مسیر اول y=0

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[y=0]{}(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^3+0^3}=0$$

اکنون با در نظر گرفتن تابع کلی y=f(x) می بینیم که f(x) چه شرایطی باید داشته باشد.(f همان f(x) و f’ همان f’(x) است.)

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[y=f(x)]{}(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0}\frac{2xf^2+2x^2f'f}{3x^2+3f'f^2}$$

با توجه به این که در تمامی گزاره ها x=0 ویا y=f(0)=0 دارند پس این حد نیز مبهم است پس :

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f^2+4xf'f+4xf'f+2x^2\left(f''f+f'^2\right)}{6x+3f''f^2+6f'^2f}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f^2+8xf'f+2x^2f''f+2x^2f'^2}{6x+3f''f^2+6f'^2f}=\frac{0}{0}\text{مبهم}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4+8)f'f+8x\left(f''f+f'^2\right)+4xf''f+2x^2\left(f^{(3)}f+f''f'\right)+4xf'^2+4x^2f''f'}{6+3f^{(3)}f^2+6f''f'f+6f'^3+12f''f'f}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{12f'f+12xf''f+12xf'^2+2x^2f^{(3)}f+6x^2f''f'}{6+3f^{(3)}f^2+18f''f'f+6f'^3}$$

صورت کسر با قرار دادن x=0 و f(0)=0 صورت کسر صفر می شود. برای این که ثابت کنیم حد وجود ندارد باید مسیری بیابیم که در آن مسیر حد صفر نشود. پس مخرج کسر باید صفر باشد تا دوباره با حالت مبهم مواجه شویم :

$$6+6f'^2(0)=0\Rightarrow f'(0)=-1 \qquad (*)$$

پس دوباره از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$=\lim_{x\to0}\frac{12f'^2+12f''f+12f''f+12x\left(f''f'+f^{(3)}f\right)+12f'^2+24xf''f'}{3f^{(4)}f^2+6f^{(3)}f'f+18f^{(3)}f'f+18f''(f''f+f'^2)+18f''f'^2}$$
$$+\frac{4xf^{(3)}f+2x^2\left(f^{(4)}f+f^{(3)}f'\right)+12xf''f'+6x^2(f^{(3)}f'+f''^2)}{3f^{(4)}f^2+6f^{(3)}f'f+18f^{(3)}f'f+18f''(f''f+f'^2)+18f''f'^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{24f'^2+24f''f+48xf''f'+16xf^{(3)}f+2x^2f^{(4)}f+8x^2f^{(3)}f'+6x^2f''^2}{3f^{(4)}f^2+24f^{(3)}f'f+18f''^2f+36f''f'^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{24f'^2}{36f''f'^2}$$

با توجه به رابطه ی بالا و رابطه ی(*)داریم در صورتی که f''(0) عددی غیر صفر باشد و f'(0)= -1 باشد حاصل حد عددی غیر صفر خواهد شد.حال به عنوان مثال تابع $y=x^2-x$ را در نظر می گیریم که در شرایط بالا و شرایط مسیر بودن صدق می کند داریم:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[y=x^2-x]{}(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-x)^2}{x^3+(x^2-x)^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4(x-1)^2}{x^3(1+(x-1)^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{1+x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(x^2-3x+3)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+3} = \frac{1}{3}$$

پس با دو مسیر متفاوت به حد های متفاوت رسیدیم که می توان نتیجه گرفت حد وجود ندارد!!!!!

علیرضا دایی جواد