تعریف مشتق پذیری: تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر است اگر و تنها اگر اعداد A و B و توابع $E_1(\Delta x,\Delta y)$ و $E_2(\Delta x,\Delta y)$ موجود باشند به طوری که:

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=A\Delta x+B\Delta y+E_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+E_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$$

به طوری که

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E_1(\Delta x,\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E_2(\Delta x,\Delta y)=0$$

مثال: نشان دهید $f(x,y)=x^2y+y$ در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

حل:

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)$$

$$=\underset{f_x}{0}\cdot\Delta x+\underset{f_y}{1}\cdot\Delta y+\underbrace{(\Delta x\Delta y)}_{E_1}\Delta x+0\cdot\Delta y$$

قضیه: اگر تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه:

الف) f در (a,b) پیوسته است.

ب) D_1f و D_2f در (a,b) وجود دارد و داریم $A=D_1f(a,b)$، $B=D_2f(a,b)$

ج) f در (a,b) در هر سوی بردار یکانی $u=(u_1,u_2)$ مشتق پذیر است و داریم:

$$D_uf(a,b)=D_1f(a,b)\cdot u_1+D_2f(a,b)\cdot u_2$$

Subject:
Yare: Month: Day:

امتحانی

۳-۳۸- تابع f به صورت زیر مفروض است:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

ج) f در $(0,0)$ در چه سوی های مشتق پذیر است.

د) آیا f در $(0,0)$ مشتق پذیر است؟

الف) پیوسته است

کراندار × ۰

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=0=f(0,0)$$

ب)

$$D_1f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t}=1$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0$$

ج) $u=(a,b)$ که $a^2+b^2=1$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{ta\,\frac{t^2a^2-t^2b^2}{t^2(a^2+b^2)}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t}a(a^2-b^2)}{\cancel{t}}=a(a^2-b^2)$$

در هر سو مشتق پذیر است چون برای a و b، شرط نداریم.

د) حال فرمول را بررسی می کنیم؛

آیا فرمول برقرار است یعنی؟

$$D_1f(0,0)a+D_2f(0,0)b=a$$

Maral

$$\cancel{a}=\cancel{a}(a^2-b^2)\longrightarrow a^2=b^2+1$$

مشتق پذیر نیست چون در رویه ی خاصی مشتق پذیر است.

۴۴-۳

مثال: ~~[illegible]~~ در مشتق‌پذیری تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در $(0,0)$ بحث کنید. الف) f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) [redacted] $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2\sin\frac{1}{\sqrt{t^2}}}{t}=0=D_1f(0,0)$

به طور مشابه $D_2f(0,0)=0$

ج) $u=(a,b)$ که $a^2+b^2=1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cancel{(a^2+b^2)}\sin\frac{1}{\sqrt{t^2}}}{t}=0$$

د) در هر سو مشتق‌پذیر است و داریم: $D_uf(0,0)=0=D_1f(0,0)a+D_2f(0,0)b=0$

یعنی فرمول هم برقرار است.

با تعریف باید اثبات کنیم:

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-0$$

$$=0\Delta x+0\Delta y+\Big(\underbrace{\Delta x\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\lim\varepsilon_1\to 0}\Big)\Delta x+\Big(\underbrace{\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\lim\varepsilon_2\to 0}\Big)\Delta y$$

بنابراین طبق تعریف f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.