«به نام خدای بخشنده»

«حل تمرین‌های فصل 3»

③ حکم: V^* نقاط را جدا می‌کند.

حل) فرض کنید $V_1, V_2 \in V$ ، $V_1 \neq V_2$ در این صورت $V_1 - V_2 \neq 0$ تعریف می‌کنیم $V_0 = V_1 - V_2$
با استفاده از این V_0 زیرفضای M را به صورت $M = \{\alpha V_0 \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$ تعریف می‌کنیم. نگاشت
φ بر M با ضابطه $\varphi(\alpha V_0) = \alpha(\|V_0\|)$ تعریف شده. واضح است که بنابر نگاشت
φ خطی و کراندار و هم‌چنین $\|\varphi\| = 1$ ، توجه داریم $\varphi(V_0) = \|V_0\|$.
اکنون بنابر قضیه هان ـ باناخ می‌توانیم φ را بر کل فضا V توسیع دهیم بدون اینکه نرم آن را افزایش
یابد. فرض کنید ψ نگاشت توسیع یافته φ باشد:

$$\psi(V_0) = \|V_0\| = \|V_1 - V_2\| \neq 0$$

$$\Rightarrow \psi(V_1 - V_2) \overset{\text{خطی}}{=} \psi(V_1) - \psi(V_2) \neq 0 \quad \text{یا} \quad \psi(V_1) \neq \psi(V_2)$$

⑤ اگر $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{F}$ خطی باشد، φ کراندار است $\Longleftrightarrow$ $\ker\varphi$ زیرفضای V باشد.

$\boxed{\Leftarrow}$ φ کراندار و خطی است بنابر قضیه معادلاً پیوسته در صفر است معادلاً پیوسته می‌باشد.
اکنون می‌توانیم بنویسیم $\ker(\varphi) = \{x : \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0)$
تصویر معکوس مجموعه بسته $\{0\}$ تحت نگاشت پیوسته، بسته است.

$\boxed{\Rightarrow}$ فرض کنید که $\ker\varphi$ بسته است ادعا داریم φ کراندار است $\equiv$ $\mathrm{Graph}(\varphi)$ بسته است

$$\mathrm{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}$$

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n - x \longrightarrow 0 \\ A(x_n - x) \longrightarrow y - Ax \end{cases}$$

$$\xrightarrow{A(0)=0} y - Ax = 0 \longrightarrow y = Ax \quad \boxed{\checkmark}$$

Subject : Date

۱۰) گوی یکه از فضای هیلبرت نامتناهی البعد به طور ضعیف فشرده است.

حل) از طرفی بنابر قضیه نمایش ریس به سادگی معلوم است که هر فضای هیلبرت H دارای دوگانی برابر با خودش است. یا به عبارتی خود دوگان است. و اکنون چون $H \cong H^*$ این به ما نشان می‌دهد که دو توپولوژی weak و weak-star بر هم منطبق می‌شوند. از طرفی بنابر قضیه باناخ ـ آلااگلو ball X^* به طور weak-star فشرده است.

$\Rightarrow$ ball H = ball H^* به طور ضعیف فشرده خواهد بود.

۱۱) اگر X گوی یکه از باناخ V مجهز شده به weak-x توپولوژی باشد آیا الزاماً هاسدورف است.

حل) فرض کنید $x, y \in X$ دو نقطه مجزا باشند. w^* توپولوژی بر X^* یا به عبارتی $\sigma(X^*, X)$ توپولوژی تعریف شده توسط خانواده‌ای از شبه نرم ها $P_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|$

w توپولوژی بر X به عبارتی $\sigma(X^*, X)$ برای LCS توپولوژی تعریف شده به وسیله شبه نرم های $\{P_{x^*} \mid x^* \in X^*\}$ است و $P_{x^*}(x) = |\langle x, x^* \rangle|$

چون بنابر فرض $x \neq y$ است و در یک LCS می‌دانیم که $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} \{x \mid P(x) = 0\} = (0)$

(توجه $\mathcal{P}$ خانواده تمام شبه نرم هایی است که فضا را به LCS تبدیل کرده) بنابراین:

$\exists P \in \mathcal{P}$ s.t. $P(x-y) \neq 0$

(زیرا اگر چنین نباشد یعنی برای تمام $P \in \mathcal{P}$، $P(x-y) = 0$ و این یعنی اشتراک بالا غیر از صفر نیز عضوی دارد که نادرست است)

$\rightarrow P(x-y) > \varepsilon > 0$

اکنون تعریف می‌کنیم

$U = \{Z ; P(x-Z) < \varepsilon/2\}$
$V = \{Z ; P(y-Z) < \varepsilon/2\}$ $\Rightarrow U \cap V = \phi$ ☑

۱۲) عملگرهای فضای برداری پیوسته هستند (با توجه به توپولوژی w^*)

حل) توجه داشته باشیم که اگر $(X, \|.\|)$ فضای نرم دار باشد آنگاه یک TVS است برای این منظور کافی است بنابر تعریف TVS ثابت کنیم اعمال جمع و ضرب پیوسته هستند:

$+ : X \times X \longrightarrow X$

$(x, y) \longmapsto (x+y)$

Subject : Date ....

$\xrightarrow{\text{پیوستگی}}$ $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $(\|x_n - x\|) \to 0$
$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$, $(\|y_n - y\|) \to 0$ $\Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x + y \Rightarrow \oplus$ پیوسته است

$\cdot : X \times \mathbb{F} \longrightarrow X$ $x_n \longrightarrow x \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon/\alpha \quad \forall n > N_0$
$(x, \alpha) \longrightarrow \alpha x$ $\Rightarrow \|\alpha x_n - \alpha x\| < \varepsilon \Rightarrow \alpha x_n \longrightarrow \alpha x$ $\boxed{\checkmark}$