پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^۳-y^۳)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) مشتق سویی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را بیابید.

ج) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟ (۱۲ نمره)

حل. الف) باید نشان دهیم

$$\forall\epsilon>۰,\quad \exists\delta>۰,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^۲,\quad \|(x,y)-(۰,۰)\|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$$

برای $\epsilon>۰$ و $(x,y)\neq(۰,۰)$، با توجه به این که

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(۰,۰)| &= \left|\frac{\sin(x^۳-y^۳)}{x^۲+y^۲}-۰\right| \le \frac{|x^۳-y^۳|}{x^۲+y^۲}\\ &\le \frac{x^۲|x|+y^۲|y|}{x^۲+y^۲}\le |x|+|y|\le ۲\sqrt{x^۲+y^۲}\end{aligned}$$

برای برقراری $|f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$ کافی است $۲\sqrt{x^۲+y^۲}<\epsilon$ یا $\sqrt{x^۲+y^۲}<\frac{\epsilon}{۲}$. پس $\delta>۰$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\delta\le\frac{\epsilon}{۲}$.

ب)

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(۰,۰) &= \lim_{t\to۰}\frac{f(at,bt)-f(۰,۰)}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{\sin(a^۳t^۳-b^۳t^۳)}{a^۲t^۲+b^۲t^۲}-۰}{t}\\ &= \lim_{t\to۰}\frac{\sin\left((a^۳-b^۳)t^۳\right)}{t^۳}=a^۳-b^۳\end{aligned}$$

ج) اگر f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ مقدار دو عبارت $D_{\mathbf{u}}f(۰,۰)$ و $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ با یکدیگر برابر خواهند بود. اکنون به محاسبه‌ی عبارت دوم می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) &= \lim_{x\to۰}\frac{f(x,۰)-f(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{\sin(x^۳)}{x^۲}}{x}=۱\\ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) &= \lim_{y\to۰}\frac{f(۰,y)-f(۰,۰)}{y}=\lim_{y\to۰}\frac{\frac{\sin(-y^۳)}{y^۲}}{y}=-۱\end{aligned}$$

در نتیجه $\nabla f(\circ,\circ)\cdot \mathbf{u} = a-b$. اما برای همه‌ی مقادیر a و b با شرط $a^{۲}+b^{۲}=۱$ ، رابطه‌ی $a-b=a^{۳}-b^{۳}$ برقرار نیست (مثلا برای $a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=b$). در نتیجه f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $f(xz,yz)=۱$ تعریف شده باشد. نشان دهید

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z$$

(۸ نمره)

حل. بنا به فرض مسئله، تابع مشتق‌پذیری چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای همه مقادیر (x,y) در معادله‌ی $f\big(xz(x,y),yz(x,y)\big)=۱$ صدق می‌کند. اگر قرار دهیم $u(x,y):=xz(x,y)$ و $v(x,y)=yz(x,y)$ آنگاه

$$\forall (x,y),\quad f\big(u(x,y),v(x,y)\big)=۱$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)=\circ \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)=\circ$$

به این ترتیب، با استفاده از قاعده زنجیری،

$$\begin{cases} f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\circ \\ f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}=\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_u.(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+f_v.(y\frac{\partial z}{\partial x})=\circ \\ f_u.(x\frac{\partial z}{\partial y})+f_v.(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{zf_u}{xf_u+yf_v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zf_v}{xf_u+yf_v} \end{cases}$$

در نتیجه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(xf_u+yf_v)}{xf_u+yf_v}=-z$$

---

۳. فرض کنید f تابعی دو متغیره و مشتق پذیر باشد و $w=f(x-y+۳z,x+y-z)$. ثابت کنید

$$\frac{\partial w}{\partial x}-۲\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}=\circ$$

(۵ نمره)

حل. قرار می‌دهیم $u(x,y,z) := x - y + ۳z$ و $v(x,y,z) := x + y - z$. بنابر فرض $w = f\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big)$. در نتیجه با استفاده از قاعده‌ی زنجیری

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = f_u + f_v \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -f_u + f_v \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = f_u \dfrac{\partial u}{\partial z} + f_v \dfrac{\partial v}{\partial z} = ۳f_u - f_v \end{cases}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial w}{\partial x} - ۲\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = (f_u + f_v) - ۲(-f_u + f_v) - (۳f_u - f_v) = ۰$$

---

۴. رویه S به معادله‌ی $z = x^۲ - y^۲ + ۲y + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ را بیابید.

ب) ثابت کنید که از نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ دو خط راست می‌گذرند که تماماً بر رویه‌ی S قرار دارند و معادلات آنها را بیابید.

(۱۰ نمره)

حل. الف) اگر تابع f را با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^۲ - y^۲ + ۲y + ۱$ در نظر بگیریم آنگاه S رویه‌ی تراز f به ازای ثابت صفر خواهد بود. اگر $\pi_۰$ صفحه‌ی مماس بر S در نقطه‌ی $P_۰ = (۱,۱,۳)$ باشد آنگاه $\nabla f(۱,۱,۳)$ یک بردار موازی با بردار نرمال این صفحه است.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = ۲x\mathbf{i} + (-۲y + ۲)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

به این ترتیب $\nabla f(۱,۱,۳) = ۲\mathbf{i} - \mathbf{k}$ و معادله‌ی این صفحه به صورت $۲(x-۱) + ۰(y-۱) - (z-۳) = ۰$ یا $۲x - z = -۱$ است.

ب) فرض کنیم L خطی گذرنده از $P_۰ = (۱,۱,۳)$ با بردار هادی $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x = at + ۱ \\ y = bt + ۱ \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + ۳ \end{cases}$$

اکنون a، b و c را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که L بر رویه‌ی S قرار گیرد.

$$L \subset S \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (at+۱, bt+۱, ct+۳) \in S$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (at+۱)^۲ - (bt+۱)^۲ + ۲(bt+۱) + ۱ - (ct+۳) = ۰$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (a^۲ - b^۲)t^۲ + (۲a - c)t = ۰$$

$$\Leftrightarrow \quad a^۲ - b^۲ = ۰ \text{ و } ۲a - c = ۰$$

با انتخاب $a = ۱$ و با استفاده از معادلات فوق دو بردار هادی به صورت $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ به دست می‌آیند. به این ترتیب دقیقاً دو خط از نقطه‌ی $P_۰$ می‌گذرند که تماماً بر رویه‌ی S قرار می‌گیرند. معادلات پارامتری این خط‌ها به شکل زیر است.

$$\begin{cases} x = t + ۱ \\ y = -t + ۱ \\ z = ۲t + ۳ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} x = t + ۱ \\ y = t + ۱ \\ z = ۲t + ۳ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$