Subject : Date 1

«بنام خدای رهایی بخش»

حل تمرین های فصل ۳

(10) $M^{\perp} = \{ \varphi \in X^* \,;\, \varphi(x) = 0 \,,\, \forall x \in M \} \qquad (M \subseteq X)$

$^{\perp}N = \{ x \in X \,;\, \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in N \} \qquad (N \subseteq X^*)$

claim : $^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$

حل) ابتدا یک حکم را برای اثبات ادعای بالا بیان می کنیم و آن را اثبات می کنیم، توجه داشته باشید که این حکم نتیجه ای از قضیه هان - باناخ است.

حکم : اگر X فضای نرم دار و M یک زیرفضای لزوماً بسته از X باشد آنگاه

$cl(M) = \bigcap \{ \ker f \mid f \in X^* \,,\, M \subseteq \ker f \}$

اثبات حکم : فرض کنید $N = \bigcap \{ \ker(f) \mid f \in X^* \,,\, M \subseteq \ker f \}$

اگر $f \in X^*$ بوده، $M \subseteq \ker f$ چون f پیوسته است لذا $\ker f$ بسته است و داریم :

$cl(M) \subseteq \ker(f) \longrightarrow cl(M) \subseteq N$ ✓

برعکس : فرض کنید $x_0 \notin cl(M)$ در این صورت $d = dist(x_0, M) > 0$. لذا بنابر یکی از نتایج قضیه هان - باناخ $f \in X^*$ موجود است بطوریکه $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0 \;\; \forall x \in M$

لذا $(f|_M = 0)$ $x_0 \notin \ker f$ و یعنی $x_0 \notin N$ ∎

اکنون به اثبات ادعا می پردازیم :

$x \in \overline{M} \rightarrow x \in \bigcap\limits_{M \subseteq \ker\varphi} \ker\varphi \rightarrow \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in X^* \;\; M \subseteq \ker\varphi$

$\xrightarrow{\text{تعریف}} \forall \varphi \in M^{\perp} \,;\, \varphi(x) = 0 \xrightarrow{\text{ت}} x \in {}^{\perp}(M^{\perp}) \qquad$ (I)

$x \in {}^{\perp}(M^{\perp}) \xrightarrow{\text{ت}} x \in \{ y \in X \mid \varphi(y) = 0 \;\; \forall \varphi \in M^{\perp} \}$

$\rightarrow \forall \varphi \in M^{\perp} \,;\, \varphi(x) = 0$

$\rightarrow x \in \ker\varphi \;\; s.t \;\; M \subseteq \ker\varphi$

$\rightarrow x \in \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq \ker\varphi \\ \varphi \in X^*}} \ker\varphi \rightarrow x \in \overline{M} \qquad$ (II)

حکم : $\rightarrow$ I , II

©MICRO®

$(c_0)^* \cong \ell^1$ (17)

$c_0 = \{(a_n) \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ and define for any $a = (a_n)_n \in \ell^1$

φ_a on c_0 by $\varphi_a(x_n) = \sum_1^\infty a_n x_n$

$$\begin{aligned} \ell^1 &\longrightarrow (c_0)^* \quad : \text{is isometric isom} \\ a &\longmapsto \varphi_a \end{aligned}$$

حل)

1) φ_a is linear: $\begin{cases} \varphi_a(x+y) = \sum a_n(x_n+y_n) = \sum a_n x_n + \sum a_n y_n = \varphi_a(x) + \varphi_a(y) \\ \varphi_a(\alpha x) = \sum a_n(\alpha x_n) = \alpha \sum a_n x_n = \alpha(\varphi_a(x)) \end{cases}$

2) $\varphi_a \in (c_0)^* \equiv \varphi_a : c_0 \longrightarrow \mathbb{F}$: bounded linear

$$|\varphi_a(x)| = |\sum a_n x_n| \leq (\sum a_n^2)^{1/2} (\sum x_n^2)^{1/2}$$
$$= \|a\| \, \|x\| \longrightarrow \|\varphi_a\| \leq \|a\| \equiv \text{bounded}$$

(24) اگر $B: \ell^2_\alpha(ID) \to \ell^2_\alpha(ID)$ تعریف شود آنگاه $f \circ$ ، $\ell^2_\alpha(ID)$ خطی و کراندار است

$$B(f) = \frac{f - f(0)}{z}$$

حل)

linear: $B(f+g) = \dfrac{(f+g) - (f+g)(0)}{z} = \dfrac{f - f(0)}{z} + \dfrac{g - g(0)}{z} = Bf + Bg$

$$B(\alpha f) = \frac{(\alpha f) - (\alpha f)(0)}{z} = \alpha \frac{f - f(0)}{z} = \alpha Bf.$$

bounded: By "closed Graph theorm" we know

Graph B: closed in $\ell^2_\alpha(ID) \times \ell^2_\alpha(ID) \longleftrightarrow B$: bounded

But: $\text{Graph}(B) = \left\{ \left(f, \dfrac{f - f(0)}{z}\right) \mid f \in \ell^2_\alpha(ID) \right\}$

$$(\alpha_n) \longrightarrow \alpha \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha \in \text{Graph}(B)$$

$\alpha_n \in Graph(B)$

$\alpha_n = (f_n , \frac{f_n - f_n(0)}{z})$, $\alpha_n \to (f,g) = \alpha$

$\Rightarrow f_n \to f \Rightarrow \forall x$, $f_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow f_n(0) \to f(0)$

then: $\frac{f_n - f_n(0)}{z} \Rightarrow \frac{f - f(0)}{z}$

بنابر یکتایی حد دنباله داریم :

$g = \frac{f - f(0)}{z}$ $\therefore$ Graph B: closed $\equiv$ B: bounded

X : banach $\xrightarrow{?}$ X/M : banach (25)

$M \leq X$ $\|x+M\| = \inf\{ \|x+m\| \mid m \in M \}$

حل) فرض کنید (x_n+M) دنباله کوشی در X/M باشد ، بنابر کوشی بودن و خواص کوشی بودن زیر دنباله ای مانند $(x_{n_k}+M)$ موجود است بطوریکه :

$\|x_{n_k}+M-(x_{n_{k+1}}+M)\| = \|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}+M\| < 1/2^k$

فرض کنید $y_1 = 0$ ، بنابر خاصیت مشخصه inf از آنالیز ریاضی $y_2 \in M$ موجود است بطوریکه :

$\|x_{n_1}-x_{n_2}+y_2\| \leq \|x_{n_1}-x_{n_2}+M\| + 2^{-1} < 2 \times 1/2 = 1$

همچنین $y_3 \in M$ را طوری انتخاب می کنیم که :

$\|x_{n_2}+y_2-(x_{n_3}+y_3)\| \leq \|x_{n_2}-x_{n_3}+M\| + \frac{1}{2^2} \leq 2 \times \frac{1}{2^2} = 1/2$

با ادامه این روند دنباله ای مانند (y_k) از M می یابیم که :

$\|x_{n_k}+y_k-(x_{n_{k+1}}+y_{n_{k+1}})\| < \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \times \frac{1}{2^k}$

از آنجا که $\sum \frac{1}{2^k}$ همگراست لذا $\{x_{n_k}+y_k\}$ دنباله کوشی در X است

چون X فضای کامل (باناخ بودن) است بنابراین $x_{n_k}+y_k \to x_0 \in X$

اکنون بنابر پیوستگی نگاشت خارج قسمتی می توانیم بنویسیم

$x_{n_k}+M = q(x_{n_k}+y_k) \to q(x_0) = x_0+M$

لذا $(x_n + M)$ کوشی با زیردنباله ای همگرا است که از آنالیز ریاضی می دانیم هر دنباله کوشی با زیردنباله همگرا، همگرا است. ∎

(32) H هیلبرت، $A: H \longrightarrow H$ خطی و ضمناً $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

آنگاه A کراندار است.

حل) بنا بر closed Graph بودن می دانیم که ثابت A کراندار است اگر و فقط اگر بسته باشد

$$\text{Graph}(A) = \{ (x, Ax) \mid x \in X \} \subseteq H \times H$$

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow 0 \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases} \Longrightarrow y = 0$$

این برقرار است زیرا اگر Graph A بسته باشد و ضمناً داشته باشیم

$$\begin{matrix} x_n \longrightarrow 0 \\ Ax_n \longrightarrow y \end{matrix} \Longrightarrow x_n \oplus Ax_n \longrightarrow 0 \oplus y \Longrightarrow y = \underset{\text{بنا بر خطی بودن}}{A(0)} = 0$$

برعکس: اگر حکم برقرار باشد گراف A بسته باشد

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_n - x \longrightarrow 0 \\ A(x_n - x) \longrightarrow y - Ax \end{cases} \Longrightarrow y - Ax = 0 \quad \therefore \; y = Ax \; \checkmark$$

اکنون بنا بر حکم اثبات شده در بالا می توانیم بنویسیم: اگر

$$\begin{matrix} x_n \longrightarrow 0 \\ Ax_n \longrightarrow y \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \langle Ax_n, y \rangle \overset{\text{فرض}}{=} \langle x_n, Ay \rangle \longrightarrow \langle 0, Ay \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \forall n; \; \langle Ax_n, y \rangle = 0 \quad \therefore \; y \equiv 0 \; \checkmark$$