$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2,3\}$

7,2

F یک میدان مرتب است در صورتیکه همه دو عضو F باهم قابل مقایسه باشند یعنی برای همه $x, y \in F$ داشته باشیم $x \le y$ یا $y \le x$

مثال: $A=(0,1)$, $B=[\frac{1}{2},2]$: مطلوب مثال ترتیب نیست

تمرین ۱: $\mathbb{R}$ با رابطه $\le$ یک میدان مرتب است

1) if $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha = r_1^*$, $\beta = r_2^*$ $\qquad r^* = \{x \in \mathbb{Q} \,.\, x < r\}$ $\quad r \in \mathbb{R}$

2) if $r_1 = r_2 \Rightarrow \alpha = \beta$

3) if $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$

4) if $r_2 > r_1 \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$

تمرین ۱: آیا می‌توان گفت برای همه $\alpha \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی r وجود دارد بطوریکه $\alpha = r^*$ ؟

۳ مجموعه‌های کراندار و کران‌های یک مجموعه

* تعریف ۹-۱ * فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان مرتب و $A \subseteq F$ ، آنگاه A را از بالا کراندار نامیم درصورتیکه:

$$\exists \alpha \in \mathbb{F} : \forall x \in A : x \le \alpha$$

همانطور A را از پایین کراندار نامیم درصورتیکه $\exists \beta \in F : \forall x \in A : x \ge \beta$

A را کراندار نامیم در صورتیکه از پایین و بالا کراندار باشد.

در تعریف قبل، α را یک کران بالای A، و B را کران پایین A می‌نامیم. مثال: $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ و
$A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ، A از بالا و پایین کراندار و
$B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 2)$ ، B از بالا کراندار است ولی از پایین کراندار نمی‌باشد

مثال ۳-۳: $F=\mathbb{R}$ ، $\alpha_n=\{x\in Q : x<\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ آیا $A=\{\alpha_n\}$ از بالا و پایین کراندار است؟

حل:

A از بالا کراندار است مثلاً $\alpha_1=\{x\in Q: x<\sqrt{2}\}$ یک کران بالاست، A از پایین کراندار است چون: $O=\{x\in Q : x<0\}$ یک کران پایین است

⟸ در نتیجه A کراندار است

تعریف 3-4: اگر F یک میدان مرتب و $A\subseteq F$ از بالا کراندار باشد آنگاه $\alpha\in F$ را سوپریمم A (sup A) یا کوچکترین کران بالای A می‌نامیم در صورتیکه:

1) α یک کران بالا باشد.

2) اگر β یک کران بالای دیگر برای A باشد آنگاه $\alpha\le\beta$.

مثال 3-5) اگر $F=Q$ و $A=(0,1)\cap Q$ آنگاه $\sup A=1$ ، اگر $B=(-\infty,\sqrt{2})\cap Q$ ، B دارای sup نمی‌باشد

مثال 3-6) در مثال 3-3 ، $\sup A=\alpha_1$ است.

تمرین) فرض کنیم $A\subseteq\mathbb{R}$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$ آنگاه $\sup A=\alpha$ است ⟺ 1- α یک کران بالا باشد

2- برای هر $\varepsilon>0$ ، $\exists x_\varepsilon\in A: \alpha-\varepsilon<x_\varepsilon\le\alpha$

حل: برهان

برهان: فرض کنیم $\alpha=\sup A$ نشان می‌دهیم که رابطه (*) برقرار است

فرض خلف: فرض کنیم $\exists\,\varepsilon_0$ که رابطه (*) برقرار نیست یعنی: $\forall x\in A: x\le\alpha-\varepsilon_0<\alpha$

در نتیجه:

$\alpha-\varepsilon_0$ یک کران بالای دیگر A است و کوچکتر از α ، این در تناقض با $\alpha=\sup A$ است پس فرض خلف باطل است یعنی رابطه (*) $\forall\varepsilon$ برقرار است.

برعکس: فرض کنیم α یک کران بالای A باشد و رابطه (*) نیز برقرار است نشان می‌دهیم $\alpha=\sup A$ برای این منظور باید نشان دهیم α کوچکترین کران بالاست؟

فرض خلف:

فرض کنیم β یک کران بالای دیگر A باشد به طوریکه $\beta<\alpha$: اگر $\varepsilon_0=\alpha-\beta$ آنگاه طبق رابطه * $\exists x_{\varepsilon_0}\in A$ به طوریکه:

$\alpha-(\alpha-\beta)<x_{\varepsilon_0}\le\alpha \Rightarrow \beta<x_{\varepsilon_0}\le\alpha$ X

که متناقض با کران بالا بودن B است. لذا فرض خلف باطل است یعنی کران بالای دیگری برای A که کوچکتر از α باشد، وجود ندارد و در نتیجه α کوچکترین کران بالای A ($\alpha = \sup A$) است.

مثال ۳-۷: $A=\{1,2\}$ ، $\sup A = 2$ ، $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، $2-\frac{1}{2} \le x < 2$ ، $B=(0,1)\cup\{3\}$

* تذکر: اگر $\sup A \in A$ ، آنگاه ماکزیمم A است. $A=(0,1)$

تعریف ۳-۸: اگر F یک میدان مرتب و $A \subseteq F$ از پایین کراندار باشد آنگاه $\beta \in F$ را اینفیمم ($\operatorname{Inf} A$) یا بزرگترین کران پایین A نامیم در صورتیکه:

۱) β کران پایین A باشد

۲) از هر کران پایین A بزرگتر باشد

در مثال ۳-۸ : $0 = \inf A$

* تمرین) اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و β یک کران پایین A باشد در اینصورت β ، $\inf A$ است اگر و تنها اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists x_\varepsilon \in A : \beta < x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$$

تعریف ۳-۱۰:
اگر میدان مرتب F دارای این خاصیت باشد که هر زیرمجموعه‌ای از بالا کراندار آن دارای sup باشد آنگاه میدان F را یک میدان مرتب کامل می‌نامیم.

مثال ۳-۱۱: $\mathbb{R}$ یک میدان مرتب کامل است (اصل تمامیت یا کمال) اعداد حقیقی نامیم.

مثال ۳-۱۲: میدان $\mathbb{Q}$ کامل نمی‌باشد چون $A = \mathbb{Q} \cap (0,\sqrt{2})$ از بالا کراندار است ولی در $\mathbb{Q}$ sup ندارد

مثال ۳-۱۳: میدان مرتب $\mathbb{R}$ یک میدان کامل است

تمرین ۳-۱۴: نشان دهید اگر F یک میدان مرتب کامل باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از پایین کراندار F دارای inf است.

$$\operatorname{Inf} A = -\sup(-A) = -\sup\{-x : x \in A\}$$

10-3

تعریف: میدان مرتب $\mathbb{F}$ را مرتب کامل نامیم هرگاه هر زیر مجموعه غیر تهی و از بالا کراندار E در $\mathbb{F}$ دارای sup در $\mathbb{F}$ باشد. $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$, $E=\{x\in\mathbb{Q} : x<\sqrt{2}\}$

میدان $\mathbb{F}$ ، $(\mathbb{R}, \leq)$

$E\subseteq\mathbb{F}$ $\quad \alpha=\sup E \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0 , \exists x_\varepsilon\in E \quad \alpha-\varepsilon<x_\varepsilon\leq\alpha$

تمرین) فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان مرتب کامل باشد و A و B زیرمجموعه‌ای (بیدن) $\mathbb{F}$ باشند در اینصورت

$A+B=\{a+b : a\in A , b\in B\}$, $AB=\{a.b : a\in A , b\in B\}$

الف) اگر $\alpha=\sup A$, $\beta=\sup B$ نشان دهید: $\sup(A+B)=\alpha+\beta$

ب) آیا می‌توان گفت $\sup(AB)=\alpha.\beta$

(مثلاً $A=(-\infty,-1) , B=(-\infty,-1) \leftarrow$ $AB=(1,\infty)$

$(x,y)\leq(1,5) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{1^2+5^2}$

سوال) فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان مرتب $a,b,c,d\in\mathbb{F}$ ، $a\leq b$, $c\leq d$ آنگاه $a+c\leq b+d$

فرض خلف: $a+c>b+d \rightarrow a+c\leq b+c \quad a\leq b \Rightarrow b-a\geq 0$

قضیه 3-14: برای هر $x\in\mathbb{R}$ عدد صحیح $n_x\in\mathbb{Z}$ وجود دارد به طوریکه: الف) $n_x\leq x$

ب) $m\leq n_x \Leftarrow m\leq n$, $m\in\mathbb{Z}$ عدد n_x را جزء صحیح x نامیده و به $[x]$ نشان می‌دهیم.

اثبات:

برهان: برای هر $x\in\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $E_x=\{m\in\mathbb{Z} : m\leq x\}$ ابتدا نشان می‌دهیم $E_x\neq\emptyset$ است

فرض خلف

فرض کنیم $E_x=\emptyset$ در اینصورت: $\forall m\in\mathbb{Z} \quad m>x$ ①

در نتیجه: $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ از پایین کراندار است لذا inf دارد فرض کنیم $d=\inf\mathbb{Z}$ طبق ① داریم با انتخاب $\varepsilon=1$

$\exists m\in\mathbb{Z}$ $m<d+1$ و این در تناقض است با اینکه $d=\inf\mathbb{Z}$ است

در نتیجه $\leftarrow$ $m-1<d$ ✗

طبق اصل کمال اعداد حقیقی E_x sup دارد. $\sup E_x=n_0$ باید نشان دهیم $n_0\in\mathbb{Z}$ است با توجه به اینکه $n_0=\sup E_x$ است

$\exists m\in E_x \quad n_0-\frac{1}{2}<m\leq n_0$ ~~از طرفی چون $m\leq n_0$ پس~~

و این امکان ندارد چون تفاضل دو عدد صحیح در نتیجه: $0 < m_1 - m < \frac{1}{2}$ $\exists m_1 \in E_x : m < m_1 \leq n_0$
0 یا 1 عدد صحیح است $n_0 - (\frac{n_0 - m}{2}) < m_1 < n_0$

$E_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ $\sup E_x = n_0 \in \mathbb{Z}$

پس $n_0 \leq x$ است این خاصیت الف را اثبات می‌کند

اگر $m \in \mathbb{Z}$ عدد دیگری باشد که $m \leq x$ آنگاه $m \in E_x$ و این خاصیت (ب) را اثبات می‌کند

نتیجه 3-15: برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $[x] \leq x < [x] + 1$

نتیجه 3-16: فرض کنیم $x > 0$ در اینصورت برای هر عدد حقیقی y، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $y < nx$

برهان: چون $x > 0$ پس $\frac{1}{x} > 0$ اکنون برای $y \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم، طبق نتیجه 3 - 15 داریم:

$[\frac{y}{x}] \leq \frac{y}{x} < [\frac{y}{x}] + 1$

در نتیجه: $y < x \cdot ([\frac{y}{x}] + 1)$ اگر $n = [\frac{y}{x}] + 1$ نتیجه حاصل می‌گردد.

نتیجه 3-17: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ به شرط $x < y$، آنگاه $r \in \mathbb{Q}$ به طوری که $x < r < y$

برهان: $x < y$ لذا $y - x > 0$ طبق نتیجه 3-16 عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $2 < n(y-x)$

$nx = (nx+1) - 1 < [nx+1] < nx + 1 < nx + 2 \leq ny$

$\Rightarrow nx < [nx+1] < ny \Rightarrow x < \frac{[nx+1]}{n} < y$

11/7 جلسه 6

$\mathbb{R}$ یک میدان مرتب کامل است $\forall x : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$

نتیجه 1: بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا وجود دارد.

نتیجه 2: بین هر دو عدد حقیقی یک عدد اصم وجود دارد

برهان: فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}$، $x < y$ آنگاه $\sqrt{2}x < \sqrt{2}y$ طبق نتیجه قبل عدد $q \in \mathbb{Q}$ $\exists$ به طوری که

$\sqrt{2}x < q < \sqrt{2}y$

ولذا $x < \frac{a}{\sqrt{2}} < y$ ، $\frac{a}{\sqrt{2}} \notin Q$ چون در غیر اینصورت $\sqrt{2} \in Q$.×.

قضیه 3-19: فرض کنیم $x>0$ در اینصورت برای هر عدد طبیعی n عدد حقیقی $y>0$ وجود دارد به طوریکه $x=y^n$ منحصر بفرد است،
و با نماد $\sqrt[n]{x}$ یا $x^{\frac{1}{n}}$ نشان داده می‌شود.

برهان: قرار می‌دهیم $E=\{t\in\mathbb{R} : t^n<x\}$. $E\neq\emptyset$ چون $0\in E$ حال نشان می‌دهیم E از بالا کراندار است برای این منظور دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $x<1$ در اینصورت برای هر $t\in E$ داریم $t^n<1$ ، لذا داریم $|t|<1$ و در نتیجه $-1<t<1$ (بپذیریم $\sqrt[n]{1}=1$

ب) اگر $x\geq 1$ ، آنگاه داریم: $\forall t\in E : t^n<x\leq x^n \Rightarrow t<x$

فرض خلف: فرض کنیم $t<0$ که واضح است $t<x$ است. اگر $t>0$ آنگاه داریم $t^n<x^n$ و در نتیجه $t<x$
چون اگر $t\geq x$ آنگاه $t^n\geq x^n$ که تناقض است $t\geq x$

$E\neq\emptyset$ و از بالا کراندار است طبق اصل کمال اعداد حقیقی E دارای Sup است. قرار می‌دهیم $y=\sup E$
حال ثابت می‌کنیم $y^n=x$ ؟

؟ ← برای این منظور نشان می‌دهیم $x\nless y^n$ و $x\ngtr y^n$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

الف) فرض کنیم $y^n<x$ لذا $\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}>0$ ولذا $\min\left\{1 , \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}\right\}>0$ طبق خاصیت چگال بودن اعداد گویا در اعداد حقیقی عدد گویای r وجود دارد به طوریکه $r<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ در نتیجه

$$(y+r)^n-y^n \overset{?}{\leq} nr(y+1)^{n-1}<x-y^n$$

تناقض با $y=\sup E \neq (y+r)^n<x \Rightarrow y+r\in E$

$$? \Rightarrow a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}b^0+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}a^0)$$

$$\to (y+r)^n-y^n = r((y+r)^{n-1}+(y+r)^{n-2}y+\dots+y^{n-1}) \leq r[(y+r)^{n-1}+(y+r)^{n-1}+\dots+(y+r)^{n-1}] \leq$$

$$\leq nr(y+1)^{n-1}$$

ب) فرض خلف: $x<y^n$ در اینصورت $y>0$ با استفاده از خاصیت چگال بودن اعداد گویا در اعداد

حقیقی عدد گویا r ی وجود دارد که $0<r<\min[y, \frac{y^n-x}{ny^{n-1}}]$ در نتیجه $r<y$ و $r<\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$ داریم:

$$y^n-(y-r)^n \leq nry^{n-1} < y^n-x$$

و این تناقض با $y=\sup E$ می‌باشد

$$E=\{t : t^n<x\} \Longrightarrow \forall t\in E : t^n<(y-r)^n \rightarrow t<y-r$$

حال نشان می‌دهیم y منحصر به فرد است

فرض خلف: y_1 یک عدد حقیقی مثبت دیگری باشد به طوری که $y_1^n=x$ باید نشان دهیم $y_1=y$

$$0=y_1^n-y^n=(y_1-y)(\underbrace{y_1^{n-1}+y_1^{n-2}y+\dots+y^{n-1}}_{>0})$$

نتیجه 3-20: الف) برای هر دو عدد حقیقی a و b که $0<a<b$ آنگاه $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

$E_a=\{t\in\mathbb{R} : t^n<a\}$

$E_b=\{t\in\mathbb{R} : t^n<b\}$ $\quad E_a\subset E_b \Rightarrow \sup E_a<\sup E_b \Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

تمرین) نشان دهید $\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ و $1<\sqrt[3]{2}<2$

تمرین) اگر ... آنگاه $\sqrt[n]{a^n}=a$

$$\sqrt[n]{a^n}=\sup E_{a^n}=\{t\in\mathbb{R} : t^n<a^n\}=\sup\{t\in\mathbb{R} : t<a\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup E_{a^n}=\sup\{t\in\mathbb{R} : t<a\}=a$$