چهارشنبه ۱/۲۳

م_۱۳۰: با استفاده از روش تکثیرگرهای لاگرانژ نقاطی از بیضی $3x^2-2xy+3y^2-2=0$ را بیابید که فاصله آنها تا مبدأ کمترین یا بیشترین مقدار را داشته باشند.

$$\begin{cases} f=\sqrt{x^2+y^2} \\ 3x^2-2xy+3y^2-2=0 \end{cases}$$

چون تابع $h(t)=\sqrt{t}$ صعودی است $h$ دارای ماکزیمم است.

لذا برای راحتی دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_1=x^2+y^2 \\ 3x^2-2xy+3y^2-2=0 \end{cases} \quad \nabla f_1=\lambda\nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda(6x-2y) \\ 2y=\lambda(6y-2x) \\ 3x^2-2xy+3y^2-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3\lambda x-\lambda y & (1) \\ y=3\lambda y-\lambda x & (2) \\ 3x^2-2xy+3y^2-2=0 & (3) \end{cases} \quad (1)+(2) \Rightarrow x+y=3\lambda(x+y)-\lambda(x+y)$$

$$\rightarrow (x+y)(1-2\lambda)=0 \rightarrow \begin{cases} x+y=0 & (4) \\ 1-2\lambda=0 & (5) \end{cases}$$

$$y=-x \overset{(3)}{\Rightarrow} 3x^2+2x^2+3x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2} \quad P_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda=\frac{1}{2} &\overset{(1)}{\Longrightarrow} x=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \lambda=\frac{1}{2} &\overset{(2)}{\Longrightarrow} y=\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=y \xrightarrow{(3)} 3x^2-2x^2+3x^2=2 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(P_1)=f(P_2)=\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad f(P_3)=f(P_4)=\sqrt{1}=1$$

م-۱۳۴: درجه حرارت در نقاط مختلف قرص $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$ توسط تابع $T(x,y)=x^2+3y^2-x$ داده شده است. گرم‌ترین و سردترین نقاط D را تعیین کنید. ابتدا نقاط بحرانی T درون D را به دست می‌آوریم

$$\nabla T=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0\\ 6y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=0\Rightarrow P_1\left(\frac{1}{2},0\right)$$

نقاط بحرانی روی مرز D:

$$\begin{cases}f=x^2+3y^2-x\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-1=2\lambda x & (1)\\ 6y=2\lambda y & (2)\\ x^2+y^2=4 & (3)\end{cases}$$

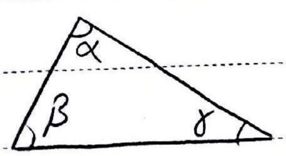
$$(2)\Rightarrow\begin{cases}y=0\xrightarrow{(3)}x=\pm 2\\ y\neq 0\xrightarrow{(2)}2\lambda=6\Rightarrow\lambda=3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}2x-1=6x\Rightarrow x=\frac{-1}{4}\xrightarrow{(3)}\frac{1}{16}+y^2=4\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{63}}{4}$$

$$P_2(2,0),\quad P_3(-2,0),\quad P_4\left(-\tfrac{1}{4},\frac{\sqrt{63}}{4}\right),\quad P_5\left(-\tfrac{1}{4},\frac{-\sqrt{63}}{4}\right)$$

$$T(2,0)=2,\ T\left(\tfrac{1}{2},0\right)=-\tfrac{1}{4},\ T(-2,0)=6,\ T\left(-\tfrac{1}{4},\frac{\sqrt{63}}{4}\right)=\frac{188}{16},\ T\left(-\tfrac{1}{4},\frac{-\sqrt{63}}{4}\right)=\frac{188}{16}$$

م-۱۳۸: در بین مجموعه مثلث‌ها، مثلثی را تعیین کنید که مجموع سینوس زوایای آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.




$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( ) Name.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \lambda \\ \cos\beta = \lambda \\ \cos\gamma = \lambda \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}, \ \beta=\frac{\pi}{3}, \ \gamma=\frac{\pi}{3}$$