تابع حقیقی

مثال ۱: $\iint x^2yz\,ds$ که در آن S قسمتی از صفحه $z = 1+2x+3y$ است که بالای مستطیل $\underbrace{[0,3]\times[0,2]}_{D}$ قرار دارد.

حل: $-g_x = -2 \quad , \quad -g_y = -3$

$$I = \iint_D x^2y\,(1+2x+3y)\sqrt{14}\,dx\,dy = \sqrt{14}\int_0^3\int_0^2 (x^2y + 2x^3y + 3x^2y^2)\,dy\,dx$$

$$\sqrt{14}\left(\int_0^3 x^2dx\int_0^2 y\,dy+2\int_0^3 x^3dx\int_0^2 y\,dy+3\int_0^3 x^2dx\int_0^2 y^2dy\right)$$

مثال ۲: $\iint_S (x^2z+y^2z)\,ds$ که در آن S نیم کره بالایی $x^2+y^2+z^2=4$ است.

حل: $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4\}\ ,\ z=\underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{g}$

$$g_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\qquad g_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\Longrightarrow I=\iint_D\left(x^2\sqrt{4-x^2-y^2}+y^2\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}+1}\ dxdy$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\ dxdy=2\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\cdot dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^2 r^3dr=4\pi\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2=\boxed{16\pi}$$

مثال ۳: مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو: $\iint_S F\cdot n\,ds$

که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که بین صفحات $z=1$, $z=3$ قرار دارد.

$F=-x\hat{i}-y\hat{j}+z^2\hat{k}$

بسته نیست چون گفته محدود به مخروط و صفحات.
(یعنی شامل این صفحات نیست)

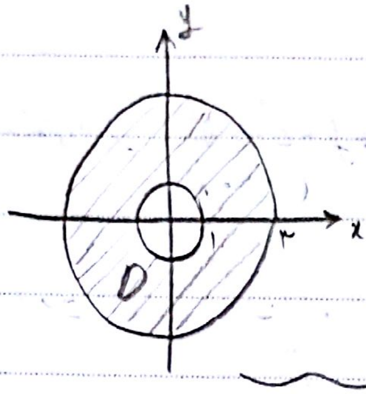
$$g=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad -g_x=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\quad -g_y=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$I=\iint_D(-x,-y,x^2+y^2)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)dxdy$$

Date: / / Subject:

$$= \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2) \right) dx\,dy = \iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \right) dx\,dy$$

$$\begin{cases} z = 3 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2 = 9 \quad , \quad \begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^3 (r + r^2) \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 (r^2 + r^3)\,dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \right)\Big|_1^3$$

$$= 2\pi \left(9 + \frac{81}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

مثال ۴: مطلوبست محاسبه $\iint_S F \cdot n\, d\sigma$ که در آن $F(x,y,z) = (x^3+y^3)i + (y^3+z^3)j + (z^3+x^3)k$

و S یک کره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است.

حل: چون S یک سطح بسته است و میدان F دارای مشتقات جزئی پیوسته پس شرایط قضیه دیورژانس برقرار است.

$$I = \iiint_W \operatorname{div} F \, dv = \iiint_W \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dv = \iiint_W (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\, dv$$

$$= 3 \iiint_W (x^2+y^2+z^2)\, dv = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

دقت کنید این عبارت برابر ٤ شد چون داخل کره هستیم فقط به بیشتر را از کل گرفته ایم.

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^2 \rho^4 \, d\rho = 3(2\pi)(2)\left(\frac{32}{5} \right)$$

manistar

مثال ۵: مطلوبست محاسبه $\oiint_S F\cdot dS$ که در آن $F(x,y,z)=x^2\sin y\,\hat{i}+x\cos y\,\hat{j}-xz\sin y\,\hat{k}$

و $S: x^8+y^8+z^8=8$

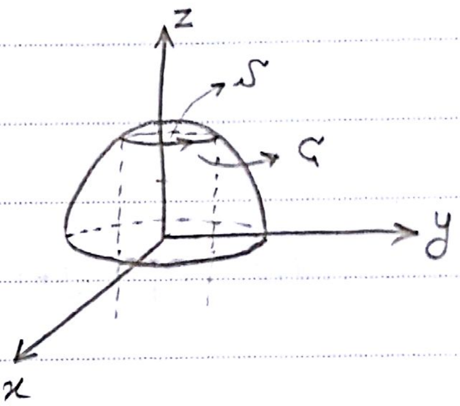
حل:

$$\oiint_S F\cdot dS=\iiint_W (2x\sin y-x\sin y-x\sin y)\,dV=0$$

مثال ۶: مطلوبست محاسبه $\iint_S \mathrm{Curl}F\cdot dS$ که در آن: $F(x,y,z)=xz\,i+yz\,j+xy\,k$

و S قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geq 0)$ است که درون استوانه $x^2+y^2=1$ است.

حل: شرایط قضیه استوکس برقرار است. طبق این قضیه داریم:



$$I=\oint_C F\cdot dr$$

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$C: x^2+y^2=1\ ,\ z=\sqrt{3}$$

$$r(t)=(\cos t,\sin t,\sqrt{3})$$

$$I=\int_0^{2\pi}(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}\sin t,\sin t\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sqrt{3}\sin t\cos t+\sqrt{3}\sin t\cos t)\,dt=0$$

Date: / /

Subject:

مثال ۷: $\iint_S \text{Curl}\,F \cdot dS$ که در آن $F = 2y\cos z\, i + e^{x}\sin z\, j + x e^{y} k$ ، S نیم کره بالایی کره $x^2+y^2+z^2=9$ است.

(نکته: اگر سطح بسته بود طبق قضیه دیورژانس $\text{div}(\text{Curl}\,F) = 0$).

$$I = \oint_C F \cdot dr$$

$x^2+y^2=9 \,,\; z=0$

$C: x^2+y^2=9 \,,\; z=0$

$r(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0) \,,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Longrightarrow I = \oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (6\sin t, 0, 3\cos t\, e^{3\sin t}) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -18\sin^2 t\, dt = 9\int_0^{2\pi} -2\sin^2 t\, dt = \boxed{-18\pi}$$