سوال ۲.۲: داریم $\overline{M}=X$ ، $T: M \xrightarrow{Linear} Y$ و $\|Tm\| \le k\|m\|$

فرض کنیم $x \in X$ دلخواه، چون $\overline{M}=X$ دنباله $x_n \in M$ وجود دارد به طوری که

$$\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$$

بنابراین دنباله x_n کوشی است یعنی

$$\|x_n - x_m\|_X \longrightarrow 0.$$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\|_Y \le k\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$$

در نتیجه $\{Tx_n\}$ در Y کوشی است. چون Y باناخ است پس $\{Tx_n\}$ همگرا به y در Y است. تعریف می‌کنیم $T'(x)=y$. T' خوش تعریف است. چون اگر $T'(x)=y'$ آنگاه داریم

$$y' = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T'(\lim_{n\to\infty} x_n) = y$$

چون T' پیوسته است.

T' خطی است چون

$$T'(\alpha x + t) = T'(\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + t_n)) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n + t_n)$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} T(x_n) + \lim_{n\to\infty} T(t_n) = \alpha x + t.$$

این توسیع منحصر بفرد است چون M چگال است. اگر T'_1 توسیع دیگری باشد باید $T'_1|_M = T'$ و میدانیم اگر دو تابع پیوسته روی یک مجموعه چگال باهم برابر باشند، روی کل فضا برابرند.

سوال ۵.۲: می‌دانیم $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ با توجه به نمادهای مثال ۶.۲.

همانطوری که در این مثال گفته شده است

$$T_\varphi = M_\varphi|_{L^2_a(\mathbb{D})}$$

و در کلاس نشان دادیم $(M_\varphi)^* = M_{\bar\varphi}$. بنابراین

$$(T_\varphi)^* = T_{\bar\varphi}$$

سوال ۹.۲: طبق تعریف فرض کنیم $T: H \longrightarrow K$ یک ایزومتری باشد باشد پس

$$\forall h_1, h_2 \in H \Longrightarrow \langle Th_1, Th_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$$

ولذا

$$\|Th\|_K = \|h\|_H .$$

در نتیجه T یک به یک است. لذا T یک یکریختی است از طرفی

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle Th_1, Th_2\rangle = \langle h_1, T^*Th_2\rangle \Longrightarrow$$

$$\langle h_1, (T^*T - I)h_2\rangle = 0 \Longrightarrow T^*T = I_H$$

مشابهاً می‌توان نشان داد که $\cancel{T^*T=I}$ $TT^* = I_K$.

سوال ۲.۱۲: A از پایین کراندار است پس

$$\exists\, \delta > 0 : \forall x \in H, \quad \|Ax\|_K \geq \delta \cdot \|x\|_H .$$

بنابراین A یک به یک است. حال ثابت می‌کنیم A پوشاست.

If $y \in K$, then $y \in \cancel{Rang\ AH}$ $\overline{AH}$.

لذا دنباله y_n در AH وجود دارد به طوری که $y_n \xrightarrow[norm]{in} y$. y_n دنباله کوشی است و داریم

$$\forall n, \exists!\, x_n \in H : y_n = A(x_n) .$$

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\delta}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{\delta}\|y_n - y_m\| \longrightarrow 0$$

پس x_n در H کوشی است ولذا همگراست. فرض کنیم $x_n \to x$ همگرا باشد چون A پیوسته است داریم $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \to Ax$. یعنی $y \in AH$.

سوال ۲.۲۱: فرض کنید $H = H_1 \oplus H_2$ ، $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ ، $\forall h \in H, \exists!\, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ که $h = h_1 + h_2$.

T یک به یک است چون اگر $T(h) = 0$ آنگاه:

$$h = h_1 + h_2 \Longrightarrow 0 = T(h_1 + h_2) = T(h_1) + T(h_2) = h_1 - h_2 \longrightarrow h_1 = h_2 \longrightarrow$$

$$h_1 = h_2 \in H_1 \cap H_2 = \{0\} \longrightarrow h_1 = h_2 = 0 \longrightarrow h = 0 \checkmark$$

T پوشاست چون $h = h_1 + h_2$ آنگاه $h = T(h_1 - h_2)$.

$$T(h) = T(h_1 + h_2) = h_1 - h_2 \longrightarrow T^{-1}(h_1 - h_2) = h_1 + h_2 \longrightarrow T = T^{-1}$$

همچنین $H = H_1 \oplus H_2$ و از طرفی $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$، در نتیجه

$H_2 = H_1^{\perp}$ ثابت می‌شود.

$$\langle x_1 - x_2 , y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 \rangle .$$

$$\langle x_1 - x_2 , y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle + \overbrace{\langle x_1 , y_2 \rangle}^{0} - \overbrace{\langle x_2 , y_1 \rangle}^{0} -$$

$$\langle x_2 , y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle - \langle x_2 , y_2 \rangle$$

$$= \langle x_1 , y_1 \rangle + \langle x_2 , -y_2 \rangle \quad (1)$$

از طرفی

$$\langle x_1 + x_2 , y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle - \langle x_1 , y_2 \rangle + \langle x_2 , y_1 \rangle -$$

$$\langle x_2 , y_2 \rangle = \langle x_1 , y_1 \rangle - \langle x_2 , y_2 \rangle \quad (2)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix} \Longrightarrow \langle x_1 - x_2 , y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 , y_1 - y_2 \rangle$$

فرض کنید $x , y \in H$ داریم. $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$

$$\langle T x , y \rangle = \langle x , T^* y \rangle$$

از طرفی

$$\langle T x , y \rangle = \langle T(x_1 + x_2) , y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle T x_1 + T x_2 , y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 - x_2 , y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle x_1 + x_2 , y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 , T(y_1 + y_2) \rangle$$

با توجه به منحصر به فرد بودن T^* داریم $T^* = T$