حل برخی از تمرینات آنالیز حقیقی (کتاب فولند فصل سوم)

تمرین ۲: اگر ν یک اندازه علامتدار باشد، E یک مجموعه ν-پوچ است اگر و تنها اگر $|\nu|(E)=0$.

اثبات: ابتدا فرض کنید که $E\in\mathcal{M}$ یک مجموعه ν-پوچ باشد. فرض کنید $X=P\cup N$ یک تجزیه هان برای ν باشد

در اینصورت، $|\nu|(E)=\nu^+(E)+\nu^-(E)=\nu(E\cap P)-\nu(E\cap N)=0$

برعکس: حال فرض کنید که $E\in\mathcal{M}$ چنان باشد که $|\nu|(E)=0$ در اینصورت برای هر $F\in\mathcal{M}$ که $F\subseteq E$؛

$$\nu(F)=\nu(F\cap P)+\nu(F\cap N)=\nu^+(F)-\nu^-(F)\leq\nu^+(E)+\nu^-(E)=|\nu|(E)=0$$

بنابراین طبق تعریف، E یک مجموعه ν-پوچ است. ■

تمرین ۴: فرض کنید ν یک اندازه علامتدار روی $(X,\mathcal{M})$ باشد

الف) $L^1(\nu)=L^1(|\nu|)$

ب) اگر $f\in L^1(\nu)$، آنگاه $|\int f\,d\nu|\leq\int|f|\,d|\nu|$.

ج) اگر $E\in\mathcal{M}$، $|\nu|(E)=\sup\{|\int_E f\,d\nu| : |f|\leq 1\}$

اثبات: الف):

ابتدا فرض کنید که $f\in L^1(\nu)$ پس $\int|f|\,d\nu^+<\infty$ و $\int|f|\,d\nu^-<\infty$ بنابراین

$\int|f|\,d|\nu|=\int|f|\,d\nu^++\int|f|\,d\nu^-<\infty$ یعنی $f\in L^1(|\nu|)$ ولذا $L^1(\nu)\subseteq L^1(|\nu|)$

حال فرض کنید که $f\in L^1(|\nu|)$ پس $\int|f|\,d\nu^++\int|f|\,d\nu^-<\infty$ لذا $\int|f|\,d\nu^+<\infty$ و

$\int|f|\,d\nu^-<\infty$ بنابراین $\int|f|\,d\nu=\int|f|\,d\nu^+-\int|f|\,d\nu^-<\infty$ یعنی $f\in L^1(\nu)$ ولذا $L^1(|\nu|)\subseteq L^1(\nu)$.

ب): برای هر $f\in L^1(\nu)$؛

$$\left|\int f\,d\nu\right|=\left|\int f\,d\nu^+-\int f\,d\nu^-\right|\leq\left|\int f\,d\nu^+\right|+\left|\int f\,d\nu^-\right|\leq\int|f|\,d\nu^++\int|f|\,d\nu^-$$
$$=\int|f|(d\nu^++d\nu^-)=\int|f|\,d|\nu|.$$

ج): برای هر تابع $f:X\to\mathbb{C}$ که $|f|\leq 1$، طبق قسمت ب): $\left|\int_E f\,d\nu\right|\leq\int_E d|\nu|=|\nu|(E)$

بنابراین $\sup\{|\int_E f\,d\nu| : |f|\leq 1\}\leq|\nu|(E)$

برای اثبات نامساوی در جهت عکس، فرض کنید $X=P\cup N$ یک تجزیه هان برای X نسبت به اندازه ν باشد

و قرار دهید $f=\chi_P+\chi_N$ در اینصورت $|f|=1$ و

$$\left|\int_E f\,d\nu\right|=|\nu(E\cap P)+\nu(E\cap N)|=\nu^+(E)+\nu^-(E)=|\nu|(E)$$

بنابراین $|\nu|(E)\leq\sup\{|\int_E f\,d\nu| : |f|\leq 1\}$. ■

تمرین ۵: الف): اگر ν یک اندازه علامتدار و λ و μ دو اندازه مثبت باشند که $\nu=\lambda-\mu$ آنگاه $\lambda \geqslant \nu^+$ و $\mu \geqslant \nu^-$.

ب): اگر ν_1 و ν_2 دو اندازه علامتدار باشند آنگاه $|\nu_1+\nu_2| \leqslant |\nu_1|+|\nu_2|$.

اثبات: چون $\nu=\lambda-\mu$ و λ و μ هردو اندازه‌ی مثبت اند پس $\nu \leqslant \lambda$ حال برای هر $E\in M$:

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap P)\leqslant\lambda(E\cap P)\leqslant\lambda(E).$$

پس $\nu^+\leqslant\lambda$.

به همین ترتیب چون $\nu\geqslant-\mu$ پس $\nu^-(E)=-\nu(E\cap N)\leqslant\mu(E\cap N)\leqslant\mu(E)$

بنابراین، $\nu^-\leqslant\mu$.

ب) اگر $\nu_1=\nu_1^+-\nu_1^-$ و $\nu_2=\nu_2^+-\nu_2^-$ و $\nu_1+\nu_2=w^+-w^-$ تجزیه‌ی جردن ν_1 و ν_2 و $\nu_1+\nu_2$ باشند آنگاه $\nu_1+\nu_2=\nu_1^++\nu_2^+-(\nu_1^-+\nu_2^-)$ و لذا طبق قسمت الف)،

$\nu_1^++\nu_2^+\geqslant w^+$ و $\nu_1^-+\nu_2^-\geqslant w^-$. بنابراین

$$|\nu_1+\nu_2|=w^++w^-\leqslant\nu_1^++\nu_2^++\nu_1^-+\nu_2^-=|\nu_1|+|\nu_2|. \blacksquare$$

تمرین ۶: اگر $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ که μ یک اندازه مثبت است، تجزیه هان ν، قسمتهای مثبت و منفی و نیز تغییر کل ν را توصیف کنید.

اثبات: دقت کنید که برای آنکه ν یک اندازه علامتدار باشد لازم است که f یک تابع حقیقی روی X باشد.

قرار دهید $P=\{x: f(x)\geqslant 0\}$ و $N=\{x: f(x)<0\}$. آنگاه $X=P\cup N$ یک تجزیه هان برای X نسبت به ν است و

$$\nu^+(E)=\int_{E\cap P} f\,d\mu \quad , \quad \nu^-(E)=\int_{E\cap N} f\,d\mu \quad \text{و} \quad |\nu|(E)=\int_E |f|\,d\mu. \blacksquare$$

تمرین ۷: فرض کنید ν یک اندازه علامتدار روی (X,M) باشد و $E\in M$.

الف): $\nu^+(E)=\sup\{\nu(F): F\in M, E\supset F\}$ و $\nu^-(E)=-\inf\{\nu(F): F\in M, F\subset E\}$

ب): $|\nu|(E)=\sup\{\sum_{j=1}^n|\nu(E_j)| : E_1,\dots,E_n \text{ are disjoint and } \bigcup_1^n E_j=E\}$

اثبات: الف):

$\forall F\in M$ s.t. $F\subset E$, $\nu(F)=\nu^+(F)-\nu^-(F)\leqslant\nu^+(F)\leqslant\nu^+(E)\Rightarrow\sup\{\nu(F): F\subset E\}\leqslant\nu^+(E)$.

برای اثبات نامساوی در جهت عکس: قرار دهید $F=E\cap P$ آنگاه $F\in M$، $F\subseteq E$ و داریم $\nu(F)=\nu(E\cap P)=\nu^+(E)$ بنابراین $\nu^+(E)\leqslant\sup\{\nu(F): F\subset E\}$. قسمت دوم الف نیز به طور مشابه اثبات میشود.

ب): اگر $E_1,\dots$ و E_n مجزا باشند و $\bigcup_1^n E_j=E$ آنگاه برای هر j؛ $|\nu(E_j)|\leqslant|\nu|(E_j)$ بنابراین $\sum_1^n|\nu(E_j)|\leqslant\sum_1^n|\nu|(E_j)=|\nu|(E)$ بنابراین $\sup\{\sum\dots\}\leqslant|\nu|(E)$.

حال فرض کنید $X=P\cup N$ یک تجزیه هان برای ν باشد آنگاه

$$\sup\{\sum\dots\}\geqslant|\nu(E\cap P)|+|\nu(E\cap N)|=\nu^+(E)+\nu^-(E)=|\nu|(E). \blacksquare$$

تمرین ۸: اگر ν یک اندازه علامتدار و μ یک اندازه مثبت باشد گزاره‌های زیر معادلند

الف) $\nu \ll \mu$ ب) $|\nu| \ll \mu$ ج) $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$

اثبات: الف) ⇐ ب):

فرض کنید $\nu \ll \mu$ و $X = P\cup N$ یک تجزیه هان برای X نسبت به ν باشد. حال فرض کنید $E\in\mathcal{M}$ چنان باشد که $\mu(E)=0$ در اینصورت $\mu(E\cap P)=0$ و $\mu(E\cap N)=0$. بنابراین (چون $\nu\ll\mu$)؛

$\nu(E\cap P)=0$ و $\nu(E\cap N)=0$ و لذا $|\nu|(E)=\nu(E\cap P)+\nu(E\cap N)=0$

بنابراین $|\nu|\ll\mu$.

ب) ⇐ ج):

فرض کنید که $|\nu|\ll\mu$ و فرض کنید $\mu(E)=0$. دراینصورت $\mu(E\cap P)=0$ و $\mu(E\cap N)=0$

بنابراین (چون $|\nu|\ll\mu$)، $|\nu|(E\cap P)=0$ و $|\nu|(E\cap N)=0$ و لذا

$\nu^+(E)=\nu(E\cap P)=|\nu|(E\cap P)=0$ و $\nu^-(E)=-\nu(E\cap N)=-|\nu|(E\cap N)=0$.

بنابراین $\nu^+\ll\mu$ و $\nu^-\ll\mu$.

ج) ⇐ الف):

فرض کنید که $\nu^+\ll\mu$ و $\nu^-\ll\mu$ و فرض کنید $\mu(E)=0$. دراینصورت

$\mu(E\cap P)=0$ و $\mu(E\cap N)=0$ بنابراین (چون $\nu^+\ll\mu$ و $\nu^-\ll\mu$)،

$\nu^+(E\cap P)=0$ و $\nu^-(E\cap N)=0$ ولذا $\nu(E)=\nu^+(E\cap P)-\nu^-(E\cap N)=0$

بنابراین $\nu\ll\mu$. ■

تمرین ۱۲: فرض کنید μ و ν دو اندازه متناهی روی $(X,\mathcal{M})$ باشند که $\nu\ll\mu$ و قرار دهید $\lambda=\mu+\nu$.
اگر $f=d\nu/d\lambda$ آنگاه $0\le f<1$ μ-a.e و $d\nu/d\mu=f/(1-f)$.

اثبات: اگر $\lambda(E)=0$ آنگاه (چون μ و ν اندازه‌های مثبت متناهی‌اند)، $\mu(E)=0$ و $\nu(E)=0$ ولذا $\nu\ll\lambda$.

بنابراین طبق قضیه رادون نیکودیم یک $f\in L^1(\lambda)$ موجود است که $f=d\nu/d\lambda$.

نشان میدهیم که $0\le f<1$ μ-a.e. برای اثبات این مطلب قرار دهید $A=\{x: f(x)<0\}$ و $B=\{x: f(x)\ge 1\}$ دراینصورت $A,B\in\mathcal{M}$. نشان میدهیم که $\mu(A)=0$ و $\mu(B)=0$.

$$f=d\nu/d\lambda \Rightarrow \nu(B)=\int_B f\,d\lambda=\int_B f\,d\mu+\int_B f\,d\nu \ge \mu(B)+\nu(B) \Rightarrow \mu(B)=0 \Rightarrow f<1\ \mu\text{-a.e}$$

برای اثبات اینکه $\mu(A)=0$، فرض کنید $\mu(A)>0$ دراینصورت $\int_A f\,d\mu<0$ و بنابراین

$\nu(A)=\int_A f\,d\lambda=\int_A f\,d\mu+\int_A f\,d\nu<\int_A f\,d\nu\le 0$ یعنی $\nu(A)<0$ که در تناقض با مثبت بودن ν است. پس $\mu(A)=0$

ولذا $f<1$ μ-a.e. بنابراین $0\le f<1$ μ-a.e. اثبات قسمت دوم:

$$\forall E\in\mathcal{M}\quad \nu(E)=\int_E f\,d\lambda=\int_E f\,d\mu+\int_E f\,d\nu \Rightarrow \int_E f\,d\mu=\int_E (1-f)\,d\nu \Rightarrow \int_E \frac{f}{1-f}\,d\mu=\int_E d\nu=\nu(E)$$

$$\Rightarrow d\nu/d\mu=f/(1-f).\ ■$$