$\Rightarrow \sup E_{a,n} = \sup \{t \in \mathbb{R} : t < y = a$

دوشنبه جلسه ۴   ۴,16

تذکر (اصلاح تعریف میدان مرتب)

۱. $\forall x \in F : x < 0 , x > 0 , x = 0$

۲. $x \leq y \quad x + z \leq y + z$

۳. $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ آنگاه $xy \geq 0$

$\Big\} A$

B برای هر $x, y \in F$ داشته باشیم $x > y \vee x < y \vee x = y$

$A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A$

25

* فصل دوم: دنباله‌ها *

* تعریف *: اگر A یک مجموعه دلخواه باشد آنگاه یک دنباله روی A عبارت است از تابعی مانند f که دامنه آن اعداد طبیعی است.

$f: \mathbb{N} \to A$

بود دنباله همیشه شمارا است

در این درس $A=\mathbb{R}$ و لذا دنباله را دنباله اعداد حقیقی می‌نامیم

$\{ f(1), f(2), \dots \}$

۱. نوشتن همه اعضای دنباله

۲. در اعداد حقیقی نوشتن دستور دنباله یا فرمول f

مثال) دنباله اعداد زوج، دنباله اعداد اول، دنباله اعداد گویا، ...

سؤال: آیا می‌توان گفت دنباله اعداد اصم؟ چرا؟ جواب: خیر چون اعداد اصم ناشمارا است.

قرارداد: $a_n = f(n)$ را جمله عمومی دنباله می‌نامیم و برای راحتی از این به بعد می‌نویسیم دنباله a_n

* تعریف *: دنباله a_n را همگرا به $a \in \mathbb{R}$ نامیم و به صورت $a_n \to a$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ نشان می‌دهیم اگر:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

مثال: $a_n = c$ که در آن c یک عدد ثابت است $a_n \to c$

$\forall \varepsilon > 0 , \forall n : |a_n - c| = 0 < \varepsilon$

مثال: $a_n = \frac{n+1}{n} \to 1$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n > N, |a_n - 1| < \varepsilon$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد

$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \exists N_0 \in \mathbb{N} : N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

قرار می‌دهیم $N = N_0$ حال داریم:

$\forall n > N : |a_n - 1| = \frac{1}{n} <$

گزاره 1-2: حد دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ آنگاه $a = b$

برهان: $a = b \iff \forall \varepsilon > 0 : |a - b| < \varepsilon$?

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد چون $a_n \to a$ ، $b_n \to b$

برای این $\varepsilon > 0$ داریم

$\exists N_1>0 : \forall n>N_1 : |a_n-a|<\varepsilon$ ①

$\exists N_2>0 : \forall n>N_2 : |a_n-b|<\varepsilon$ ②

$|a-b| = |a-a_n+a_n-b| < |a_n-a|+|a_n-b|$

فرض کنیم: $N=\max(N_1,N_2)$

برای $n_0>N$ $\quad |a-b| = |a_{n_0}+a-a_{n_0}-b| \le |a_n-a|+|a_n-b| \underset{②}{\overset{①}{<}} \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

گزاره ۲-۲) اگر $a_n\to a$ آنگاه عدد N_0 وجود دارد به طوری که $\forall n>N_0: a_n a>0$

(از مرحله‌ای به بعد $\overset{a\neq 0}{a_n}$ با a هم علامت است)؛ $\quad -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon \to -\varepsilon+a<a_n<\varepsilon+a$

چون (۱) برای هر $\varepsilon>0$ برقرار است لذا فرض می‌کنیم $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$ با توجه به بالا داریم:

$\exists N_1>0 : \forall n>N_1 \Rightarrow |a_n-a|<\frac{|a|}{2}$

$\Rightarrow -\frac{|a|}{2}+a<a_n<\frac{|a|}{2}+a \quad *$

الف) اگر $a>0$ از (*) نتیجه می‌گیریم: $\quad -\frac{a}{2}+a<a_n<\frac{a}{2}+a \to \frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2} \to a_n>0$

ب) اگر $a<0$ از رابطه (*) داریم: $\quad \frac{3a}{2}<a_n<\frac{a}{2} \to a_n<0$

نتیجه اگر برای دنباله a_n عدد N وجود داشته باشد به طوری که $\forall n>N: a_n>0$

$a_n\to a$ آنگاه $a\geq 0$

قضیه 4.2: اگر $a_n \to a$ ، $b_n \to b$ آنگاه:

الف) $a_n \pm b_n \to a \pm b$ ب) $\alpha a_n \to \alpha . a$

ج) $a_n b_n \to ab$ د) اگر $b_n \neq 0$ ، $b \neq 0$ آنگاه $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

قضیه 2-5: اگر a_n همگرا باشد آنگاه a_n کراندار است.

برهان: $\exists M \; \forall n , |a_n| \leq M$

دنباله a_n کراندار است درصورتی که ←

داریم: $a_n \to a$ پس $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a|$

فرض کنیم $\varepsilon = 1$ داریم: $\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| + |a|$

قرار میدهیم $M = Max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}|, 1 + |a|\}$

مشاهده میکنیم

عکس قضیه فوق درست نمیباشد یعنی هر دنباله کراندار لزوماً همگرا نیست

ج) چون a_n همگرا است پس $\exists M > 0 : |a_n| \leq M$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد

$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|b|}$

$a_n \to a \; : \; \exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon_1$ (1)

$b_n \to b \; : \; \exists N_2 : \forall n > N_2 : |b_n - b| < \varepsilon_2$ (2)

$N = Max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N : |a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - ab| < |a_n||a_n - b|$

$+ |b||a_n - a| \overset{(1)}{\underset{(2)}{<}} M . \frac{\varepsilon}{2M} + |b| . \frac{\varepsilon}{2.|b|} = \varepsilon$

عکس قضیه فوق درست نمیباشد
یعنی هر دنباله کراندار لزوماً همگرا نیست

د) $b_n \to b \neq 0$ $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|} . |b_n - b|$

میدانیم $b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$

$\frac{|b|}{2} < |b| \Leftarrow \begin{cases} 0 < \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2} \\ \frac{3b}{2} < b_n < \frac{b}{2} < 0 \end{cases}$

چون $b_n \to b$ همگراست با انتخاب $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ و استفاده از تعریف همگرایی داریم:

$\exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 : b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$

اگر $b>0$ داریم $\frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}$، اگر $b<0$ داریم: $\frac{3b}{2} < b_n < \frac{b}{2} < 0$

پس در هر دو صورت می‌توان گفت:

$n > N_1 : \frac{|b|}{2} < |b_n|$ (1)

اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد آنگاه چون $b_n \to b$ است:

$\exists N_2 : \forall n > N_2 : |b_n - b| < \varepsilon_1 = \frac{|b|^2}{2}\cdot\varepsilon$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد:

$N = Max(N_1, N_2)$

$$\forall n > N : \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \overset{(1)}{<} \frac{|b_n-b|}{\frac{|b|}{2}\cdot|b|} = \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \overset{(2)}{<} \frac{2}{|b|^2}\varepsilon_1 = \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a \\ b_n \to b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

تعریف 2-6

دنبالهٔ a_n را صعودی (نزولی) نامیم در صورتی که: $\exists N > 0 : \forall n > N \Rightarrow a_n \le a_{n+1} \; (a_n \ge a_{n+1})$

a_n را یکنوا نامیم در صورتی که صعودی یا نزولی باشد.

قضیه 2-7 اگر $a_n \uparrow$ و از بالا کراندار باشد آنگاه a_n همگراست:

برهان: در نظر بگیریم $A = \{a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, \dots\}$ داریم $A \neq \emptyset$

و از بالا کراندار است لذا طبق اصل کمال دارای sup است

قرار می‌دهیم $\alpha = \sup A$

ادعا می‌کنیم $a_n \to \alpha$ ؟ باید نشان دهیم:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n > N \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$

$\Rightarrow \alpha - a_n < \varepsilon$ ؟

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد (که آنرا بعداً بدست می‌آوریم) طبق خاصیت sup پس:

$\exists n_0 : \alpha - \varepsilon < a_{n_0} < \alpha$ (1)

از طرفی a_n صعودی است طبق تعریف:

$\exists N_1 : \forall n > N_1 : a_n \le a_{n+1}$

خطا دارد (مثال نقض دارد) پس به صورت زیر تصحیح می‌شود

$N = N_1$

$\forall n > N_1 \quad \alpha - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \alpha \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_n$

مثال (اگر a_n نزولی و از پایین کراندار باشد) اثبات شود

Date :
Subject :

نتیجه

(قضیه) اگر a_n نزولی و از پایین کراندار باشد آنگاه همگراست.

نتیجه

اگر a_n یکنوا و کراندار باشد، همگراست (عکس این مطلب غلط است)

مثال) با توجه به قضایای فوق نشان دهید $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ همگراست.

حل: می‌دانیم $\sum a_n$ همگراست اگر دنباله جمع‌های جزئی آن یعنی $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، پس دنباله $\{S_n\}$ نظیر $\sum \frac{1}{k!}$ را در نظر می‌گیریم:

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = S_{n+1}$$

پس $S\uparrow$ است. نشان می‌دهیم S_n کراندار است

$$S_n = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}}_{\text{جمله } n} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}_{\text{جمله } n-1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\overset{*}{=} 2 + \frac{\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\boxed{S = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}\ *$$

فرض کنیم a_n یک دنباله کراندار باشد لذا $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ از بالا و پایین کراندار است:

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$

$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ چون $A_n \supseteq A_{n+1}$

$\alpha_n = \sup A_n$ و $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \searrow$

$\forall n : \beta \leq \alpha_n$

اگر فرض کنیم $\alpha = \sup A$ و $\beta = \inf A$ داریم:

پس $\{\alpha_n\}$ نزولی و از پایین کراندار است لذا همگراست یعنی:

$\lim \alpha_n$ وجود دارد این حد را حد بالایی دنباله a_n می‌نامیم و با $\limsup a_n$ نشان می‌دهیم:

مشاهده می‌کنیم: $\limsup a_n = \inf \sup a_n$

$\beta_n = \inf A_n : \beta_n \uparrow \quad A_n \supseteq A_{n+1}$ $\quad \beta_n = \inf A_n$ شباهت $\leftarrow$ $\quad k \quad n \geq k$

پس دنباله β_n از بالا کراندار است لذا $\exists \lim \beta_n$. این حد را حد پایین دنباله a_n نامیم و با علامت $\liminf a_n$ نشان می‌دهیم مشاهده می‌کنیم:

$\boxed{1}$ $\liminf a_n = \sup_{k} \inf_{n \geq k} a_n$

$a_n=(-1)^n$ ، $\lim\sup a_n=1$ ، $\lim\inf a_n=-1$ ، $\lim\inf a_n \le \sup a_n$

جلسه ۹ 7/23

* اضافه به تعریف حد: فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه و $f:A\to B$ گوییم حد $f(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود (f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد) برابر l است.

اگر برای هر همسایگی حول l مانند N_l یک همسایگی وجود داشته باشد حول a مانند N_a به طوری که:

$\forall x\in D_f : x\in N_a \Rightarrow f(x)\in N_l$

کافی است همسایگی را در A و B تعریف کنیم

همسایگی $a\in\mathbb{R}$ یعنی $(a-r, a+r)$ ، $A=B=\mathbb{R} \Rightarrow$ r را شعاع همسایگی گوییم.

$x\in(a-r,a+r) \Rightarrow |x-a|<r$

همسایگی ∞ : (N,∞) , $N\in\mathbb{R}^+$ ؛ به طور مثال: $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ $\quad \forall M<0, \exists N>0, x\in D_f : x>N \Rightarrow f(x)<M$

همسایگی $-\infty$: $(-\infty, M)$, $M\in\mathbb{R}^-$

← فرض کنیم a_n کراندار باشد

1) $a_n\uparrow$ از بالا کراندار $\Longrightarrow$ همگرا

2) $a_n\downarrow$ از پایین کراندار $\Longrightarrow$ همگرا

* دنباله‌های کوشی *

تعریف 9-2: دنباله a_n را یک دنباله کوشی نامیم در صورتی که: $\forall \varepsilon>0 : \exists N>0 :$

$\forall n,m>N : |a_m-a_n|<\varepsilon$

* قضیه 2-10 * هر دنباله کوشی کراندار است.

برهان: a_n کوشی است: $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n,m>N \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$

اگر $\varepsilon=1$ آنگاه؛

N_0 وجود دارد به طوری که $\forall n,m>N_0 : |a_n-a_m|<1$

If $m=[N_0]+1$ ① $\Rightarrow |a_n|<1+|a_{[N_0]+1}|$ ②

$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{[N_0]}|, 1+|a_{[N_0]+1}|\}$

با توجه به تعریف M و رابطه ② داریم: $\forall n : |a_n|\le M.$

* قضیه 2-11 * اگر a_n دنباله‌ای همگرا باشد آنگاه یک دنباله کوشی است.

$\forall\varepsilon>0 : \exists N>0 : \forall n,m>N \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$?

Q

داریم $a_n \longrightarrow a$ پس $|a_n - a| < \varepsilon$: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall n > N$ فرض کنیم ε داده شده باشد

طبق رابطه بالا به ازای $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon_1$

← کافی است قرار دهیم $N = N_1$ داریم:

$\forall n, m > N = N_1 : |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon$

* نکته مهم: در یک فضای دلخواه لزوماً هر دنباله کوشی همگرا نیست! $X = (0, 1]$ ، $a_n = \frac{1}{n}$

(کاملیت نقطه همگرایی را داخل مجموعه نداریم)

imp قضیه 2-12 * اگر a_n یک دنباله حقیقی کوشی باشد آنگاه در $\mathbb{R}$ همگرا است

← چون a_n یک دنباله کوشی است پس کراندار می‌باشد یعنی

$\exists M > 0 : \forall n : |a_n| \le M$

$c_n = \inf\{a_k : k > n\}$

c_n یک دنباله صعودی است و حد دارد (این همان حد پایینی a_n است)

فرض کنیم $c_n \to c$ نشان می‌دهیم دنباله a_n به c همگراست؟

a_n کوشی است پس به ازای ε داریم:

$\exists N > 0 : \forall n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

درنتیجه به ازای هر $n > N$ داریم:

$a_n \in \left(a_{\underbrace{[N]+1}_{m}} - \frac{\varepsilon}{2} , a_{\underbrace{[N]+1}_{m}} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ ① $\Rightarrow \forall n > N \Rightarrow c_n \in \left(a_{[N]+1} - \frac{\varepsilon}{2} , a_{[N]+1} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

لذا $c = \lim c_n \in \left(a - \frac{\varepsilon}{2} , a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ در حالت قبل فرض کردیم $m = [N]+1$ و نشان دادیم c در بازه داده شده قرار دارد برای هر $m > N$ می‌توانیم با ثابت گرفتن m و تغییر $n > N$ نشان می‌دهیم: $c \in \left[a_m - \frac{\varepsilon}{2} , a_m + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

به عبارتی نشان داریم: $\forall m > N : |a_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

* تعریف * فضای X را یک فضای کامل (باناخ) گوییم درصورتی که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد

~~مثال نشان دهید دنباله $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ همگراست. حل: به جای این کافی است نشان دهیم a_n کوشی است~~

$\forall m,n,\ 0 \le a_m - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{m!} \le \frac{m-n}{(n+1)!} = 0$

$m,n \to \infty$

* زیر دنباله *
اگر a_n یک دنباله باشد و $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ آنگاه a_{n_k} یک زیر دنباله a_n است

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

$7/25$ جلسه 10

a_n یک دنباله کوشی است: $\forall \varepsilon > 0\ (\exists N > 0:$
$\forall n,m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

1. هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است.
2. در $\mathbb{R}$ هر دنباله کوشی همگراست.
3. اگر در فضای X هر دنباله کوشی همگرا باشد آنگاه فضای X را کامل گوییم.
4. هر دنباله کوشی، کراندار است.

← اگر a_n کراندار باشد آنگاه، هر زیر دنباله a_n کراندار باشد.
← اگر یک زیر دنباله a_n کراندار باشد، لزوماً a_n کراندار نیست.

$a_n = \begin{cases} 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$

← سؤال:
اگر هر زیر دنباله a_n کراندار باشد، می‌توان گفت a_n کراندار است؟ *

← اگر تعداد نامتناهی از زیر دنباله‌های a_n کراندار باشد نمی‌توان گفت a_n کراندار است

$a_n = \begin{cases} 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 3 & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳} \\ 5 & \text{اگر } n \text{ مضرب ۵} \\ \vdots \end{cases}$

$2, 3, \dots, P_k, \dots$

a_{2n}

* تعریف * اگر a_n یک دنباله باشد آنگاه a_{n_k} و a_{n_r} را زیر دنباله‌های مکمل a_n نامیم درصورتیکه این دو زیر دنباله با هم تمام اعضای دنباله را شامل شود.

* مثال *
a_{2n} و a_{2n-1}

* تمرین * اگر $a_{n_{k_1}}$ و $a_{n_{k_2}}$ و ... و $a_{n_{k_m}}$ و m زیر دنباله مکمل دنباله باشد و هر یک از آنها کراندار باشد، نشان دهید a_n کراندار است.

← نتیجه اگر a_{2n} و a_{2n-1} کراندار باشند آنگاه a_n کراندار است.

$\boxed{1}$ * هم a_{2n} و a_{2n-1} کراندار اند و مکمل یعنی a_n کراندار است.

تمرین* اگر $X \subset \mathbb{R}$ و a_n دنباله ای کوشی در X باشد به طوریکه دارای یک زیر دنباله همگرا باشد (در X) آنگاه در X همگراست؟

قضیه* اگر a_n دنباله ای همگرا به a باشد، آنگاه هر زیردنباله a_n همگرا به a است.

برهان

فرض کنیم a_{n_k} زیر دنباله ای دلخواه از a_n باشد برای اینکه ثابت کنیم $a_n \to a$ است باید نشان دهیم:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N_1 : \forall n_k > N_1 \Rightarrow |a_{n_k}-a|<\varepsilon \,?$$

فرض کنیم ε داده شده باشد چون $a_n \to a$ داریم: (1)

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N>0 : \forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

کافی است $N_1=N$ داریم

$$\forall n_k > N_1 = N \xRightarrow{①} |a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

عکس قضیه فوق درست است اگر هر زیر دنباله a_n همگرا باشد آنگاه a_n همگراست در عمل چون ما به همه زیردنباله‌ها دسترسی نداریم از قضیه فوق بیشتر برای عدم همگرایی استفاده می‌کنیم به اینصورت که اگر a_n دارای یک زیر دنباله واگرا باشد آنگاه a_n واگراست.

اگر a_n دو زیر دنباله همگرا داشته باشد که نقطه همگرایی آنها متفاوت باشد در اینصورت a_n واگراست.

مثال ۱) $a_n=(-1)^n$ $\quad a_{2n}=1 \quad a_{2n-1}=-1$

مثال ۲)
$$a_n=\begin{cases} 2 & n \text{ زوج} \\ n & n \text{ فرد} \end{cases}$$

تمرین* اگر تعدادی متناهی از زیر دنباله‌های کامل a_n همگرا به a باشند آنگاه a_n همگرا به a است

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N>0 : \forall n>N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

n_{k_1}: $\forall \varepsilon>0 : \exists N_1>0 : \forall n_k>N$

⋮

n_{k_m}: $\exists N_m>0 : \forall n_{k_m}>N_m \Rightarrow |a_{n_{k_m}}-a|<\varepsilon$

$N=\max\{N_1,\dots,N_m\}$

$\forall n>N ,\ a_n=a_{n_{k_r}} \quad 1\le r\le m$

$\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

نتیجه: اگر a_{2n} و a_{2n-1} همگرا به a باشند آنگاه a_n همگرا به a است.

قضیه* 13.2: هر دنباله از اعداد حقیقی همواره دارای زیر دنباله ای یکنواست.

* قضیه بولسانو

برهان: فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد $S=\{n\in\mathbb{N}: a_n=\sup\{a_m | m\geq n\}\}$

دو حالت در نظر می‌گیریم: اگر S مجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N}$ باشد آنگاه S دارای یک زیر دنباله اکیداً صعودی از اعداد طبیعی مانند a_{n_k} است برای هر $k\in\mathbb{N}$ با توجه به اینکه $n_{k+1}>n_k$

چون n_k و n_{k+1} در S است طبق تعریف داریم: $a_{n_{k+1}}=\sup\{a_m : m\geq n_{k+1}\} <$

$\underset{n_{k+1}>n_k \text{ چون}}{<} \sup\{a_m : m\geq n_k\}=a_{n_k}$

بنابراین a_{n_k} زیر دنباله نزولی از a_n است

اگر S متناهی باشد پس عدد طبیعی n_1 وجود دارد به طوریکه $n_1>\max\{n\in S\}$ پس $n_1\notin S$ لذا:

$a_{n_1}\neq\sup\{a_m : m\geq n_1\}$ ولذا $a_{n_1}<\sup\{a_m : m\geq n_1\}$

طبق خاصیت sup: $\exists\, n_2>n_1 : a_{n_1}<a_{n_2}\leq\sup\{a_m : m\geq n_1\}$

مشابهاً $n_3>n_2$ وجود دارد به طوریکه:

$a_{n_1}<a_{n_2}<a_{n_3}\leq\dots$ با ادامه این روند زیر دنباله a_{n_k} صعودی خواسته می‌شود

* بولزانو وایرشتراس *

* قضیه * 2-14 هر دنباله کراندار از اعداد حقیقی دارای یک زیر دنباله همگراست.