سوال ۱.۳ : اگر دنباله $f_n(t) = \sqrt{t + 1/n}$ در نظر بگیریم . $f_n(t)$ به طور یکنواخت همگرا به $\sqrt{t}$ است با نرم $\|\cdot\|_\infty$ اما

$\sqrt{t} \in C'[0,1]$

یعنی با شرح چیزی در $t=0$ مشتق پذیر نیست.

ب) : وقتی $f_n \longrightarrow f_n$ با نرم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|$. آنگاه f_n' نیز همگرا می‌باشند و طبق قضیه ای در آنالیز داشتیم که اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ و $f_n' \xrightarrow{u} g$ آنگاه f مشتق پذیر است و $f' = g$.

سوال ۱.۶ :

الف :
$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j + b_j|^2 \beta(j)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j + b_j|^2 |\beta(j)|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| a_j |\beta(j)| + b_j |\beta_j| \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| a_j |\beta(j)| \right|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| b_j |\beta(j)| \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 |\beta(j)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 |\beta(j)|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \beta(j)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 \beta(j)^2 \right)^{1/2}.$$

ب :

$$\ell^2_w = \{ x = (x_i)_{i \in I} ; \|x\|_p < \infty \}$$

$$\text{and } \left(\sum_{i \in I} |x_i|^2 w(i)^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$\|x\|_{p,w} = \left(\sum_{i \in I} |x_i|^2 w(i)^2 \right)^{1/2}$$

فرض کنیم x_n یک دنباله کوشی باشد. توجه کنیم

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots)$$

که $x_n(k)$ مولفه kام x_n است. چون x_n کوشی است پس داریم.

$$\|x_n - x_m\|_p \longrightarrow 0$$

برای مولفه kام داریم.

$$|x_m(k) - x_n(k)| \le \|x_m - x_n\|_p$$

پس $x_n(k)$ یک دنباله کوشی از اعداد است و لذا همگرا است. فرض کنیم $x_n(k) \longrightarrow x_k$ باشد. در نظر می‌گیریم $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

چون x_n یک دنباله کوشی و نقطه به نقطه همگرا به x است (منظور از نقطه به نقطه اینجا مولفه به مولفه است) پس $x_n \xrightarrow{\|\,\|_p} x$.

سوال 1.11:

$$L^p_a(D) = \{ f \mid f: D \xrightarrow{Ana.} \mathbb{C},\ \frac{1}{\pi}\int_D |f(z)|^p \, dA < \infty \}$$

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int |f(z)|^p \, dA\right)^{\frac{1}{p}}.$$

فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $L^p_a(D)$ باشد. داریم

$$\|f_n - f_m\|_p \longrightarrow 0$$

مشابه نتیجه 1.19 ثابت می‌شود که برای $w \in D$ ثابت داریم

$$|f(w)| \le \frac{1}{1-|w|} \|f\|_p$$

بنابراین داریم

$$|f_n(w) - f_m(w)| = \frac{1}{1-|w|} \|f_n - f_m\|_p$$

بنابراین

$$|f_n(w) - f_m(w)| \longrightarrow 0,$$

بنابراین $\{f_n(w)\}$ یک دنباله کوشی است و لذا دنباله $\{f_n\}$ نقطه به نقطه همگرا است ⇐
مجدداً چون f_n ها به طور یکنواخت کوشی و نقطه به نقطه همگرا است
پس به طور یکنواخت همگرا است.

سوال ۱.۰.۲۱ : الف: فرض کنیم $\{e_1, e_2, \dots\}$ یک خانواده یکامتعامد باشد و $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n = 0$ آنگاه برای $1 \le i \le k$

$$0 = \langle e_i, \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \rangle = \sum_{n=1}^{k} \bar{\alpha}_n \langle e_i, e_n \rangle = \bar{\alpha}_i \langle e_i, e_i \rangle = \bar{\alpha}_i = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0, \quad \forall \quad 1 \le i \le k.$$

ب: فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در M باشد

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} e_j$$

کوشی بودن $\{x_n\}$، کوشی بودن هر یک از دنباله‌های $\{\alpha_{kj}\}$ برای $1 \le j \le n$ را نتیجه می‌دهد. چون $\mathbb{C}$ یک مجموعه کامل است پس $\{\alpha_{kj}\}$ برای هر $1 \le j \le n$ همگرا به α_j است. اگر

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

آنگاه $\|x_n - x\| \to 0$ زیرا

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{nj} - \alpha_j)^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0$$

اگر $p: H \longrightarrow M$ یک تصویر متعامد باشد آنگاه

$$px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

~~چون $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ و لذا~~

~~$px = p(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p(e_j)$~~

طبق نتیجه ۱.۰.۲۳ قسمت (c) نتیجه حاصل است

سوال ۱۰.۲۸: فرض کنید $e_n \to g$ به طور ضعیف.

$$g \in H, \quad g = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i e_i$$

و لذا اگر $n > n_0$ داریم:

$$\langle e_n, g\rangle = \langle e_n, \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i e_i\rangle = 0$$

و این خلاف $\lim \langle h_n, g\rangle = \langle h, g\rangle$ برای هر $g \in H$ است.

$$\lim \langle e_n, g\rangle \not\to \langle g, g\rangle \neq 0$$

اگر $h = \sum \langle h, e_n\rangle e_n$ و $h_n \xrightarrow[\text{norm}]{\text{in}} h$ آنگاه:

$$\|h_n - h\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{n_i} - \alpha_i|^2\right)^{1/2}$$

که $\alpha_i = \langle h, e_i\rangle$ و $\alpha_{n_i} = \langle h_n, e_i\rangle$. لذا داریم:

$$\langle h_n, h\rangle = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{n_j} - \alpha_j| \le k\|h_n - h\| \to 0$$