یک مجموعه + دو عمل $(+,\cdot)$ → میدان

۱- Q ، + ، . یک میدان

۲- اگر p یک عدد اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p = \{0,1,2,\dots,7\}$

$[1]\cdot[4]=[4]$

$[3][4]=[12]=[4]$ اما $[3]\neq[1]$

مثال) زیر مجموعه $\alpha\subseteq Q$ را یک برش ددکیند نامیم در صورتیکه در سه شرط زیر صدق کند:

1) $\alpha\neq\emptyset$ ، $\alpha\neq Q$

2) $\forall x\in\alpha$ ، $\exists y\in\alpha : x<y$

3) $\forall x\in\alpha$, if $y<x \Rightarrow y\in\alpha$ $\qquad \alpha=\{x\in Q : x<2\}$

مثال) $\alpha=\{x\in Q : x<2\}$

2. If $x<2$ ، $y=x+\frac{2-x}{2}$, $x<y$

3. If $x<2$ ، $y\in Q$ ، $y<x \overset{?}{\Rightarrow} y<2$

$x \quad y \quad 2$

اصل

$R = \{$ مجموعه تمام برش های ددکیند روی Q $\}$

۱) نشان می‌دهیم R همراه با دو عمل جمع و ضرب تعریف شده در آن یک میدان است

حال باید بررسی کنیم که مجموع دو برش ددکیند دوباره یک برش ددکیند.

If $\alpha , \beta \in R$, $\alpha+\beta = \{ x+y : x\in\alpha , y\in\beta \}$

1) $\alpha+\beta \neq \emptyset$ ، $\alpha+\beta \neq Q$?

چون $\alpha\neq\emptyset$ پس $\exists x_0\in\alpha$ ، $\beta\neq Q$ پس $\exists y_0\in\beta$ ، لذا $\to x_0+y_0\in\alpha+\beta$?
و در نتیجه $\alpha+\beta\neq\emptyset$

چون $\alpha\neq Q$ پس $\exists r\in Q : r\notin\alpha$ همچنین $\beta\neq Q$ پس $\exists s\in\beta$ ، $s\notin\beta$
(باید $x\in Q$ را بیابیم بطوریکه مجموع در عضو α و β نباشد)

چون α یک برش ددکیند است، $r\notin Q$ ، پس برای هر $x\in\alpha$ داریم $x<r$ مشابهاً برای هر $y\in\beta$ داریم $y<s$ لذا هر

$\forall x\in\alpha , \forall y\in\beta : x+y < r+s$ *

حال اگر $t_0 \geq r+s$ باشد، $t\in Q$
آنگاه طبق رابطه (*) t_0 نمی‌تواند عضو $\alpha+\beta$ باشد بنابراین $\alpha+\beta\neq Q$

اثبات شرط ۲ و ۳ به عنوان تمرین

* خواص ددکیند *

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ جابجایی

2) $(\alpha+\beta)+C=\alpha+(\beta+C)$ شرکت‌پذیری

3) $0=\{x\in Q : x<0\}$

اثبات خاصیت ۳

If $\alpha\in R$ ، $\alpha+0=\alpha$?

پس باید به صورت مجموع نوشت ?

$\alpha \subseteq \alpha+0 \Leftarrow \forall x\in\alpha , \exists y\in\alpha , z\in 0 \Rightarrow x=y+z$

$x\in\alpha \to \exists x_0\in\alpha : x_0 > x , \; x-x_0 < 0 \Rightarrow x-x_0\in 0 \Rightarrow x=\underbrace{x_0}_{\in\alpha}+\underbrace{x-x_0}_{\in 0}$

برعکس: $\alpha+0\subset\alpha$ ، $y\in\alpha+0 \to y=\underbrace{x_0}_{\in\alpha}+\underbrace{y_0}_{\in 0} < x_0$

اگر $y\in\alpha+0$ باشد آنگاه طبق تعریف $y=x_0+y_0$ که $x_0\in\alpha$ ، $y_0\in 0$ چون $y_0\in 0$ ، $y_0<0$ است داریم $y<x_0$ و چون α یک برش ددکیند است لذا $y\in\alpha$

اثبات خاصیت ۴

- ضرب دو برش حال دد کنند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\alpha\cdot\beta=\{x\in Q: \exists r\in\alpha\cap Q^+ , \exists y\in\beta\cap Q^+ : x<ry\}$

$\alpha\cdot\beta=\{xy \quad x\in\alpha, y\in\beta\}$ $\quad\quad$ $\alpha\neq Q, \exists x_0>1: x_0\notin\alpha$

$\alpha\cdot\beta\neq\emptyset, \alpha\cdot\beta\neq Q$ $\quad\quad$ $\beta\neq Q: \exists y_0>1: y_0\notin\beta$

جلسه 4 $\quad$ 6,28

$-\alpha=\{x\in Q . \exists r\in Q^+ : -x-y\notin\alpha\}$

- حال تعریف ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف) اگر $\beta\cap Q^+\neq\emptyset$, $\alpha\cap Q^+\neq\emptyset$

$\alpha\cdot\beta=\{z\in Q : \exists x\in\alpha\cap Q^+ \wedge \exists y\in\beta\cap Q^+ : z<xy\}$

مثال: $\alpha=\{x\in Q: x<1\}$

$\beta=\{y\in Q : y<2\}$

ب) حال α و β دلخواه:

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases} 0 \text{ if } \alpha=0 \vee \beta=0 \\ -((-\alpha)\cdot\beta) , \quad \alpha\cap Q^+=\emptyset , \beta\cap Q^+\neq\emptyset \\ -((-\alpha)\cdot\beta) , \quad \alpha\cap Q^+=\emptyset \wedge \beta\cap Q^+=\emptyset \end{cases}$$

R با دو عمل جمع و ضرب تعریف شده در قبل یک میدان است

** قضیه * فرض کنیم $(F,\times,+)$ یک میدان باشد برای هر x, y, z در F داریم:

الف) $x+z=y+z \Rightarrow x=y$

ب) $x+y=0 \Rightarrow y=-x$

ج) $x\neq 0 \wedge xy=xz \Rightarrow y=z$

د) $x+y=x \Rightarrow y=0$

ه) $-(-x)=x$

و) $y\neq 0$, $xy=y$ — $x=1$

ز) $x\neq 0$ ، $xy=1$, $y=x^{-1}$

ح) $x\neq 0$, $(x^{-1})^{-1}=x$

* تعریف *

فرض کنیم F و F′ دو میدان باشند تابع $\phi: F\to F'$ را یک همریختی روی F گوییم

در صورتیکه :

1) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$

2) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$

مثال) $\phi : Q \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت زیر یک همسریختی است : $\phi(r) = r^*$

(با توجه به یکی از تمرین های قبل داریم : $\phi(r+s) = (r+s)^* = r^* + s^*$

$\phi(r \cdot s) = (r \cdot s)^* = r^* s^*$

$\phi(r) = \phi(s) \Rightarrow r^* = s^* \Leftrightarrow s = r$

2) تعریف مرتب : تعریف ۲-۱ : اگر F یک میدان مخالف صفر باشد رابطه $\leq$ را یک ترتیب جزئی روی F نامیم در صورتیکه :

الف) $\forall a \in F$ ، $a \leq a$

ب) برای هر $a, b \in F$ ، اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$

ج) برای هر $a, b, c \in F$ اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$

مثال ۲-۲ : اعداد حقیقی با رابطه $\leq$

مثال ۲-۳ : R با رابطه $\alpha, \beta \in R$ ، $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

الف) برای هر $\alpha \in R$ داریم $\alpha \subseteq \alpha$

ب) برای هر $\alpha, \beta \in R$ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آنگاه داریم : $\alpha \subseteq \beta$, $\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

ج) اگر $\alpha, \beta, \gamma \in R$ و $\alpha \leq \beta$ ، $\beta \leq \gamma$: $\alpha \subseteq \beta$, $\beta \subseteq \gamma \Rightarrow \alpha \subseteq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$

مثال ۲-۴ : Z_p با رابطه $[m] \leq [n]$ ($n < p$ و $0 \leq m$) اگر $m \leq n$

تعریف ۲-۵ : فرض کنیم F با رابطه $\leq$ یک میدان مرتب جزئی باشد آنگاه F یک میدان مرتب است اگر :

الف) برای هر $x \in F$ فقط و فقط یکی از روابط زیر برقرار است : $x < 0$ و $x = 0$ و $x > 0$

ب) برای هر $x, y, z \in F$ اگر $x \leq y$ آنگاه $x + z \leq y + z$

ج) برای هر $x, y \in F$ اگر $x > 0$ و $y > 0$ آنگاه $xy > 0$

می‌توان نشان داد که تعریف فوق معادل است. ۲- میدان مرتب جزئی : یک میدان مرتب است $\Longleftrightarrow$ برای هر $x, y \in F$ یکی و فقط یکی از روابط زیر برقرار باشد: $x < y$ یا $x = y$ یا $x > y$

مثال ۲-۶ : $\mathbb{R}$ با $\leq$ یک میدان مرتب است. مثال ۲-۷ : $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ با رابطه $\subseteq$ یک مجموعه مرتب جزئی است ولی مرتب نیست.

$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 2, 5\}$