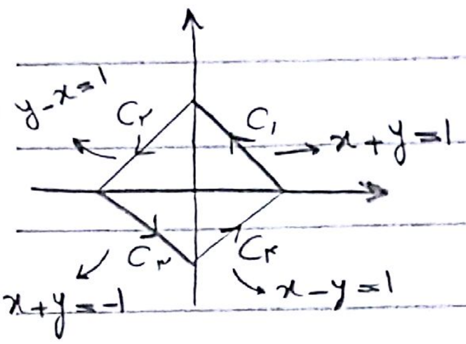
موضوع:
تاریخ / /

ریاضی ۲

سوال ۱: که C منحنی $|x|+|y|=1$ است. $I=\oint_C \frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}=?$

دقت: ایده فرد بودن نادرست است.



$$I=\int_{C_1}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}+\int_{C_2}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}+\int_{C_3}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}+\int_{C_4}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}$$

$C_1: r(x): \langle x, 1-x\rangle \ , \ 0\leq x\leq 1$

$$\int_{C_1}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}=-\int_0^1\frac{(1-x)dx-x(-dx)}{x+(1-x)}=-\int_0^1\frac{dx-\cancel{xdx}+\cancel{xdx}}{\cancel{x}+1-\cancel{x}}$$

$$=-\int_0^1 dx=\boxed{-1}$$

$C_3: x+y=-1 \ , \ r(x)=\langle x, -1-x\rangle \ , \ -1\leq x\leq 0$

$$\int_{C_3}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}=\int_{-1}^{0}\frac{(-1-x)dx-x(-dx)}{-x-(-1-x)}=\int_{-1}^{0}\frac{-dx}{1}=(-x)\Big|_{-1}^{0}=\boxed{-1}$$

$C_2: y-x=1 \ , \ r(x)=\langle x, 1+x\rangle \ , \ -1\leq x\leq 0$

$$\int_{C_2}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}=-\int_{C_2}\frac{(1+\cancel{x})dx-\cancel{xdx}}{\cancel{-x}+(1+\cancel{x})}=-\int_{-1}^{0}dx=\boxed{(-x)\Big|_{-1}^{0}=-1}$$

$C_4: x-y=1 \ , \ r(x)=\langle x, x-1\rangle \ , \ 0\leq x\leq 1$

$$\int_{C_4}\frac{ydx-xdy}{|x|+|y|}=\int_{C_4}\frac{(x-1)dx-xdx}{\cancel{+x}\cancel{-x}+1}=\int_{C_4}-dx=\boxed{(-x)\Big|_0^1=-1}$$

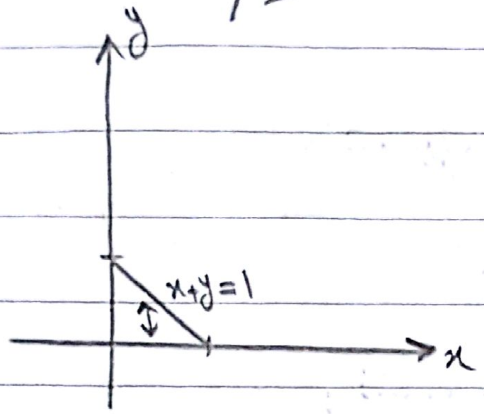
$$\Longrightarrow \boxed{I=-4}$$

PARS NAFIS

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\left(\frac{y}{x+y}\right)}\,dy\,dx=?$$

سوال ۲:

تعویض ترتیب انتگرال گیری کارساز نیست. (تغییر متغیر استفاده می کنیم).



$$y=1-x \longrightarrow x+y=1$$

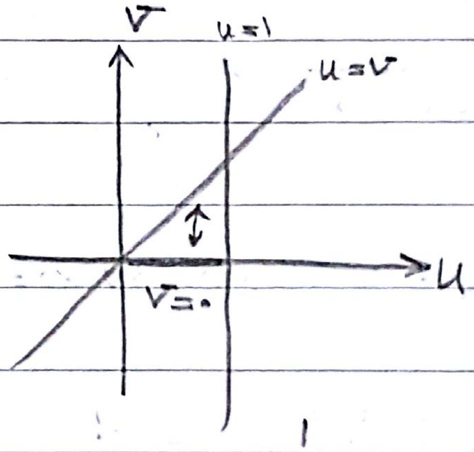
$$T^{-1}:\begin{cases} x+y=u \\ y=v \end{cases} \longrightarrow J(T^{-1})=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$J(T)=\frac{1}{J(T^{-1})}=1$$

$$x+y=1 \longrightarrow u=1$$

$$y=0 \longrightarrow v=0$$

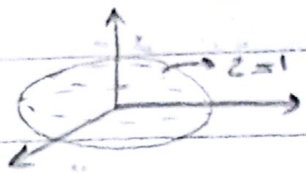
$$x=0 \longrightarrow \begin{cases} u=y \\ v=y \end{cases} \longrightarrow u=v$$



$$I=\int_0^1\int_0^u e^{\frac{v}{y}}\,dv\,du=\int_0^1 \left(u e^{\frac{v}{u}}\right)\Big|_0^u du=\int_0^1 u(e-1)\,du$$

$$=\frac{1}{2}u^2(e-1)\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}(e-1)}$$

سوال ۳: فرض کنید S بخشی از سطح بیضی‌گون $4x^2+4y^2+z^2=5$ باشد که در ناحیه $z \geq 1$ قرار دارد و n قائم یکه‌ی بالایی بر S باشد و $F(x,y,z)=2xyz\,\hat{i}+(z-y^2z)\,\hat{j}+z^2\hat{k}$ مطلوب است محاسبه:



$$\iint_S F\cdot n\cdot dS = ?$$

$$S: z=\sqrt{5-4x^2-4y^2} \qquad D:\begin{cases} 4x^2+4y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow D:\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$g_x=\frac{-4x}{\sqrt{5-4x^2-4y^2}}\ ,\quad g_y=\frac{-4y}{\sqrt{5-4x^2-4y^2}}$$

$$I=\iint_D \sqrt{5-4x^2-4y^2}\,\left(2xy,\ 1-y^2,\ \sqrt{5-4x^2-4y^2}\right)\cdot(-g_x,-g_y,1)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D \left(8x^2y+4y(1-y^2)+5-4x^2-4y^2\right)dx\,dy$$ مختصات قطبی

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(8r^3\cos^2\theta\sin\theta+4r\sin\theta-4r^3\sin^3\theta+5-4r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=8\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\int_0^1 r^4dr+4\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^2dr-4\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^1 r^4dr$$

$$+5\pi-4\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr=5\pi-4(2\pi)\left(\tfrac{1}{4}\right)=\boxed{3\pi}$$

سوال ۴: حجم جسمی که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=5$ و از پایین به سهمیگون $x^2+y^2=4z$ را محاسبه کنید.

$z\geq 0$

$$\frac{1}{4}(x^2+y^2) \leq z \leq \sqrt{5-x^2-y^2}$$

$$(x,y)\in D: \qquad D:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2=4z \end{cases}$$

$$\longrightarrow 4z+z^2=5 \Rightarrow z^2+4z-5=0 \longrightarrow (z+2)^2-9=0 \longrightarrow z+2=\pm 3$$

$$\xrightarrow[z\geq 0]{} \boxed{z=1} \longrightarrow D:\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4\}$$

$$V=\iiint_W dV=\iint_D \left(\int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{\sqrt{5-(x^2+y^2)}} dz\right) dA=\iint_D \left(\sqrt{5-(x^2+y^2)}-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right) dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(\sqrt{5-r^2}-\tfrac{1}{4}r^2\right) r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\left(\int_0^2 r\sqrt{5-r^2}\,dr-\tfrac{1}{4}\int_0^2 r^3\,dr\right)$$

$$=2\pi\left(-\tfrac{1}{2}\int_5^1 u^{1/2}\,du-\frac{1}{16}\left(r^4\right)\Big|_0^2\right)=-\pi\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_5^1-2\pi$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\left(1-5^{3/2}\right)-2\pi$$