

۱. الف) هر یک از مفاهیم میدان، میدان مرتب و میدان مرتب کامل را تعریف کنید. (۵ نمره)  
ب) اگر  $F$  یک میدان مرتب کامل باشد ثابت کنید هر زیرمجموعه غیر تهی و از پایین کراندار میدان  $F$  دارای بزرگترین کران پایین است. (۵ نمره)

۲. الف) برای مجموعه کراندار  $A \subset \mathbb{R}$  مانند  $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$  و عدد منفی  $\lambda$  نشان دهید که  $\lim \inf(\lambda a_n) = \lambda \lim \sup a_n$  (۵ نمره)  
ب) فرض کنید  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  دنباله‌ای کراندار باشد. برای عدد منفی  $\lambda$  نشان دهید که  $\lim \inf(\lambda a_n) = \lambda \lim \sup a_n$  (۵ نمره)

۳. الف) فرض کنید  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  دنباله‌ای صعودی و کراندار باشد. ثابت کنید این دنباله همگرا است. (۵ نمره)  
ب) فرض کنید  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  دنباله‌ای کراندار بوده، برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$  ثابت کنید  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  همگرا است. (۵ نمره)

۴. فرض کنید  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  دنباله‌ای از اعداد نامنفی و همگرا به عدد  $a \neq 0$  باشد. اگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$  قرار دهیم  $b_n := \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k}$  ثابت کنید دنباله  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  واگرا است. (۵ نمره)

موفق باشید