰^۱ = -(e+۱)$$

---

۴. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ درون و روی مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد.

الف) حجم ناحیه‌ی T را به دست آورید.

ب) اگر S رویه‌ی محصورکننده‌ی ناحیه‌ی T و $\mathbf{n}$ قائم یکه بر S رو به سمت خارج باشد مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z^۲e^y)\mathbf{i} + (y - x\sin(xz^۲))\mathbf{j} + (z + \frac{y}{۱+x^۲})\mathbf{k}$. (۲۰ نمره)

حل. الف) با استفاده از تغییر متغیر کروی و با توجه به اینکه $T = \{(\rho,\phi,\theta)\ ;\ ۱\le\rho\le۲\ ,\ ۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}\ ,\ ۰\le\theta\le۲\pi\}$ خواهیم داشت

$$V_T = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۱^۲ \rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = ۲\pi(-\cos\phi)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}(\frac{\rho^۳}{۳})\Big|_۱^۲ = \frac{۱۴\pi}{۳}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

ب) با توجه به قضیه‌ی دیورژانس از آنجا که $div\mathbf{F} = ۳$ داریم

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_T ۳dV = ۳V_T = ۱۴\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

---

۵. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ باشد.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S z\,d\sigma$.

ب) اگر $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و C مرز رویه‌ی S باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم بیرونی کره) مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ را

بیابید. (۲۰ نمره)

حل. الف) فرض کنیم D تصویر S بر صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\iint_S z\,d\sigma &= \iint_D \sqrt{۴-x^۲-y^۲}\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^۲+(\frac{\partial z}{\partial y})^۲+۱}dA\\ &= \iint_D \sqrt{۴-x^۲-y^۲}\sqrt{\frac{x^۲}{۴-x^۲-y^۲}+\frac{y^۲}{۴-x^۲-y^۲}+۱}dA = ۲\iint_D dA = ۲A_D\end{aligned}$$

از آنجا که D دایره‌ای به شعاع ۱ است مساحت آن برابر π خواهد بود. در نتیجه جواب انتگرال فوق برابر ۲π است.

ب) با استفاده از قضیه‌ی استوکس،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

با توجه به اینکه

$$curl\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{j}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & z\end{pmatrix} = ۲\mathbf{k}$$

و اینکه $\mathbf{N} = \frac{x}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}\mathbf{j}+\mathbf{k}$ خواهیم داشت $curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = ۲$. در نتیجه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \iint_S curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = ۲\iint_D dA = ۲\pi$$
