حل برخی از تمرینات آنالیز حقیقی (کتاب فولند) فصل اول

تمرین ۱۲: فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی باشد

الف) اگر $E, F \in \mathcal{M}$ و $\mu(E \Delta F)=0$ آنگاه $\mu(E)=\mu(F)$

ب) می‌گوییم $E \sim F$ اگر و تنها اگر $\mu(E\Delta F)=0$. درانیصورت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathcal{M}$ است.

ج) اگر $E, F \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم $\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$. درانیصورت ρ یک متر روی فضای $\mathcal{M}/\sim$ متشکل از کلاسهای هم‌ارزی تعریف می‌کند.

حل: الف) $E-F$ و $F-E$ دو مجموعه اندازه‌پذیر مجزا هستند که $E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$ لذا

$0=\mu(E\Delta F)=\mu(E-F)+\mu(F-E)$ پس $\mu(E-F)=0$ & $\mu(F-E)=0$ بنابراین

$$\mu(E)=\mu(E-F)+\mu(E\cap F)=\mu(F-E)+\mu(F\cap E)=\mu(F). \blacksquare$$

ب) خاصیت انعکاسی:

$$\forall E\in\mathcal{M} \quad \mu(E\Delta E)=\mu(\emptyset)=0 \Rightarrow E\sim E$$

خاصیت تقارنی: فرض کنیم $E, F\in\mathcal{M}$ و $E\sim F$ درانیصورت

$$E\sim F \Rightarrow \mu(E\Delta F)=0 \Rightarrow \mu(F\Delta E)=0 \Rightarrow F\sim E$$

خاصیت تعدی: فرض کنیم $E, F, G\in\mathcal{M}$ و $E\sim F$ و $F\sim G$ درانیصورت

$E-G\subseteq(E-F)\cup(F-G)$ و $G-E\subseteq(G-F)\cup(F-E)$ لذا

$$\begin{aligned}0\le\mu(E\Delta G)&\le\big(\mu(E-F)+\mu(F-G)\big)+\big(\mu(G-F)+\mu(F-E)\big)\\&=\big(\mu(E-F)+\mu(F-E)\big)+\big(\mu(F-G)+\mu(G-F)\big)\\&=\mu(E\Delta F)+\mu(F\Delta G)=0 \quad\Rightarrow \mu(E\Delta G)=0\Rightarrow E\sim G. \blacksquare\end{aligned}$$

ج) نامساوی مثلثی را برای ρ اثبات می‌کنیم. خواص دیگر متر برای ρ به سادگی تحقیق می‌شوند.

فرض کنیم $E, F, G\in\mathcal{M}$ درانیصورت همانگونه که در روابط فوق مشاهده کردیم

$$E\Delta G\subseteq(E\Delta F)\cup(F\Delta G)$$

لذا

$$\rho(E,G)=\mu(E\Delta G)\le\mu(E\Delta F)+\mu(F\Delta G)=\rho(E,F)+\rho(F,G). \blacksquare$$

تمرین ۲۰: فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی روی X و $\mathcal{M}^*$، σ-جبر مجموعه‌های μ^*-اندازه پذیر باشد و $\bar{\mu}=\mu^*|\mathcal{M}^*$ و μ^+ اندازه خارجی القا شده توسط $\bar{\mu}$ طبق رابطه ۱.۱۲ باشد

الف). اگر $E\subset X$، $\mu^*(E)\leqslant\mu^+(E)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر یک $A\in\mathcal{M}^*$ موجود باشد که $A\supset E$ و $\mu^*(A)=\mu^*(E)$.

ب) اگر μ^* از یک پیش اندازه القا شده باشد آنگاه $\mu^*=\mu^+$. (از تمرین ۱۸ الف) استفاده کنید)

ج) یک μ^* روی $X=\{0,1\}$ بسازید بطوریکه $\mu^*\neq\mu^+$.

حل: الف): اندازه خارجی القا شده توسط $\bar{\mu}$ به صورت زیر است

$$\mu^+(E)=\inf\left\{\sum_1^\infty\bar{\mu}(A_j)\ :\ A_j\in\mathcal{M}^*\ \&\ E\subset\bigcup_1^\infty A_j\right\}$$

حال فرض کنیم $E\subset X$ و $\{A_j\}_1^\infty$ یک گردایه از عناصر $\mathcal{M}^*$ باشد که $E\subset\bigcup_1^\infty A_j$ در اینصورت $\mu^*(E)\leqslant\sum_1^\infty\mu^*(A_j)$ و چون $\bar{\mu}=\mu^*|\mathcal{M}^*$ پس برای هر j؛ $\bar{\mu}(A_j)=\mu^*(A_j)$ و بنابراین

$$\sum_1^\infty\bar{\mu}(A_j)=\sum_1^\infty\mu^*(A_j)\geqslant\mu^*(E)$$

چون $\{A_j\}_1^\infty$ یک پوشش دلخواه برای E با عناصر $\mathcal{M}^*$ بود پس بنا به تعریف $\mu^+(E)$ خواهیم داشت $\mu^+(E)\geqslant\mu^*(E)$. ■

قسمت دوم الف): فرض کنیم یک $A\in\mathcal{M}^*$ وجود دارد که $A\supset E$ و $\mu^*(A)=\mu^*(E)$ در اینصورت $\{A_j\}_1^\infty$ که $A_1=A$ و $A_2=A_3=\cdots=\emptyset$ یک پوشش برای E با مجموعه‌های $\mathcal{M}^*$ است ولذا

$$\mu^+(E)\leqslant\sum_1^\infty\bar{\mu}(A_j)=\bar{\mu}(A)=\mu^*(A)=\mu^*(E)\Rightarrow\mu^+(E)\leqslant\mu^*(E)$$

ازطرفی بنا به قسمت اول، $\mu^+(E)\geqslant\mu^*(E)$ و لذا $\mu^*(E)=\mu^+(E)$.

← حال برعکس فرض کنیم که $\mu^*(E)=\mu^+(E)$. لذا برای هر $n\in\mathbb{N}$ یک پوشش مانند $\{A_{nj}\}_{j=1}^\infty$ از عناصر $\mathcal{M}^*$ برای E وجود دارد که $E\subset\bigcup_{j=1}^\infty A_{nj}$ و $\sum_{j=1}^\infty\bar{\mu}(A_{nj})\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}$.

برای هر n قرار میدهیم $B_n=\bigcup_{j=1}^\infty A_{nj}$ و در اینصورت $A=\bigcap_{n=1}^\infty B_n$ و $E\subset A\in\mathcal{M}^*$ و

$$\forall n,\quad A\subset B_n\Rightarrow\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B_n)\leqslant\sum_{j=1}^\infty\mu^*(A_{nj})=\sum_{j=1}^\infty\bar{\mu}(A_{nj})\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}$$

بنابراین $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(E)$. ازطرفی چون $E\subset A$ پس $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(A)$ ولذا $\mu^*(E)=\mu^*(A)$. ■

← ب): فرض کنیم μ^* توسط یک پیش اندازه القا شده باشد. در اینصورت برای هر $E\subset X$ و هر $n\in\mathbb{N}$ طبق تمرین ۱۸ الف، یک $A_n\in\mathcal{A}_\sigma$ وجود دارد که $E\subset A_n$ و $\mu^*(A_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}$.

قرار میدهیم $A=\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ در اینصورت $A\in\mathcal{M}^*$ (دقت کنید که $\mathcal{M}^*$ یک σ-جبر شامل $\mathcal{A}$ و لذا $\mathcal{A}_\sigma$ است) و $A\supset E$ است (چون تمام A_nها شامل E هستند) و $\forall n,\ \mu^*(A)\leqslant\mu^*(A_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}$ پس $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(E)$

ازطرفی چون $A\supset E$ پس $\mu^*(A)\geqslant\mu^*(E)$ ولذا $\mu^*(A)=\mu^*(E)$. حال بنابر الف)؛ $\mu^*(E)=\mu^+(E)$. ■

ج) : μ^* روی $P(X)$ به صورت $\mu^*(\emptyset)=0$ ، $\mu^*(\{0\})=1$ و $\mu^*(\{1\})=2$ ، $\mu^*(X)=4$

یک اندازه خارجی است. اگر $\mathcal{M}^*$ ، σ-جبر مجموعه های μ^*-اندازه پذیر باشد $\mathcal{M}^*=\{\emptyset, X\}$

$$\left(\begin{array}{l}\text{زیرا } \{0\}\notin\mathcal{M}^* \quad \mu^*(X)=4\neq 1+2=\mu^*(X\cap\{0\})+\mu^*(X\cap\{0\}^c) \\ \text{و بهمین ترتیب } \{1\}\notin\mathcal{M}^* \text{ زیرا باز } \quad \mu^*(X)=4\neq 2+1=\mu^*(X\cap\{1\})+\mu^*(X\cap\{1\}^c)\end{array}\right)$$

حال

$$\mu^+(\{0\})=\inf\left\{\sum_1^\infty \bar{\mu}(A_j) : A_j\in\mathcal{M}^*,\ \{0\}\subseteq\bigcup_1^\infty A_j\right\}=\bar{\mu}(X)=4$$

درحالیکه $\mu^*(\{0\})=1$ پس $\mu^+\neq\mu^*$. ■

تمرین ۲۸ : فرض کنید F صعودی و از راست پیوسته باشد و μ_F اندازه متناظر با F باشد در اینصورت

$\mu_F(\{a\})=F(a)-F(a^-)$ ، $\mu_F([a,b))=F(b^-)-F(a^-)$ و $\mu_F([a,b])=F(b)-F(a^-)$

و $\mu_F((a,b))=F(b^-)-F(a)$.

حل : ابتدا توجه کنید که برای هر دو عدد حقیقی $a<b$ ؛ $\mu_F((a,b])=F(b)-F(a)$. حال

(1). $\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, a]$ & $(a-\frac{1}{n}, a]\supset(a-\frac{1}{n+1}, a]\quad \forall n\geq 1 \Rightarrow$

$$\mu_F(\{a\})=\lim_{n\to\infty}\mu_F((a-\tfrac{1}{n}, a])=\lim_{n\to\infty}\left(F(a)-F(a-\tfrac{1}{n})\right)=F(a)-F(a^-)$$

(2). $\mu_F([a,b))=\mu_F((a,b])+\mu_F(\{a\})-\mu_F(\{b\})$

$$=F(b)-F(a)+F(a)-F(a^-)-\left(F(b)-F(b^-)\right)=F(b^-)-F(a^-)$$

(3). $\mu_F([a,b])=\mu_F((a,b])+\mu_F(\{a\})=F(b)-F(a)+\left(F(a)-F(a^-)\right)=F(b)-F(a^-)$

(4). $\mu_F((a,b))=\mu_F((a,b])-\mu_F(\{b\})=F(b)-F(a)-\left(F(b)-F(b^-)\right)=F(b^-)-F(a)$. ■

تمرین ۳۰ : اگر $E\in\mathcal{L}$ و $m(E)>0$، برای هر $\alpha<1$ یک بازه باز I موجود است که $m(E\cap I)>\alpha m(I)$.

حل: ابتدا دقت کنید که اندازه لبگ m روی $\mathbb{R}$ یک اندازه منظم خارجی است بدین معنی که

$$\forall E\in\mathcal{L},\quad m(E)=\inf\{m(U): U\supset E \ \& \ U \text{ is open}\}$$

حال دو حالت زیر را بطور مجزا در نظر می‌گیریم

حالت اول : $m(E)<\infty$.

در این حالت برای هر $\alpha<1$ طبق مطلب فوق یک مجموعه باز $U\supset E$ وجود دارد که $\alpha m(U)<m(E)$.

U به عنوان یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$، اجتماعی شمارش پذیر از بازه‌های باز مجزا می‌باشد: $U=\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ پس

$$\sum_{1}^{\infty}\alpha m(I_j)=\alpha m\Big(\bigcup_{1}^{\infty} I_j\Big)=\alpha m(U)<m(E)=m(E\cap U)=m\Big(\bigcup_{1}^{\infty}(E\cap I_j)\Big)$$
$$\leqslant\sum_{1}^{\infty} m(E\cap I_j)$$

پس حداقل برای یک $j_0\geqslant 1$، $\alpha m(I_{j_0})<m(E\cap I_{j_0})$.

حالت دوم : $m(E)=\infty$.

در این حالت دو عدد حقیقی $a<b$ موجودند که $0<m(E\cap(a,b))<\infty$. حال طبق حالت اول یک بازه باز I_0 موجود است که $m(E\cap(a,b)\cap I_0)>\alpha m(I_0)$.

در اینصورت $I=(a,b)\cap I_0$ بازه بازی است که $m(E\cap I)>\alpha m(I_0)>\alpha m(I)$. ■