آزمون میان ترم درس مبانی آنالیز ریاضی

آبان ماه ۹۴ **مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه**

---

۱. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد. نشان دهید $a = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\}$. (۱۰ نمره)

---

۲. نشان دهید دنباله $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ دنباله‌ای صعودی و همگرا است. (۱۰ نمره)

---

۳. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند با این خاصیت که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$. ثابت کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا است اگر و تنها اگر $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا باشد. (۱۵ نمره)

---

۴. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای صعودی باشد.

الف) نشان دهید هر زیردنباله از $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیز صعودی است.

ب) اگر $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حاوی زیردنباله‌ای کراندار باشد نشان دهید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا است. (۲۰ نمره)

---

۵. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله کراندار از اعداد حقیقی باشند به گونه‌ای که برای هر $n \in \mathbb{N}$ با شرط $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$. نشان دهید $\limsup a_n \leq \limsup b_n$. (۱۵ نمره)

موفق باشید